Koordinat Sistemleri

Dik koordinat sisteminde vektörler

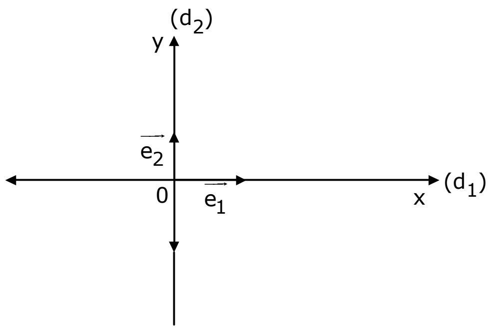
■ **Vektörler**i – geometrik bir kavram olarak – 9. sınıfta **koordinat doğrusu**nda ve **koordinat düzlemi**nde tanımıştınız.

2. bölümde **sentetik** olarak ele aldığımız **vektörler**i, bu bölümde yeniden **koordinat sistemi**ne yerleştireceğiz:

Düzlemde birbirine dik $\overrightarrow{\mathbf{e_1}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{e_2}}$ birim vektörleri verilmiş olsun. $\overrightarrow{\mathbf{e_1}}$ ile $\overrightarrow{\mathbf{e_2}}$ vektörlerinin taşıyıcıları $\overrightarrow{\mathbf{d_1}}$ ile $\overrightarrow{\mathbf{d_2}}$ ve

$d_1 \cap d_2 = \{0\}$ ise, $\left(\mathbf{0}; \overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\right)$ üçlüsüne düzlemin **dik koordinat sistemi** denir. 0 noktası bu sistemin **orijini** ya da **başlangıç noktası**; d_1 ve d_2 doğruları **x** ve **y eksenleri**dir. Koordinat sistemi ile donatılmış düzleme **koordinat düzlemi** ya da **analitik düzlem** adı verilir.

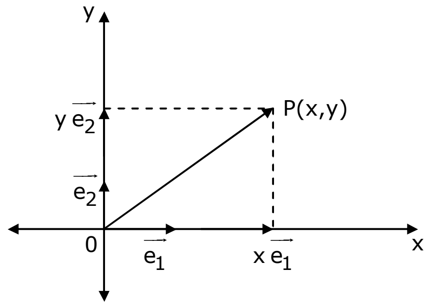
Aşağıdaki şekil, $\left(0; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ koordinat sisteminin sayfamıza çizdiğimiz **model**idir. Bu durumda sayfamız da **analitik düzlem**in bir parçasının **modeli** olur.



(d_1, d_2) düzleminde her $\overrightarrow{OP}$ vektörü, doğrusal bağımsız $\overrightarrow{e_1}$ ve $\overrightarrow{e_2}$ vektörleri türünden ifade edilebilir.

$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ gibi.

x ve y sayılarının, P noktasının koordinatları olduğu açıktır.



Buna göre; düzlemin her P noktası, orijinden P'ye yönlenmiş bir vektörü temsil eder.

Bir (x,y) ikilisinin P noktasına ait olduğu P(x,y) biçiminde gösterilir. (x,y) ikilisinin $\overline{OP}$ ya da $\vec{P}$ vektörünü gösterdiği

$\overrightarrow{OP} = (x, y)$ ya da $\vec{P} = (x, y)$ eşitliği ile belirtilir.

x, $y \in R$ ise $(x, y) \in RXR$ veya $(x, y) \in R^2$ olduğunu 9. sınıftan biliyorsunuz.

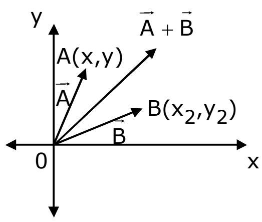
O halde; düzlemdeki vektörlerin kümesi V ise, $V = R^2$ diyebiliriz.

Etkinlik – 3.1

$\vec{P} = (x, y)$

$\Rightarrow \vec{P} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$

olduğunu dikkate alarak,



a. $\vec{A} = (x_1, y_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2)$

ise $\vec{A} + \vec{B} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$\Rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

olduğunu gösteriniz.

b. $k \in R$ olmak üzere; $\vec{M} = (x, y)$ ise

$k\vec{M} = (kx, ky)$

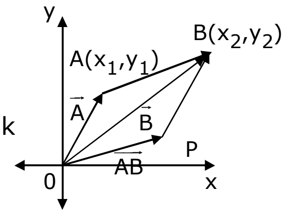
$\Rightarrow k(x_y, y_x) = (kx, ky)$

olduğunu gösteriniz.

c. $\vec{A} = (-3, 1)$, $\vec{B} = (2, -4)$, $\vec{C} = (1, -5)$ olduğuna göre, $\vec{A} + 2\vec{B} - \vec{C}$ vektörünü bulunuz.

Etkinlik – 3.2

a. $A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ noktaları verilmiş olsun. Yandaki şekli inceleyerek $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ olduğunu gösteriniz.



b. $A(-2,1)$ ve $B(2,-2)$ ise $\overrightarrow{AB}$ nü bulunuz.

■ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{Op}$ ise, $\overrightarrow{Op}$ yönlü doğru parçasına $\overrightarrow{AB}$'nün **yer vektörü** ya da **konum vektörü** denir.

