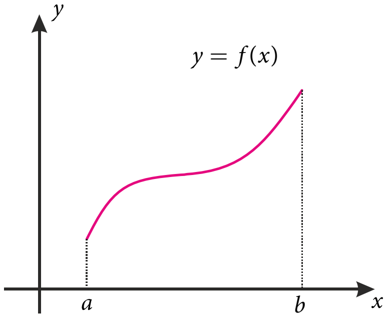
Barış DEMİR 18/05/2014

Türev ve İntegral İlişkisinin Kurulması (Lise Seviyesinde)

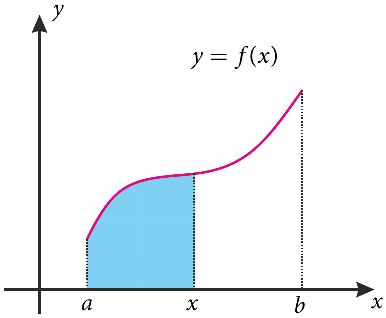
(İntegral konusuna Reimann toplamı ve belirli integral ile başlanması durumunda belirsiz integrale geçişte gerekli olan bir çalışmadır. Belirsiz integralle başlanması durumunda da verilmesinin kavramlar arasındaki ilişkiyi anlamlandırması açısından faydası olacaktır.)

Şekil 1 deki gibi $I=[a,b]$ nda sürekli ve pozitif tanımlı bir $y=f(x)$ fonksiyonu verilsin.



Şekil 1

a ile *b* arasında bir *x* değeri alalım ve şekil 2 deki gibi *a* dan *x* e kadar fonksiyon eğrisi ile *x* ekseni arasındaki alanı gösterelim.



Şekil 2

Biliyoruz ki bu alan

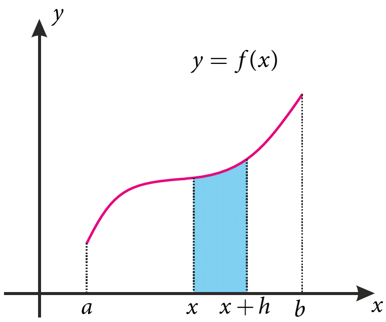
$$\int_a^x f(x)dx$$

integraline eşittir. Seçilen *x* e göre, alan değiştiği için, bu alanı *x* e bağlı bir fonksiyon olarak

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx$$

biçiminde yazabiliriz. *($x=a$ seçilirse, $F(a)=0$ olacağına dikkat edin.)*

Şimdi $h>0$ olacak biçimde şekil 3 deki gibi $[x,x+h]$ aralığının belirttiği bölgeye bakalım.



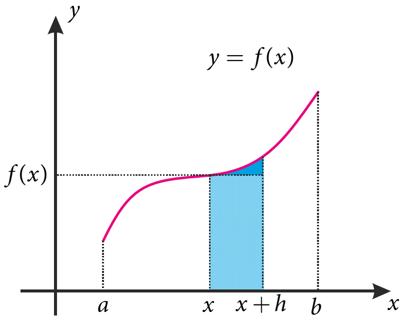
Şekil 3

Bu bölgenin alanı

$$\int_a^{x+h} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx=F(x+h)-F(x)$$

olacaktır.

Şekil 4 incelenirse, yüksekliği $f(x)$ olan dikdörtgenin alanının $h\cdot f(x)$ olduğu görülecektir.



Şekil 4

Dikdörtgen ile eğri altında kalan alan arasındaki koyu bölgenin alanını yeterince küçük olduğu düşünürsek, dikdörtgenin alanının yaklaşık olarak eğri altında kalan alana eşit olduğunu söyleyebiliriz. Yani,

$$F(x+h)-F(x)\approx h\cdot f(x)$$

$$\Rightarrow f(x)\approx \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \qquad (h>0)$$

yazılabilir.

Dikkat edilirse *h* değerini sıfıra yaklaştırdıkça koyu mavi bölgenin küçüleceği gözlemlenebilir. Demek ki, yaklaşık olarak verilen bu eşitliğin, $h\to 0$ için limiti doğrudan doğruya $f(x)$ e eşit olacaktır. Yani,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

tir.

Eşitliğin sol tarafının $F(x)$ alan fonksiyonun türevi olduğu görülürse,

$$F'(x)=f(x)$$

eşitliği elde edilir.

Demek ki,

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(x)dx\right)=f(x)$$

olur.

Bir diğer biçimde,

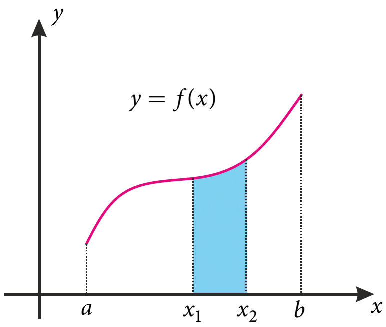
$$F(x)=\int_a^x f(x)dx \Rightarrow F(x)=\int_a^x F'(x)dx$$

dir.

O halde, genel olarak, $F'(x)=f(x)$ ve $F(x)=G(x)+c$ olmak üzere ($c\in R$),

$$\int f(x)dx=G(x)+c$$

belirsiz integrali yazılabilir.



Şekil 5

Ayrıca, şekil 5 te görüldüğü üzere, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ olacak biçimde, x_1 ve x_2 arasında kalan alan,

$$\int_a^{x_2} f(x)dx - \int_a^{x_1} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

$$\Rightarrow F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

olur.

Şimdi ilk çıkarımımıza yani $\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(x)dx\right) = f(x)$ eşitliğine geri dönelim. Bu eşitlikte, x yerine $u = g(x)$ kullanılırsa, zincir kuralı gereği

$$\frac{d}{dx}F(u) = \frac{dF(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

olur. Yani,

$$\frac{d}{dx}F(u) = \frac{d}{du}\left(\int_a^u f(x)dx\right) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}F(u) = f(u) \cdot u'$$

olur. O halde,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(x)dx\right) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

dir.

Biraz daha genel haliyle,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(x)dx\right) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

yazılabilir.