Uzayda ve Düzlemde Doğrular

Etkinlik – 3.1

$u = \{d \mid d,$ uzayda bir doğrudur.$\}$ kümesi üzerinde,

$\beta = \{(d_1, d_2) \mid d_1 // d_2$ veya d_1 çakışık d_2; $d_1, d_2 \in u\}$

bağıntısı veriliyor.

a. β bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

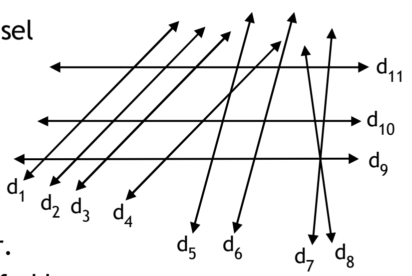
b. β denklik bağıntısının her bir denklik sınıfının elemanlarının ortak özeliğini belirtiniz.

■ Doğruların birbirlerine paralel olmaları ya da birbirleriyle çakışık olmaları aynı **doğrultu**da olmaları demektir.

Buna göre, β bağıntısının her bir denklik sıfının bir **doğrultu** belirttiğini söyleyebiliriz.

Etkinlik – 3.2

Şekildeki düzlemsel doğrular $d_1//d_2//d_3//d_4$, $d_5//d_6$, $d_9//d_{10}//d_{11}$ olarak verilmiştir. Bu 11 doğru kaç farklı doğrultu belirtir?



Yönlü doğru parçaları; vektörler

Etkinlik – 3.3

$Y = \{$uzaydaki yönlü doğru parçaları$\}$

kümesi üzerinde,

$\beta = \{(\overline{AB}, \overline{CD}) \mid \overline{AB}$ ile $\overline{CD}$'nin doğrultuları ve yönleri aynı, uzunlukları eşittir.$\}$

bağıntısı veriliyor.

a. β'nın bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

■ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \in \beta$ ise $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ veya $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ yazılır ve bu "$\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası, $\overrightarrow{CD}$ yönlü doğru parçasına eştir." diye okunur.

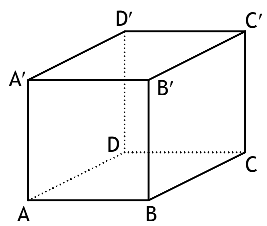
β bağıntısının denklik sınıflarından her biri bir vektör belirtir. Her bir vektör, denklik sınıfının herhangi bir elemanı ile gösterilebilir. Denklik sınıflarını belirtmek için özel semboller de kullanılabilir. Örneğin;

$\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \ldots, \overrightarrow{PR}, \ldots\}$ denklik sınıfı $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}, \ldots$ veya $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{PR}, \ldots$ sembollerinden biri ile gösterilebilir.

b. Vektörlerin V kümesi ile yönlü doğru parçalarının Y kümesi arasında nasıl bir bağıntı vardır?

Etkinlik 3.4

$ABCD\,A'B'C'D'$ şekli bir dökdörtgenler prizmasıdır.



Bu prizmanın köşeleri

a. kaç farklı doğru belirtir?

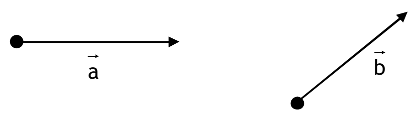
b. kaç farklı doğrultu belirtir?

c. kaç farklı, yönlü doğru parçası belirtebilir?

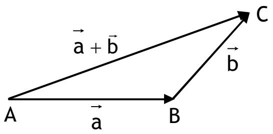
d. kaç farklı vektör belirtebilir?

Vektörler kümesinde toplama; vektörleri skalerle çarpma

■



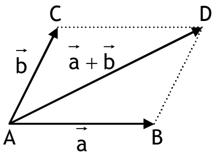
$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin toplamı $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ve $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ olmak üzere;



$\vec a+\vec b=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ olarak tanımlanır.

$\vec a+\vec b$ toplamı $\vec a$ ve $\vec b$ vektörlerinin başlangıç noktaları aynı alınarak da bulunabilir:

$\overrightarrow{AB}=\vec a$ ve $\overrightarrow{AC}=\vec b$ ise ABCD paralelkenarı çizilir.



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}=\vec b$ olacağından

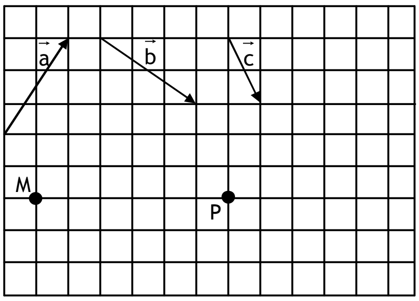
$\vec a+\vec b=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \vec a+\vec b=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow \vec a+\vec b=\overrightarrow{AD}$ olur.

Etkinlik – 3.5

Aşağıdaki kareli kısımda $\vec a$, $\vec b$ ve $\vec c$ vektörleri ile M ve P noktaları verilmiştir.



Aşağıdaki eşitliklerde belirtilen X, X′ ,Y ,Y′ noktalarını kareli kısımda gösteriniz.

a. $\vec a+\vec b=\overrightarrow{MX}$

$\vec b+\vec a=\overrightarrow{MX'}$

b. $(\vec a+\vec b)+\vec c=\overrightarrow{PY}$

$\vec a+(\vec b+\vec c)=\overrightarrow{PY'}$

c. Buna göre;

$\vec a+\vec b=\vec b+\vec a$ (1)

$(\vec a+\vec b)+\vec c=\vec a+(\vec b+\vec c)$ (2) diyebilir misiniz?