Etkinlik – 3.3

a. $\vec{P}=(x,y)$ ise
$|\vec{P}|=\sqrt{x^2+y^2}$
olduğunu gösteriniz.

b. $A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ ise
$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ olduğunu gösteriniz.

c. $A(-3,4)$ ve $B(1,-4)$ ise $\overrightarrow{AB}$ kaç birimdir?

Etkinlik – 3.4

a. $\vec{u}=(x_1,y_1)$ ve $\vec{v}=(x_2,y_2)$ vektörleri doğrusal bağımlı ise $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ olduğunu gösteriniz.

b. $\vec{u}=(m+1,-2)$ ve $\vec{v}=(1-m,1)$ vektörleri doğrusal bağımlı ise m kaçtır?

Etkinlik – 3.5

$\vec{A}=(-3,1)$, $\overrightarrow{AB}=(-2,3)$, $\overrightarrow{BC}=(1,2)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{A}-2\vec{B}+\vec{C}$ toplamını bulunuz.

b. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}$ ise $\vec{P}$'nü bulunuz.

c. $\overrightarrow{AR}+2\overrightarrow{RC}=\overrightarrow{BR}$ ise $\vec{R}$'nü bulunuz.

Etkinlik – 3.6

$\overrightarrow{AB}=(-1,2),\vec{B}=(3,-1),\vec{C}=(-2,4)$
$\overrightarrow{CD}=(k,2-k)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{A}$ ile $\overrightarrow{CD}$ doğrusal bağımlı olduğuna göre, $\overrightarrow{AD}$'nü bulunuz.

b. $\vec{A}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BC}$ eşitliğini sağlayan x ve y kat sayılarını bulunuz.

c. $x\vec{A}+y\vec{B}+z\vec{C}=0$ eşitliğini sağlayan en sade x, y, z tam sayılarını bulunuz.

d. A, B, D noktaları doğrusal ise k kaçtır?

Etkinlik – 3.7

$(-2,-3)$, $(1,-1)$, $(3,2)$ noktalarının, bir paralelkenarın köşelerinden 3'ü olduğu biliniyor. 4. köşe olabilecek noktaları bulunuz.

Etkinlik – 3.8

$\vec{A}=(-2,1)$ ve $\overrightarrow{AB}=(3,6)$ vektörleri veriliyor.

a. $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{1}{2}$ olduğuna göre $\vec{E}$'nü bulunuz.

b. $\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=\frac{3}{2}$ olduğuna göre $\vec{F}$'nü bulunuz.

c. E ve F noktalarını AB doğrusu üzerinde gösteriniz.

Vektörlerin iç çarpımı

■ Düzlemdeki vektörlerin kümesi V;

$\vec{u},\vec{v}\in V$, $\vec{u}=(x_1,y_1)$ ve $\vec{v}=(x_2,y_2)$ olmak üzere,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2$$

eşitliği ile tanımlanan işleme, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin **Öklid iç çarpımı** adı verilir. İşlem sonucunun $x_1x_2+y_1y_2$ gibi bir gerçel sayı olması nedeniyle, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ işlemin $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin **skaler çarpımı** da denir. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ işlemi, $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ sembolü ile de gösterilir.

Etkinlik – 3.9

$\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ve $\vec{c} = (x_3, y_3)$ vektörlerini kullanarak;

a. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

b. $\left(k\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = k\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$; $k \in R$

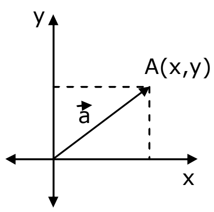
c. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + k\vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + k \cdot \vec{a} \cdot \vec{c}$; $k \in R$

d. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ olduğunu gösteriniz.

Vektörün normu

Etkinlik – 3.10

$\vec{a} = (x, y)$ vektörünü kullanarak, $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ olduğunu gösteriniz.



■ $\vec{a} \cdot \vec{a}$ çarpımının pozitif karekökü $\vec{a}$'nün **norm**u olarak tanımlanır.

$\vec{a}$'nün normu $\left\|\vec{a}\right\|$ sembolü ile gösterilir. Buna göre, $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ dır.

Norm terimi **uzunluk** teriminden daha kapsamlıdır. 1, 2 ve 3 boyutlu uzaylarda bu terimler aynı anlama gelir. Ancak; ileride öğreneceğiniz -geometrik karşılığı olmayan- 3'ten fazla boyutlu uzaylarda **uzunluk** terimi değil, **norm** terimi geçerlidir.

Buradan sonraki işlemlerimizde $[AB]$'nın uzunluğunu $|AB|$ ile, $\overrightarrow{AB}$'nün normunu $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ ile göstereceğiz.

İç çarpımın açı türünden ifadesi

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin belirttiği açının ölçüsü α ise, $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \left\|\vec{\mathbf{u}}\right\| \cdot \left\|\vec{\mathbf{v}}\right\| \cdot \mathbf{cos}\alpha$ dır. (1)

İç çarpım işleminin, (1) teoremi ile belirtilen anlamıyla, daha geniş uygulama alanları bulacağı açıktır.