(1) ve (2) ile belirtilen özelikleri adlandırınız.

d. $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}=\ldots=\vec 0$ olarak tanımlanır.

$\overrightarrow{AA}$ yönlü doğru parçasının uzunluğu, doğrultusu ve yönü için neler söyleyebilirsiniz?

■ Herhangi bir $\overrightarrow{AB}$ vektörünün uzunluğu, $|\overrightarrow{AB}|$ biçiminde gösterilir.

Uzunluğu 1 birim olan vektöre **birim vektör** denir.

Bir $\vec a$ vektörü yönündeki birim vektör $\overrightarrow{u_a}$ ile gösterilirse,

$$\overrightarrow{u_a}=\frac{1}{|\vec a|}\vec a \text{ ve}$$

$$\vec a=|\vec a|\cdot\overrightarrow{u_a} \text{ olur.}$$

Etkinlik –3.6

a. $\overrightarrow{AB}=\vec v$ olmak üzere,

$\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}$ toplamlarından yararlanarak $\vec 0+\vec v=\vec v+\vec 0=\vec v$ (1) eşitliğini elde ediniz.

(1) eşitliği ile tanıtılan elemanın adını söyleyiniz.

b. İki vektörün farkı,

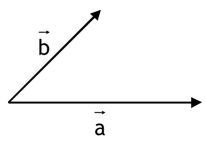
$\vec a-\vec b=\vec c \Leftrightarrow \vec a=\vec b+\vec c$ biçiminde tanımlanır.

Bu tanımdan ve $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ toplamından yararlanarak $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BA}$ vektörlerinin birbirlerinin toplama işlemine göre tersleri olduğunu ve $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ olduğunu gösteriniz.

Etkinlik – 3.7

Şekildeki $\vec a$ ve $\vec b$ vektörlerinin $\vec a-\vec b$ farkı,

$\vec a-\vec b=\vec a+(-\vec b)$



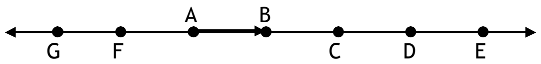
eşitliğinden yararlanılarak, $\vec a$ ’nün ucuna $-\vec b$ eklenip bulunabilir.

Siz, $\vec a-\vec b=\vec x$

$\Rightarrow \vec a=\vec b+\vec x$

eşitliğine dayanarak $\vec a-\vec b$ vektörünü şekil üzerinde hemen gösteriniz.

Etkinlik – 3.8



Şekildeki noktalar doğrusaldır ve eşit aralıklıdır.

$\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ eşitliğinde $k \in R$'ye verilecek değerler P noktasının doğru üzerindeki yerini belirler. P noktaları ya şekilde verilen noktalarla çakışır ya da ardışık noktaların belirteceği açık doğru parçaları üzerinde olur.

Buna göre; k'nın aşağıda verilen değerleri için P noktalarının yerlerini belirtiniz.

1. $0 < k < 1$ ise; $P \in]AB[$ **5.** $k = 0$ ise; P...

2. $k = 1$ ise; $P = B$ **6.** $-1 < k < 0$ ise; P...

3. $2 < k < 3$ ise; P... **7.** $k = -1$ ise; P...

4. $k = 4$ ise; P... **8.** $-2 < k < -1$ ise; P...

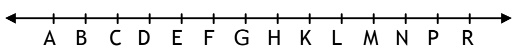
■ Bir vektörün bir gerçek sayı ile çarpılması işlemi aşağıdaki özelikleri taşır.

$\forall m, n \in R$ ve $\forall \vec{a}, \vec{b} \in v$ için;

1. $m \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$
2. $(m + n) \cdot \vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$
3. $m \cdot (n \cdot \vec{a}) = (m \cdot n) \cdot \vec{a}$
4. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Etkinlik – 3.9

Şekilde verilen noktalar doğrusaldır ve eşit aralıklıdır.



a. Aşağıdaki eşitliklerde belirtilen $X_1, X_2, \ldots$ noktalarının şekildeki hangi noktalara karşılık geldiğini bulunuz.

1. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GX_1} = \overrightarrow{X_2R}$

2. $\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{BX_3} = \overrightarrow{X_4P}$

3. $2\overrightarrow{KP} + 3\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{FX_5} = \overrightarrow{X_6C}$

4. $2\overrightarrow{BF} - 3\overrightarrow{EH} - \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{KX_7} = \overrightarrow{X_8D}$

b. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan m kat sayılarını bulunuz.

1. $\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{PH} = m \cdot \overrightarrow{KN}$

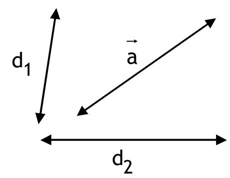
2. $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{EA} = m \cdot \overrightarrow{FD}$

3. $3\overrightarrow{MF} + 2\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KF} = m \cdot \overrightarrow{PK}$

4. $4\overrightarrow{EM} + 3\overrightarrow{KF} - 2\overrightarrow{FN} + \overrightarrow{ND} = m \cdot \overrightarrow{CE}$

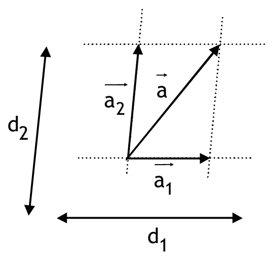
Bir vektörü verilen doğrultularda bileşenlerine ayırma

■ $\vec{a}$'nü d_1 ve d_2 doğrultularında bileşenlerine ayıralım:



I. yol

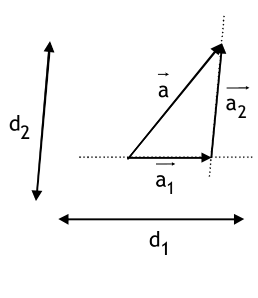
$\vec{a}$'nün başlangıç ve uç noktalarından d_1 ve d_2 doğrularına paraleller çizilir:



$\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2}$

II. yol

Doğrulardan birine $\vec{a}$'nün başlangıç noktasından diğerine uç noktasından paralel çizilir.

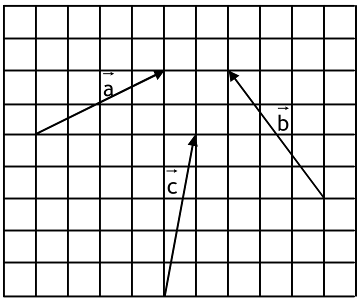


$\vec{a_1} // d_1$, $\vec{a_2} // d_2$

$\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2}$

Etkinlik – 3.10

Aşağıdaki kareli kısımda $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektörleri verilmiştir.



a. Vektörleri yatay ve düşey bileşenlerine ayırınız.

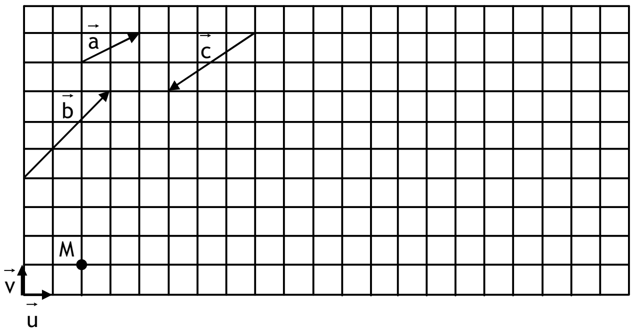
b. Karelerin kenar uzunlukları 1’er birim olduğuna göre, bileşenlerin uzunluklarını belirtiniz.

Vektörlerin, bileşenlerine ayrılarak toplanması

Etkinlik 3.11

Aşağıdaki kareli kısımda $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektörleri ile M noktası verilmiştir. Karelerin kenar uzunlukları d1’er birimdir.

Yatay birim vektör $\vec{u}$, düşey birim vektör $\vec{v}$ dir.



a. Vektörleri yatay ve düşey bileşenlerine ayırınız. Yatay bileşenleri $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{c_1}$ ile; düşey bileşenleri $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{b_2}$, $\overrightarrow{c_2}$ ile gösteriniz.

b. $\overrightarrow{MX} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{c_1}$ ve $\overrightarrow{MY} = \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{c_2}$ olduğuna göre, X ve Y noktlarını şekilde gösteriniz.

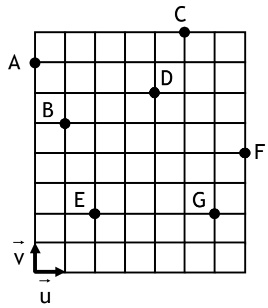
c. $\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MY} = \overrightarrow{MN}$ olduğuna göre, N noktasını şekilde gösteriniz.

d. Vektörleri çokgen yöntemi ile de toplayarak $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{MN}$ olduğunu gösteriniz.

Etkinlik – 3.12

Aşağıdaki kareli kısımda A, B, C, D, E, F, G noktaları verilmiştir. Karelerin kenar uzunlukları 1’er birimdir.

Yatay doğrultudaki birim vektör $\vec{u}$, düşey dğrultudaki birim vektör $\vec{v}$ dir.



Buna göre, aşağıdaki eşitliklerde belirtilen X, Y, Z, T noktaları şekildeki hangi noktalara karşılık gelirler?

1. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AX}$

2. $\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{BY}$

3. $\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AZ}$

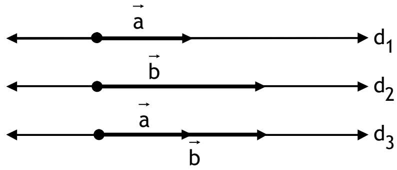
4. $2\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BT}$

Vektörlerin doğrusal bağımlılığı

Etkinlik – 3.13

Doğrultuları aynı olan iki vektörden herhangi biri uygun bir gerçek sayı ile çarpılarak, diğer vektöre eşit bir vektör elde edilebilir. Başka bir deyişle, doğrultuları aynı olan iki vektörden her biri diğeri türünden yazılabilir.

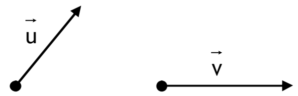
a.



$d_1//d_2//d_3$

$\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ eşitliğini sağlayan k∈R sayısını $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin uzunlukları türünden belirtiniz.

b.



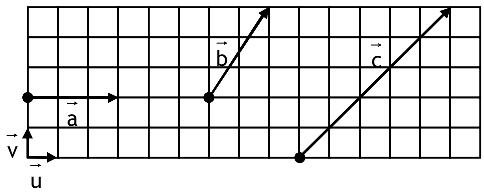
Aynı doğrultuda olmayan $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri birbiri türünden yazılabilir mi? Neden?