Bu teoremin ispatı, **Kosinüs Teoremi** olarak bilinen teorem kullanılarak kolayca yapılabilir. Kosinüs Teoremi, bir üçgenin kenar uzunlukları ve açılarının ölçüleri arasında

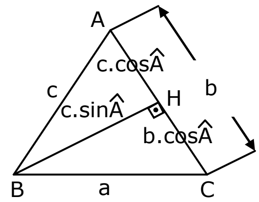
$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA}$

bağıntısı olduğunu söyler.

Önce bu teoremi ispatlamamız gerekir.

Etkinlik – 3.11

ABC üçgeninde $BH \perp AC$, $|BC| = a$, $|AC| = b$ ve $|AB| = c$ olsun.



a. $|BH| = c \cdot \sin\hat{A}$, $|AH| = c \cdot \cos\hat{A}$ ve

$|HC| = b - c \cdot \cos\hat{A}$ olduğunu gösteriniz.

b. HBC dik üçgeninde,

$|BC|^2 = |BH|^2 + |HC|^2$ olduğunu ve

$\sin^2\hat{A} + \cos^2\hat{A} = 1$ bağıntısını kullanarak,

$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA}$

bağıntısını elde ediniz.

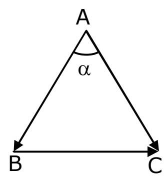
c. ABC üçgeninde $a = 6$ birim, $b = 7$ birim ve $c = 5$ birim ise $\cos\hat{A}$, $\cos\hat{B}$ ve $\cos\hat{C}$ değerlerini bulunuz.

d. ABC üçgeninde $a = 8$ birim, $b = 6$ birim ve $m(\hat{C}) = 60°$ ise c kaç birimdir?

Etkinlik – 3.12

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cdot \cos\alpha$

eşitliğini ispatlayınız.



[$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$ ve

$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos\alpha$

bağıntılarını kullanınız.]

■ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ise

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos 0$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ olur.

Etkinlik – 3.13

a. $\vec{a} = (-1, 2)$ ve $\vec{b} = (3, 4)$ vektörleri arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

b. $\vec{a} = (-4, 2)$, $\vec{b} = (k, -6)$ ve $\vec{a} \perp \vec{b}$ ise k kaçtır?

Etkinlik – 3.14

$\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (-1, 1)$ ve $\vec{c} = (1, 2)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{a} + k\vec{b}$ ile $\vec{c}$ birbirine dik ise k kaçtır?

b. $\vec{a} + t\vec{b}$ ile $\vec{c}$ doğrusal bağımlı ise t kaçtır?

Etkinlik – 3.15

ABC dik üçgeninin B dik açı köşesi x ekseni üzerindedir. $A = (-1, 2)$ ve $C = (4, 3)$ olduğuna göre, B köşesi olabilecek noktaları bulunuz.

Etkinlik – 3.16

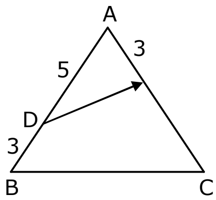
ABC üçgeni eşkenardır.

$|AD| = 5$ birim,

$|AE| = 3$ birim ve

$|BD| = 3$ birim ise

$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BC}$ kaçtır?



Etkinlik – 3.17

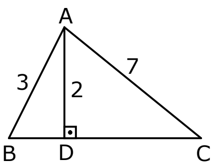
ABC üçgeninde,

$AD \perp BC$, $|AB| = 3$ birim,

$|AD| = 2$ birim ve

$|AC| = 7$ birim ise

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ kaçtır?



[$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right)$ eşitliğinden yararlanınız.]

Etkinlik – 3.18

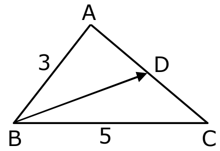
ABC üçgeninde

$|AD| = |DC|$ dir.

$|AB| = 3$ birim ve

$|BC| = 5$ birim ise

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DA}$ kaçtır?



Etkinlik – 3.19

$\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 3$ ve $\vec{a} + 2\vec{b} = (-3, -4)$ olduğuna göre,

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ kaçtır?

$\left(\|\vec{a} + 2\vec{b}\|\right.$'dan yararlanınız.$\left.\right)$

İç çarpım işlemi ile uygulamalar

Etkinlik – 3.20

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ birim vektörleri arasındaki açı 60° dir.

$\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ve $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b}$ olduğuna göre, $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

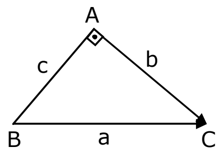
Etkinlik – 3.21

ABC dik üçgeninde;

$|AB| = c$, $|AC| = b$,

$|BC| = a$ ve

$AB \perp AC$ olsun.



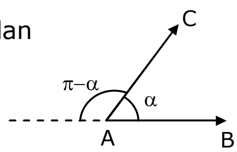
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ eşitliğini kullanarak $a^2 = b^2 + c^2$ (Pisagor Bağıntısı) olduğunu gösteriniz.

Etkinlik – 3.22

İki vektörün iç çarpımından yararlanarak,

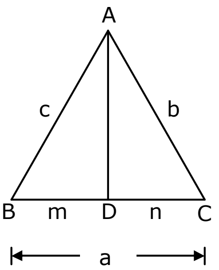
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

olduğunu gösteriniz.



($\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{AC}$'nün belirttiği açının ölçüsü α ise, $\overrightarrow{BA}$ ile $\overrightarrow{AC}$'nün belirttiği açının ölçüsü $\pi - \alpha$'dır.)

Etkinlik – 3.23



ABC üçgeninde,

$|AB| = c$, $|AC| = a$,

$|BD| = m$ ve $|DC| = n$ olsun.

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$

olduğunu gösteriniz.

b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ olduğunu gösteriniz.

(a'daki eşitlikten yararlanınız.)

c. $|AD|^2 = \frac{mb^2 + nc^2}{a} - m \cdot n$ olduğunu gösteriniz.

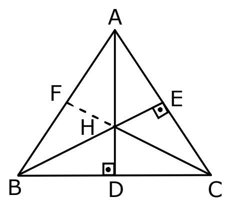
[$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{m}{a}\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{m}{a}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{m}{a}\overrightarrow{BC}\right)$

sağ tarafı açınız.]

d. $b = 9$ birim, $c = 12$ birim, $m = 4$ birim ve $n = 2$ birim ise $|AD|$ kaç birimdir?

Etkinlik – 3.24

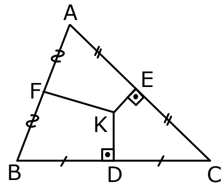


Herhangi bir üçgende yükseklikler aynı noktada kesişirler. İspatlayınız.

(ABC üçgeninde $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ ve $AD \cap BE = \{H\}$ olsun.

$AH \perp BC$ ve $BH \perp AC$ önermelerinin $CH \perp AB$ önermesini gerektirdiğini göstermelisiniz. Bu da, $\overrightarrow{AH}$ ve $\overrightarrow{BH}$'ın $\overrightarrow{CH}$ türünden ifade edilmesini akla getirmiyor mu?)

Etkinlik – 3.25

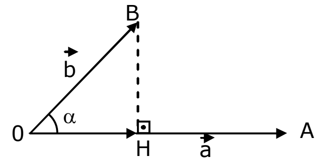


Bir üçgende kenar orta Dikmelerinin aynı noktada kesişeceğini gösteriniz.

($[AC]$ ve $[BC]$ nın orta dikmeleri bir K noktasında kesişirler. $[AB]$'nın orta noktası F olsun. $KF \perp AB$ olduğunu göstermelisiniz. Bunun için $\overrightarrow{KD}$ ve $\overrightarrow{KE}$ vektörlerini $\overrightarrow{KF}$ türünden ifade etmeniz gerekir.)

Bir vektörün başka bir vektör üzerine dik izdüşümü

■



$H \in OA$, $BH \perp OA$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ise $\overrightarrow{OH}$ ne $\vec{b}$ nün $\vec{a}$ üzerine **dik izdüşüm vektörü** denir. Bu izdüşüm vektörü $\mathbf{b}_{\vec{a}}$ ile de gösterilebilir.

$\overset{\Delta}{BOH}$ inde, $\|\overrightarrow{OH}\| = \|\vec{b}\| \cdot \cos\alpha$ olduğunu görünüz.

$\vec{a}$ doğrultusundaki birim vektör $\overrightarrow{u_a}$ olsun.

$\|\overrightarrow{u_a}\| = 1$ olduğundan

$\|\overrightarrow{OH}\| = \|\vec{b}\| \cdot \|\overrightarrow{u_a}\| \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{OH}\| = \vec{b} \cdot \overrightarrow{u_a}$ yazılabilir.

$\overrightarrow{OH} = \|\overrightarrow{OH}\| \cdot \overrightarrow{u_a}$,

$\overrightarrow{u_a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ ve $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{b_a}$ olduğuna göre;

$\overrightarrow{OH} = \left(\vec{b} \cdot \overrightarrow{u_a}\right) \cdot \overrightarrow{u_a}$

$\Rightarrow \vec{b}_{\vec{a}} = \vec{b} \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

$\Rightarrow \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}$

$\Rightarrow \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \cdot \vec{a}$ bulunur.

Etkinlik – 3.26

$\vec{a}=(2,6)$, $\vec{b}=(4,2)$, $\vec{c}=(-4,2)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ doğrultuları ve yönlerindeki $\overrightarrow{u_a}$, $\overrightarrow{u_b}$ ve $\overrightarrow{u_c}$ birim vektörlerini bulunuz.

b. $\vec{a}$'nün $\vec{b}$ üzerindeki, $\overrightarrow{a_b}$ dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\overrightarrow{a_b}$ vertörlerini koordinat sisteminde gösteriniz.

c. $\vec{b}$'nün $\vec{a}$ üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

d. $\vec{c}$'nün $\vec{a}$ üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

e. $\vec{b}$'nün $\vec{c}$ üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

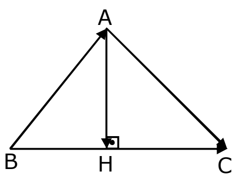
$\vec{b}$, $\vec{c}$ ve $\overrightarrow{b_c}$ vektörlerini koordinat sisteminde gösteriniz.