■ Yukarıda belirtilen $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri **doğrusal bağımlıdır**; $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri **doğrusal bağımsızdır**.

Genel olarak;

$x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c}+\ldots=\vec{0}$ eşitliğini sağlayan, en az biri sıfırdan farklı m, n, p, … gerçel sayıları bulunabiliyorsa $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},\ldots$ vektörleri **doğrusal bağımlıdır**; bu eşitlik yalnız $x=y=z=\ldots=0$ durumunda sağlanıyorsa $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},\ldots$ **doğrusal bağımsızdır**, denir.

c. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri şekildeki gibi verilmiş olsun.



$\vec{c}$ vektörünü $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri doğrultularında çizerek bileşenlerine ayırınız.

$\vec{a}$ doğrultusundaki bileşen $x\vec{a}$, $\vec{b}$ doğrultusundaki bileşen $y\vec{b}$ ise

$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ eşitliği,

buradan da

$x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c}=0$ (1) eşitliği yazılabilir.

Öyleyse; $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri **doğrusal bağımlıdır**.

Düzlemde farklı doğrultularda alınacak her vektör üçlüsü için (1) türünden bağıntılar yazılabileceğine örnekler veriniz.

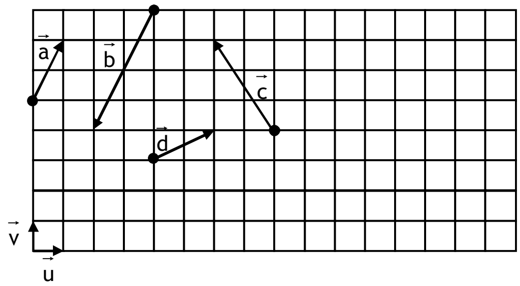
Buna göre;

Düzlemde ikiden fazla sayıda vektör doğrusal bağımsız olamaz.

Etkinlik – 3.14

Aşağıdaki kareli kısımda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ vektörleri verilmiştir. Karelerin kenar uzunlukları 1'er birimdir.

Yatay doğrultudaki birim vektör $\vec{u}$, düşey doğrultudaki birim vektör $\vec{v}$ dir.



a. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ vektörlerini $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ birim vektörleri türünden ifade ediniz.

b. $m_1\vec{a}+n_1\vec{b}=0$ eşitliğini sağlayan $m_1, n_1 \in R$ sayıları bulunuz.

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ doğrusal bağımlı mıdır?

$\vec{a}$ 'nü $\vec{b}$ türünden ifade ediniz.

c. $m_2\vec{c}+n_2\vec{d}=0$ eşitliğini sağlayan $m_2, n_2 \in R$ sayılarını bulunuz.

$\vec{c}$ ve $\vec{d}$ doğrusal bağımlı mıdır?

d. $m_3\vec{a}+n_3\vec{b}+p_3\vec{c}=0$ eşitliğini sağlayan $m_3, n_3, p_3 \in R$ sayılarını bulunuz.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri doğrusal bağımlı mıdır?

$\vec{a}$ vektörünü $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ türünden ifade edebilir misiniz?

$\vec{c}$ vektörünü $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ türünden ifade edebilir misiniz?

e. $m_4\vec{b}+n_4\vec{c}+p_4\vec{d}=0$ eşitliğini sağlayan $m_4, n_4, p_4 \in R$ sayılarını bulunuz.

$\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektörlerinden her birini diğerleri türünden ifade edebilir misiniz?

f. $m_5\vec{a}+n_5\vec{b}+p_5\vec{c}+r_5 d=0$ eşitliğini sağlayan $m_5, n_5, p_5, r_5 \in R$ sayılarını bulunuz.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ vektörlerinden her birini diğerleri türünden ifade edebilir misiniz?

■ Bir vektörler kümesinin doğrusal bağımlı olması, bu kümenin elemanlarından her birinin diğerleri türünden ifade edilebilmesini gerektirmez.

Örneğin; Etkinlik-2.14'te $2\vec{a}+\vec{b}+0\cdot\vec{c}=0$ eşitliği geçerli olup $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ kümesi doğrusal bağımlıdır. Bu eşitliğe dayanılarak $\vec{a}$ vektörü $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ türünden; $\vec{b}$ vektörü $\vec{a}$ ve $\vec{c}$ türünden ifade edilebilir. Ancak, kat sayısı sıfır olan $\vec{c}$ vektörü diğerleri türünden ifade edilemez.

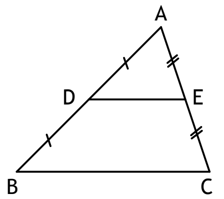
Genel olarak; **düzlemde her vektör, doğrusal bağımsız bir vektör çifti türünden ifade edilebilir**.

Etkinlik – 3.15

$\overset{\Delta}{ABC}$'inde $[AB]$ ve $[AC]$'nin orta noktaları D ve E'dir.

DE // BC ve $|DE|=\frac{1}{2}|BC|$

olduğunu gösteriniz.

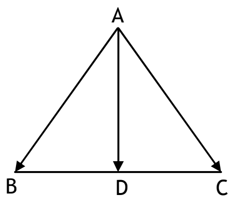


($\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ olduğunu göstermek yeter.)

Etkinlik – 3.16

$\overset{\Delta}{ABC}$'inde $\frac{|BD|}{|CD|}=\frac{m}{n}$ ise

$\overrightarrow{AD}$ vektörü $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ türünden ifade edilebilir.