Etkinlik – 3.27

$\overset{\Delta}{ABC}$ 'inde,

$H\in[BC]$ ve

$AH\perp BC$'dir.

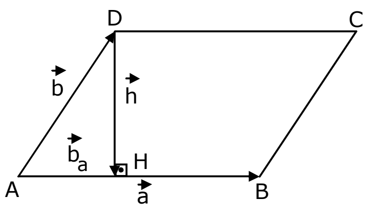


$\overrightarrow{BA}=(3,4)$ ve $\overrightarrow{BC}=(6,3)$ olduğuna göre;

a. $\overrightarrow{BH}$'nü bulunuz.

b. $\overrightarrow{AH}$'nü bulunuz.

Paralelkenarın ve üçgenin alanı



ABCD paralelkenarında, $H\in[AB]$ ve $DH\perp AB$ dir.

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DH}=\vec{h}$ verilmiştir.

a. $\vec{b}$'nün $\vec{a}$ üzerindeki dik izdüşüm vektörünün

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{b_a}=\left(\vec{b}\cdot\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\right)\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ olduğunu biliyorsunuz.

$\vec{h}=-\vec{b}+\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\cdot\vec{a}$ olduğunu gösteriniz.

b. $\|\vec{h}\|=\sqrt{\|\vec{b}\|^2-\dfrac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}{\|\vec{a}\|^2}}$ olduğunu gösteriniz.

c. Bir paralelkenarın alanının ölçüsünün, taban uzunluğu ile bu tabana ait yükseklik uzunluğunun çarpımına eşit olduğunu biliyorsunuz.

$A(ABCD)=|AB|\cdot|DH|$

$\Rightarrow A(ABCD)=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{h}\|$ eşitliğini kullanarak

$A(ABCD)=\sqrt{\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$ (1)

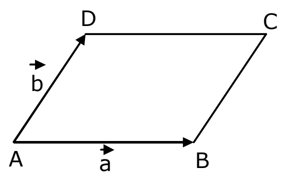
olduğunu gösteriniz.

d. $\vec{a}=(4,2)$ ve

$\vec{b}=(1,3)$ ise

c'de bulduğunuz

formülü kullanarak



ABCD paralelkenarının alanının ölçüsünü bulunuz.

e. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\alpha$ eşitliğini kullanarak,

$A(ABCD)=\sqrt{\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$ (1)

formülünden

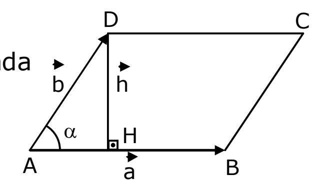
$A(ABCD)=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\alpha$ (2) formülünü elde

ediniz.

ABCD paralelkenarında

$|DH|=|AD|\cdot\sin\alpha$,

$A(ABCD)=|AB|\cdot|DH|$



$\Rightarrow A(ABCD)=|AB|\cdot|AD|\cdot\sin\alpha$

olduğunu 8. sınıf bilgilerinizle bulabilirdiniz.

$\overrightarrow{AB} = \vec{a} \Rightarrow |AB| = \|\vec{a}\|$ ve $\overrightarrow{AD} = \vec{b} \Rightarrow |AD| = \|\vec{b}\|$

diyerek $A(ABCD) = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\alpha$ elde edilebilirdi.

Yine de; yalnız vektör bilgilerimizi kullanarak (2) formülünü elde edebilmeniz size de ilginç gelmedi mi?

f. ABCD paralelkenarında $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (4,-2)$ ve $\overrightarrow{AD} = \vec{b} = (6,2)$ ise paralelkenarın alanını $A(ABCD) = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\alpha$ formülü ile bulunuz.

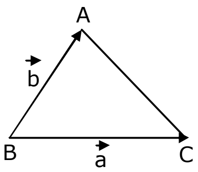
Bunun için, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\alpha$ eşitliğinden $\cos\alpha$ değerini, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ eşitliğinden de $\sin\alpha$ değerini bulmalısınız.

g. Bir paralelkenarda bir köşegen eşit alanlı iki üçgensel bölge ayırır.

Buna göre;

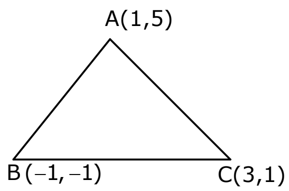
$\vec{a} = (3,-4)$ ve

$\vec{b} = (8,6)$ ise



$\overset{\Delta}{ABC}$ inin alanının ölçüsünü hem (1), hem (2) formülü ile ayrı ayrı hesaplayınız.

h. $A(1,5)$, $B(-1,-1)$ ve $C(3,1)$ olduğuna göre $\overset{\Delta}{ABC}$ inin alanının ölçüsünü hem (1), hem (2) formülü ile ayrı ayrı hesaplayınız.



Alıştırmalar ve Problemler – 3.1

1. $\vec{A} = (-2,3)$, $\vec{B} = (3,-1)$, $\vec{C} = (-4,2)$, $\overrightarrow{CD} = (1,2)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{A} + 2\vec{B} - \vec{C}$ toplamını bulunuz.

b. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{CD}$ ise $\vec{P}$ 'nü bulunuz.

c. $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AR}$ ise $\vec{R}$ 'nü bulunuz.

d. $\overrightarrow{AS} - 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC}$ ise $\vec{S}$ 'nü bulunuz.

2. $\overrightarrow{AB} = (3,-2)$, $\overrightarrow{BC} = (-1,1)$, $\vec{C} = (2,-3)$, $\overrightarrow{CD} = (k,2)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerini bulunuz.

b. $\overrightarrow{AB} = x\vec{A} + y\vec{B}$ eşitliğini sağlayan x ve y kat sayılarını bulunuz.

c. $\vec{C}$ ve $\vec{D}$ doğrusal bağımlı ise k kaçtır?

d. $x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} = 0$ eşitliğini sağlayan en sade x, y, z tam sayılarını bulunuz.

e. $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC}$ eşitliğini sağlayan x ve y kat sayılarını bulunuz.

f. A, B, D noktaları doğrusal ise k kaçtır?

3. $\vec{A} = -3\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$ ve $\vec{B} = 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2}$ vektörleri veriliyor.

a. $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \dfrac{-2}{3}$ olduğuna göre, $\vec{C}$ 'nü bulunuz.

b. $\dfrac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = 2$ olduğuna göre, $\vec{D}$ 'nü bulunuz.

c. C ve D noktalarını AB doğrusu üzerinde gösteriniz.

4. $A(-3,4)$, $B(2,m)$, $C(-1,m-3)$ ve $D(n,m+2)$ noktaları veriliyor.

a. A, B, C doğrusal ise m kaçtır?

b. $[AD]$'nın orta noktası B ise m ve n kaçtır?

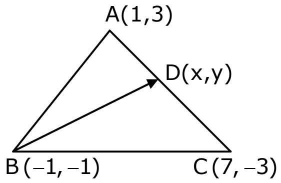
5. ABC üçgeninde

$A(1,3)$, $B(-1,-1)$ ve

$C(7,-3)$ veriliyor.

$|DC| = 2|AD|$ ise

$\overrightarrow{BD}$'nü bulunuz.



6. $H(1,2)$, $m(3,-1)$ ve $k(4,3)$ noktaları bir üçgenin kenarlarının orta noktalarıdır.
Üçgenin köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

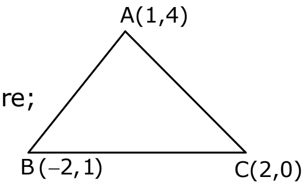
7. $\overset{\Delta}{ABC}$'inde

$A(1,4)$, $B(-2,1)$ ve

$C(2,0)$ olduğuna göre;

$\cos\hat{A}$, $\cos\hat{B}$

ve $\cos\hat{C}$ sayılarını bulunuz.



8. $2\vec{a}+\vec{b}=(1,6)$ ve $3\vec{a}-2\vec{b}=(-9,16)$ olduğuna göre, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerini bulunuz.

9. $\vec{v}=(1,7)$ vektörünün $\vec{a}=(2,-1)$ ve $\vec{b}=(-1,3)$ doğrultularındaki bileşenleri $\overrightarrow{v_a}$ ve $\overrightarrow{v_b}$ olduğuna göre $\overrightarrow{v_a}\cdot\overrightarrow{v_b}$ kaçtır?

10. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ birim vektörler olup aralarındaki açı $45°$ dir.

a. $\vec{A}=2\sqrt{2}\vec{a}-4\vec{b}$ ise $\|\vec{A}\|$ kaçtır?

b. $\vec{B}=2\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b}$ ise $\|\vec{B}\|$ kaçtır?

c. $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

11. $\vec{a}$ vektörü $\vec{u}=(1,-2)$ ile;

$\vec{b}$ vektörü $\vec{v}=(-2,3)$ doğrusal bağımlıdır.

$\vec{a}-2\vec{b}=(-11,+6)$ olduğuna göre, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerini bulunuz.

12. $\vec{a}=(3,-1)$, $\vec{b}=(2,1)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{a}+k\vec{b}$ ile $\vec{c}$ vektörleri doğrusal bağımlı ise k kaçtır?

b. $2\vec{a}+k(\vec{a}+\vec{b})$ ile $t\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ vektörleri doğrusal bağımlı ise k kaçtır?

13. $\|\vec{a}\|=4$, $\|\vec{b}\|=2$ ve $\vec{a}-2\vec{b}=(2\sqrt{3},-2)$ olduğuna göre;

a. $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki açı kaç derecedir?

b. $\vec{a}+\vec{b}$ ile $\vec{a}-\vec{b}$ arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

14. $\|\vec{a}\|=6$, $\|\vec{b}\|=4$ ve $\|\vec{a}+\vec{b}\|=8$ olduğuna göre;

a. $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

b. $\vec{a}+\vec{b}$ ile $\vec{a}-\vec{b}$ arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

c. $\vec{a}-2\vec{b}$ ile $\vec{a}$ arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

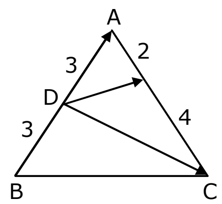
15. $\overset{\Delta}{ABC}$ eşkenardır.