Şöyle ki;

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{m}{m+n}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\left(1-\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{n\cdot\overrightarrow{AB}+m\cdot\overrightarrow{AC}}{m+n}$$

elde edilir.

Siz, elde ettiğimiz bu sonucu kullanmadan $\overset{\Delta}{ABC}$'inde $|BD|=|DC|$ ise $\overrightarrow{AD}$ vektörünü $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ türünden ifade ediniz.

Etkinlik – 3.17

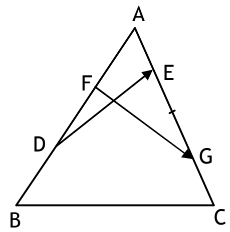
$\overset{\Delta}{ABC}$'inde;

$|BD|=|DF|=|FA|$ ve

$2|AE|=|EG|=2|GC|$ ise

$\overrightarrow{DE}$ vektörü

$\overrightarrow{BA}$ ve $\overrightarrow{BC}$ türünden ifade edilebilir.



Şöyle ki;

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\left(-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$$

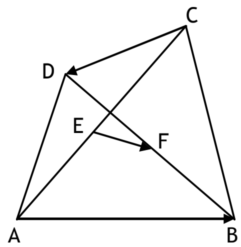
$$\Rightarrow \overrightarrow{DE}=\frac{5}{12}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

Siz de, $\overrightarrow{FG}$ vektörünü $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ türünden ifade ediniz.

Etkinlik – 3.18

ABCD dörtgeninde;

$|AE|=|EC|$ ve $|BF|=|FD|$'dir.



a. $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$ (1)

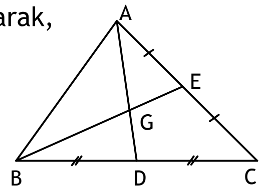
$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}$ (2)

eşitliklerini kullanarak $\overrightarrow{EF}$ vektörünü $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ türünden ifade ediniz.

b. $\overrightarrow{EF}$ vektörünü $\overrightarrow{AD}$ ve $\overrightarrow{BC}$ türünden ifade ediniz.

Etkinlik – 3.19

Yalnız vektör bilgisi kullanılarak, bir üçgende kenarortayların hangi oranda kesiştiği bulunabilir.



Şöyle ki;

$[AD]$ ve $[BE]$ kenarortay, $AD \cap BE = \{G\}$ olsun.

$\overrightarrow{GE} = m \cdot \overrightarrow{BE}$ ve $\overrightarrow{GD} = n \cdot \overrightarrow{AD}$ diyelim.

$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}$ eşitliğindeki tüm vektörleri doğrusal bağımsız herhangi iki vektör, örneğin, $\overrightarrow{AC}$ ve $\overrightarrow{BC}$ türünden yazabiliriz.

$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}$$

$$\Rightarrow (1-m)\cdot\overrightarrow{BE} + n\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow (1-m)\left(\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) + n\left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m-1}{2} + n\right)\overrightarrow{AC} + \left(1 - m - \frac{n}{2}\right)\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{m-1}{2} + n = 0 \text{ ve } 1 - m - \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m = n = \frac{1}{3}$$ bulunur. Siz de;

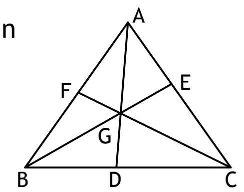
$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AE}$ eşitliğindeki tüm vektörleri $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ türünden yazarak aynı problemi çözünüz.

Etkinlik – 3.20

$\overset{\Delta}{ABC}$ 'inde; G, kenarortayların kesim noktası ise,

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$

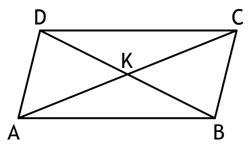
olduğunu gösteriniz.



(Etkinlik-2.16 ve Etkinlik-2.19'dan elde ettiğiniz bilgilerden yararlanınız.)

Etkinlik – 3.21

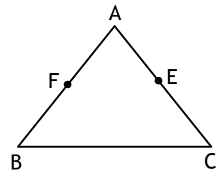
Bir paralelkenarda köşegenlerin kesişme oranını bulunuz.



($\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KB} = y\overrightarrow{DB}$ olsun. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{AB}$ eşitliğini kullanabilirsiniz.)

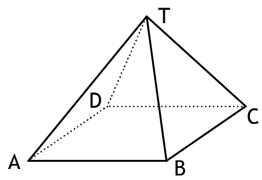
Alıştırmalar ve Problemler – 3.1

1. $\overset{\Delta}{ABC}$ 'inde;
D, E, F kenarların orta noktalarıdır.
A, B, C, D, E, F noktaları ikişer ikişer;



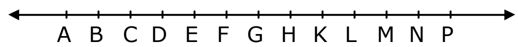
a. kaç farklı doğru belirtir?
b. kaç farklı doğrultu belirtir?
c. kaç farklı yönlü doğru parçası belirtebilir?
d. kaç farklı vektör belirtebilir?

2. T-ABCD şekli dik kare piramittir. Piramitin köşeleri ikişer ikişer;



a. kaç farklı doğru belirtir?
b. kaç farklı doğrultu belirtir?
c. kaç farklı yönlü doğru parçası belirtebilir?
d. kaç farklı vektör belirtebilir?

3. Şekilde verilen noktalar doğrusaldır ve eşit aralıklıdır.



a. Aşağıdaki eşitliklerde belirtilen X_1, X_2,... noktalarının şekildeki hangi noktalara karşılık geldiğini bulunuz.

I. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{CX_1} = \overrightarrow{X_2M}$

II. $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{KX_3} = \overrightarrow{X_4F}$

III. $\overrightarrow{DK} + 2\overrightarrow{KF} - 3\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{DX_5} = \overrightarrow{X_6K}$

IV. $4\overrightarrow{FH} - 3\overrightarrow{EH} - 2\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{HX_7} = \overrightarrow{X_8E}$

b. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan **m** kat sayılarını bulunuz.

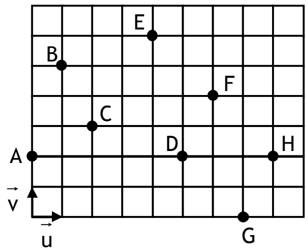
I. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{MH} = m \cdot \overrightarrow{DG}$

II. $3\overrightarrow{EK} - 4\overrightarrow{GK} + 5\overrightarrow{MK} = m \cdot \overrightarrow{BD}$

III. $2\overrightarrow{BF} + 3\overrightarrow{FK} + 4\overrightarrow{KE} = m \cdot \overrightarrow{KM}$

IV. $2\overrightarrow{DK} - 3\overrightarrow{HM} - 2\overrightarrow{FB} = m \cdot \overrightarrow{DA}$

4. Şekildeki ardışık yatay ve düşey doğrular 1'er birim aralıklıdır. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ birim vektörlerdir.



Buna göre;

a. Aşağıdaki eşitliklerle belirtilen X, Y, Z, T noktaları şekildeki hangi noktalara karşılık gelirler?

I. $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{CX}$

II. $\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{YF}$

III. $\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{DZ}$

IV. $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DE}+2\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{FT}$

b. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan x ve y kat sayılarını bulunuz.

I. $\overrightarrow{AB}=x\cdot\overrightarrow{DC}+y\cdot\overrightarrow{EF}$

II. $\overrightarrow{EG}=x\cdot\overrightarrow{AC}+y\cdot\overrightarrow{DF}$

III. $\overrightarrow{DF}=x\cdot\overrightarrow{BE}+y\cdot\overrightarrow{GH}$

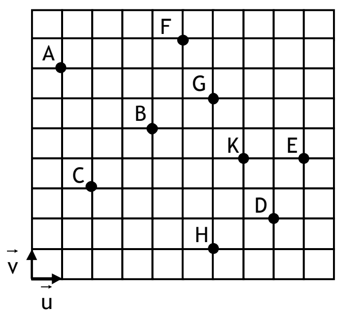
IV. $\overrightarrow{AC}=x\cdot\overrightarrow{FD}+y\cdot\overrightarrow{HG}$

V. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{GE}=x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{CD}$

VI. $2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=x\cdot\overrightarrow{CF}+y\cdot\overrightarrow{FG}$

5. Şekildeki ardışık yatay ve düşey doğrular 1'er birim aralıklıdır. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ birim vektörlerdir.

Buna göre; aşağıdaki eşitlikleri sağlayan en sade x, y, z, t $\in\mathbb{Z}$ sayılarını bulunuz.



Her maddede vektörlerin doğrusal bağımlı olup olmadığını; birbirleri türünden ifade edilip edilemeyeceğini belirtiniz.

a. $x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{BC}=0$

b. $x\cdot\overrightarrow{BG}+y\cdot\overrightarrow{HD}=0$

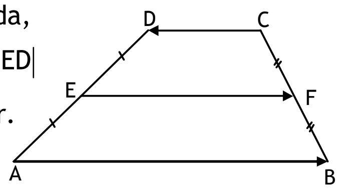
c. $x\cdot\overrightarrow{AA}+y\cdot\overrightarrow{DE}=0$

d. $x\cdot\overrightarrow{DK}+y\cdot\overrightarrow{FK}+z\cdot\overrightarrow{DE}=0$

e. $x\cdot\overrightarrow{BK}+y\cdot\overrightarrow{KG}+z\cdot\overrightarrow{DG}+t\cdot\overrightarrow{DE}=0$

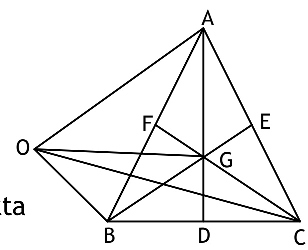
f. $x\cdot\overrightarrow{BC}+y\cdot\overrightarrow{HK}+z\cdot\overrightarrow{KD}=0$

6. ABCD yamuğunda, AB//CD, $|AE|=|ED|$ ve $|BF|=|FC|$ dir. $\overrightarrow{EF}$ vektörünü $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ türünden ifade ediniz.



7. A, B, C, D uzayın dört noktasıdır. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ise $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ olduğunu gösteriniz.

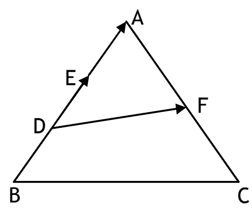
8. $\overset{\Delta}{ABC}$'inde, G kenaroytayların kesim noktasıdır. D, E, F kenarların orta noktaları ve O herhangi bir nokta olduğuna göre;



a. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\cdot\overrightarrow{OG}$ olduğunu gösteriniz.

b. $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ olduğunu gösteriniz.

9. $\overset{\Delta}{ABC}$'inde $|BD|=|DE|=|EA|$ ve $|AF|=|FC|$ dir.



a. $\overrightarrow{DF}$ vektörünü $\overrightarrow{BA}$ ve $\overrightarrow{BC}$ türünden ifade ediniz.