$|AD|=|DB|=3$ birim,

$|AE|=2$ birim ve

$|EC|=4$ birim ise

$(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DA})\cdot\overrightarrow{DC}$ kaçtır?

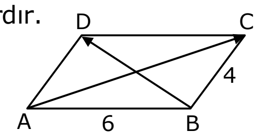


16. ABCD paralelkenardır.

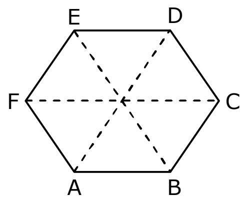
$|AB|=6$ birim ve

$|BC|=4$ birim ise

$\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB})$ kaçtır?



17. ABCDEF bir kenar uzunluğu 6 birim olan bir düzgün altıgendir.



a. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ kaçtır?

b. $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{EF}$ kaçtır?

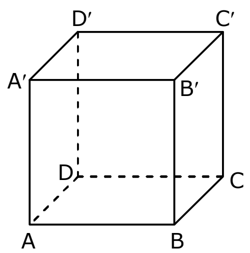
c. $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}\right)$ kaçtır?

d. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ kaçtır?

e. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$ kaçtır?

f. $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}$ kaçtır?

18. ABCDA′B′C′D′ birim küptür.



a. $\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC'}$ kaçtır?

b. $\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC}$ kaçtır?

c. $\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}$ kaçtır?

d. $\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{BD'}$ kaçtır?

e. $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}\right)$ kaçtır?

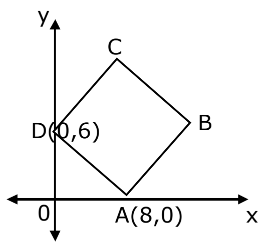
f. $\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{A'C}\right)\cdot\left(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{AC'}\right)$ kaçtır?

19. ABCD karedir.

$A(8,0)$,

$D(0,6)$

olduğuna göre;



a. $\vec{A}\cdot\overrightarrow{BC}$ kaçtır?

b. $\vec{B}\cdot\overrightarrow{CD}$ kaçtır?

c. $\vec{A}\cdot\overrightarrow{BD}$ kaçtır?

d. $\vec{B}\cdot\overrightarrow{AC}$ kaçtır?

e. $\left(\vec{A}+\vec{D}\right)\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$ kaçtır?

f. $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{C}+\vec{D}\right)$ kaçtır?

Bu soruları, üçgenlerin eşliğinden yararlanarak B ve C noktalarının koordinatlarını bulup kolayca cevaplayabilirsiniz. Bir de B ve C'nin koordinatlarını bulmadan yapmaya çalışınız.

20. $\vec{a}=(-6,3)$, $\vec{b}=(4,2)$ ve $\vec{c}=(6,-2)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{b}$'nün $\vec{c}$ üzerindeki $\overrightarrow{b_c}$ dik izdüşüm vektörünü bulunuz. $\vec{b}$, $\vec{c}$ ve $\overrightarrow{b_c}$'nü koordinat sisteminde gösteriniz.

b. $\vec{c}$'nün $\vec{b}$ üzerindeki $\overrightarrow{c_b}$ dik izdüşüm vektörünü bulunuz. $\vec{c}$, $\vec{b}$ ve $\overrightarrow{c_b}$'nü koordinat sisteminde gösteriniz.

c. $\vec{a}$'nün $\vec{b}$ üzerindeki $\overrightarrow{a_b}$ dik izdüşüm vektörünü bulunuz. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\overrightarrow{a_b}$'nü koordinat sisteminde gösteriniz.

21. ABCD paralelkenarında

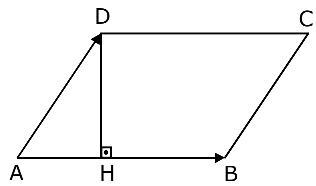
$H\in[AB]$ ve

$DH\perp AB$'dir.

$\overrightarrow{AB}=(10,5)$ ve

$\overrightarrow{AD}=(2,6)$

olduğuna göre;



a. $\overrightarrow{AH}$'nü bulunuz.

b. $\overrightarrow{DH}$'nü bulunuz.

c. a ve b de bulduklarınızı kullanarak A(ABCD) değerini bulunuz.

d. $A(ABCD)=\sqrt{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)^2}$ formülünü kullanarak A(ABCD) değerini bulunuz.

e. $A(ABCD)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\cdot\sin\alpha$ formülünü kullanarak A(ABCD) değerini bulunuz.

22. $A\overset{\Delta}{B}C$ inde

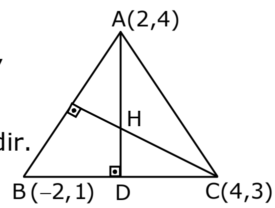
$D\in[BC]$, $E\in[AB]$,

$AD\perp BC$, $CE\perp AB$

ve $AD\cap CE=\{H\}$'dir.

$A(2,4)$,

$B(-2,1)$ ve $C(4,3)$ olduğuna göre;



a. $\overrightarrow{AD}$'nü bulunuz.