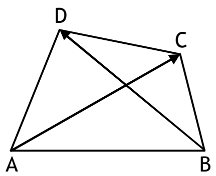
b. $\overrightarrow{AC}$ vektörünü $\overrightarrow{DE}$ ve $\overrightarrow{DF}$ türünden ifade ediniz.

10. A, B, C, D uzayın dört farklı noktasıdır.

$\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$ (1), $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{BD}$ (2) ve

ve $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{BC}$ (3) olduğuna göre m kaçtır?

11. A, B, C, D uzayın dört farklı noktasıdır.

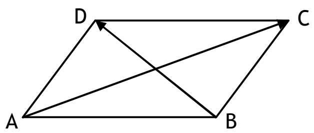


a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ toplamını $\overrightarrow{AD}$ ve $\overrightarrow{BC}$ türünden İfade ediniz.

b. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ toplamını $\overrightarrow{AD}$ ve $\overrightarrow{BC}$ türünden ifade ediniz.

c. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ farkını $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ türünden ifade ediniz.

12. ABCD paralelkenardır.



a. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ toplamını $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BC}$ türünden ifade ediniz.

b. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ farkını $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BC}$ türünden ifade ediniz.

13. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri doğrusal bağımsızdır. Buna göre, aşağıdaki vektör kümelerinin hangileri doğrusal bağımlıdır?

a. $\{\vec{0}, \vec{u}\}$ **b.** $\{\vec{0}, \vec{u}, \vec{v}\}$

c. $\{\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}\}$ **d.** $\{\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}\}$

e. $\{\vec{u}, 2\vec{u}\}$ **f.** $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$

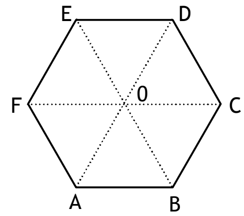
14. A, B, C, … noktaları uzayın farklı noktalarıdır.

Buna göre, aşağıdaki toplamları en sade biçimde ifade ediniz.

a. $\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD}$

b. $2\overrightarrow{TM} - \overrightarrow{PM} + 2\overrightarrow{NT} - \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{TK} + \overrightarrow{MN}$

15. ABCDEF düzgün altıgendir.



a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ toplamını bulunuz.

b. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AD}$ ise x kaçtır?

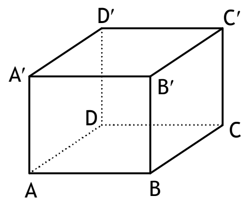
b. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC}$ ise x ve y kaçtır?

16. ABCDA′B′C′D′ birim küptür.

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$

ve $\overrightarrow{AA} = \vec{c}$

olduğuna göre;



a. $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{A'C}$ toplamını $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ türünden ifade ediniz.

b. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{B'D'}$ toplamını $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ türünden ifade ediniz.

c. $\vec{v} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD'} + \overrightarrow{DA'}$ ise $|\vec{v}|$ kaçtır?

17. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ doğrusal bağımsız vektörlerdir.

$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$

$\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$

$\vec{c} = 2\vec{u} + \vec{v}$ olduğuna göre;

a. $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$ ise x ve y kaçtır?

b. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ise x ve y kaçtır?

c. $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$ eşitliğini sağlayan en sade x, y, z tam sayılarını bulunuz.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ doğrusal bağımlı mıdır?

d. $x\vec{a} + y\vec{b} = 0$ eşitliğini sağlayan, en az biri sıfırdan farklı x ve y gerçek sayılarını bulabiliyor musunuz?

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ doğrusal bağımlı mıdır?

e. Aşağıdaki vektör kümelerinden hangileri doğrusal bağımlıdır?

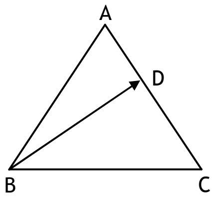
I. $\{\vec{a},\vec{c}\}$ **II.** $\{\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\}$

III. $\{\vec{a}-\vec{b},2\vec{b}-\vec{c}\}$ **IV.** $\{\vec{a},\vec{b},\vec{b}-\vec{c}\}$

V. $\{\vec{a}+2\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\}$ **VI.** $\{\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{c},\vec{b}+\vec{c}\}$

18. $\overset{\Delta}{ABC}$ 'inde

$D \in [AC]$ dir.



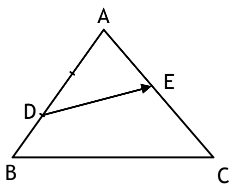
a. $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{BC}$ ise x kaçtır?

b. $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ise $\overrightarrow{BD}$ vektörünü $\overrightarrow{BA}$ ve $\overrightarrow{BC}$ türünden ifade ediniz.

19. $\overset{\Delta}{ABC}$ 'inde,

$|BA| = 3|BD|$ ve

$E \in [AC]$ dir.



a. $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{BC}$ ise x kaçtır?

b. $\overrightarrow{AE} = y \cdot \overrightarrow{AC}$ ise y kaçtır?

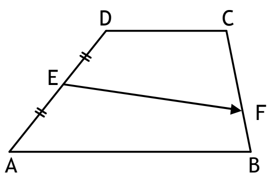
20. ABCD yamuğunda

AB//CD,

$|AB| = 3|DC|$,

$|AE| = |ED|$ ve

$|BC| = 3|BF|$ dir.



a. $\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC}$ ise, x ve y kaçtır?

b. $\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ ise, x ve y kaçtır?

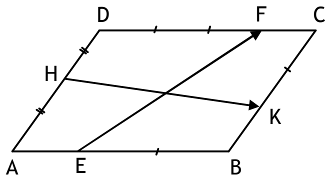
21. ABCD paralelkenarında

$|AB| = 3|AE|$,

$|BC| = 3|BK|$,

$|DC| = 4|FC|$ ve

$|AH| = |HD|$ dir.



a. $\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC}$ ise, x ve y kaçtır?

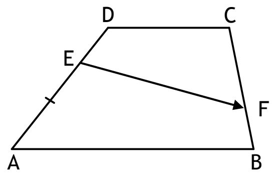
b. $\overrightarrow{HK} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC}$ ise, x ve y kaçtır?

22. ABCD yamuğunda

AB//CD,

$|AD| = 3|ED|$ ve

$|AB| = 2|DC|$ dir.

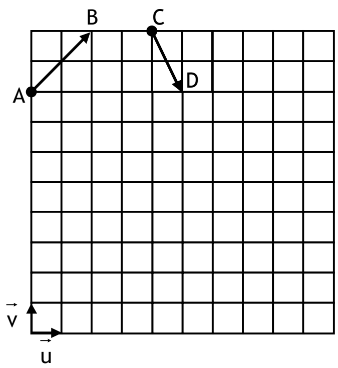


a. $\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC}$ ise x kaçtır?

b. $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$ ise, x kaçtır?

($\overrightarrow{EF}$ vektörünü; hangi vektörler türünden yazılmışsa o vektörlerin doğrultusunda bileşenlerine ayırarak düşününüz.)

23. Yandaki birim kareli kısımda $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ vektörleri verilmiştir.



a. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}+2\vec{b}$ ve $\overrightarrow{CD} = \vec{a}+\vec{b}$ ise, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerini çizimle bulunuz.

b. $\overrightarrow{AB} = 2\vec{d}-\vec{c}$ ve $\overrightarrow{CD} = \vec{c}-\vec{d}$ ise $\vec{c}$ ve $\vec{d}$ vektörlerini çizimle bulunuz.

c. Yatay doğrultudaki birim vektörü $\vec{u}$ ile, düşey doğrultudaki birim vektörü $\vec{v}$ ile gösteriniz. $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ vektörlerini $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ türünden ifade ediniz.

(a) ve (b)'deki soruların çözümünü cebirsel yolla yapınız.

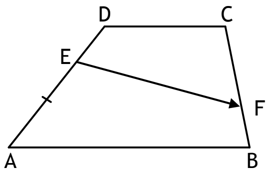
24. $\overset{\Delta}{ABC}$ ’inde;

$|BC| = 3|DC|$ ve

$|AC| = 2|AE|$ dir.

$\overrightarrow{BK} = x \cdot \overrightarrow{BE}$ ve

$\overrightarrow{KD} = y \cdot \overrightarrow{AD}$ ise;



a. $\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{BD}$ eşitliğini kullanarak x ve y kat sayılarını bulunuz.

b. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{AB}$ eşitliğini kullanarak x ve y’yi bulunuz.

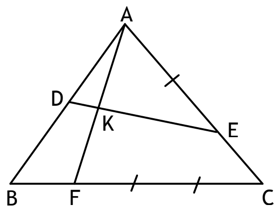
c. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{AE}$ eşitliğini kullanarak x ve y’yi bulunuz.

25. $\overset{\Delta}{ABC}$ ’inde;

$|BC| = 4|BF|$,

$|AC| = 3|EC|$ ve

$|AD| = |BD|$ dir.



a. $\dfrac{|KA|}{|KF|}$ oranını bulunuz.

b. $\dfrac{|KD|}{|KE|}$ oranını bulunuz.

($\overrightarrow{AK} = x \cdot \overrightarrow{AF}$ ve $\overrightarrow{DK} = y \cdot \overrightarrow{DE}$ deyiniz.

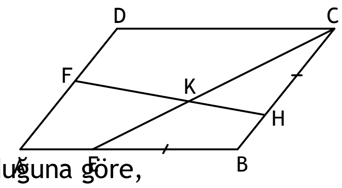
$\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AD}$ eşitliğindeki tüm vektörleri, örneğin $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BC}$ türünden yazarak x ve y’yi bulunuz.)

ABCD paralelkenarında,

$|AB| = 3|AE|$,

$|BC| = 3|BH|$ ve

$|AF| = |FD|$ dir.



$CE \cap FH = \{K\}$ olduğuna göre,

a. $\dfrac{|CK|}{|KE|}$ oranını bulunuz.

b. $\dfrac{|FK|}{|KH|}$ oranını bulunuz.

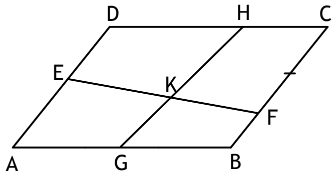
26. ABCD paralelkenarında

$|AG| = |GB|$,

$|AE| = |ED|$,

$|BC| = 3|BF|$,

$|DC| = 3|HC|$ dir.



$\overrightarrow{EK} = x\overrightarrow{EF}$ ve $\overrightarrow{GK} = y\overrightarrow{GH}$ ise x ve y kat sayılarını bulunuz.

($\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AE}$ eşitliğindeki vektörleri $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BC}$ türünden ifade ediniz.)