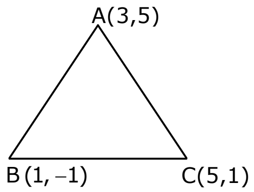
b. $\overrightarrow{CE}$'nü bulunuz.

c. H noktasının koordinatlarını bulunuz.

23. $A\overset{\Delta}{B}C$'inde

$A(3,5)$, $B(1,-1)$

ve $C(5,1)$ dir.



a. $A(A\overset{\Delta}{B}C)=\frac{1}{2}\sqrt{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\cdot\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2-\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}\right)^2}$

formülünden yararlanarak açgenin alanını bulunuz.

b. $A(A\overset{\Delta}{B}C)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$

formülünden yararlanarak üçgenin alanını bulunuz.

c. Köşelerin koordinatlarından yararlanarak üçgenin alanını bulunuz.

24. Aşağıda köşelerinin koordinatları verilen üçgenlerin alanlarını, bu koordinatlardan yararlanarak bulunuz.

a. $A(-1,4)$, $B(-1,-2)$, $C(3,5)$

b. $A(1,5)$, $B(-1,1)$, $C(5,1)$

c. $A(3,5)$, $B(-2,1)$, $C(4,-1)$

d. $A(-3,+6)$, $B(1,2)$, $C(3,4)$

! Taslak üçgenleri koordinat sisteminde çizmenize gerek yoktur. Zihninizdeki koordinat sisteminin x ekseninin defterinizin alt kenarına, y ekseninin de yan kenarına A(2,4) paralel olacağını dikkate almanız yeter.

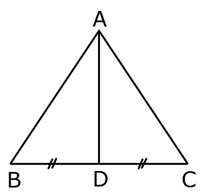
25. $A\overset{\Delta}{B}C$'inde

$|AB|=|AC|$ ve

$|BD|=|DC|$ ise

$AD\perp BC$ olduğunu,

vektör bilginizle ispatlayınız.



26. Bir eşkenar dörtgende köşegenlerin birbirine dik olduğunu, vektör bilginizle ispatlayınız.

27. ABCD paralelkenarında

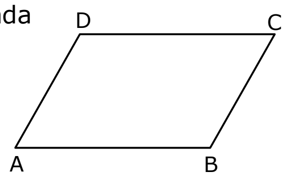
$|AB|=a$, $|BC|=b$,

$|AC|=e$, $|BD|=f$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ve

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$ vektörlerinden yararlanarak,

$e^2+f^2=2a^2+2b^2$ olduğunu gösteriniz.



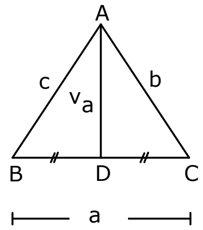
28. $A\overset{\Delta}{B}C$'inde

$[AD]$ kenarortay,

$|AD|=v_a$,

$|BC|=a$, $|AC|=b$,

$|AB|=c$ olsun.



$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ eşitliği ile

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)$ eşitliğinden yararlanarak $v_a{}^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$ bağıntısını bulunuz.

29. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri doğrusal bağımsız ise;

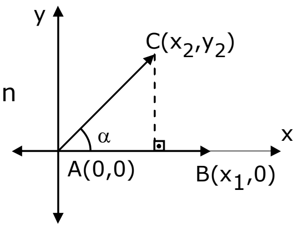
$\vec{C}=\left\|\vec{a}\right\|\cdot\vec{b}+\left\|\vec{b}\right\|\cdot\vec{a}$ vektörünün $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki açıyı ortaladığını gösteriniz.

30. a. $\vec{A}=(1,3)$ vektörü ile $45°$ lik açı yapan birim vektörleri bulunuz.

($\vec{A}$'ne dik bir vektör ile, $\vec{A}$'nün belirttiği açının açıortayından yararlanınız.)

b. $\vec{A}=(1,3)$ vektörü ile $22{,}5°$ lik açı yapan birim vektörleri bulunuz.

31. Düzlemde herhangi iki vektör $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{AC}$ ve bu vektörlerin belirttiği açının ölçüsü α olsun.



a. $\overrightarrow{AB}$'nün taşıyıcısını x ekseni, x eksenine A'da dik olan doğruyu y ekseni olarak alınız. Bu koordinat sisteminde $A(0,0)$ olur. $B(x_1,0)$ ve $C(x_2,y_2)$ olsun. Bu sistemde $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\cos\alpha$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

b. $\overrightarrow{AC}$'nün taşıyıcısını y ekseni, y eksenine A'da dik olan doğruyu x ekseni olarak alınız. Bu koordinat sisteminde de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\cos\alpha$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

32. ABC üçgeninde

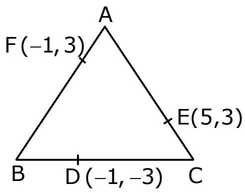
$|BC|=3|BD|$,

$|CA|=3|CE|$,

$|AB|=3|AF|$'dır.

$D(-1,-3)$, $E(5,3)$,

$F(-1,3)$ olduğuna göre;



a. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ve $\overrightarrow{BC}$ vektörlerini bulunuz.

b. A, B, C köşelerinin koordinatlarını bulunuz.