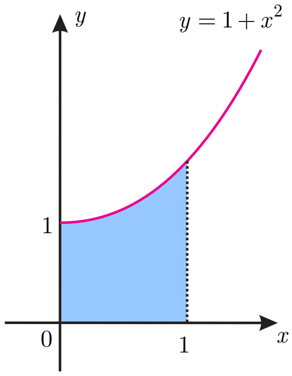
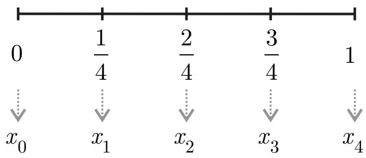
BELİRLİ İNTEGRAL

Temel geometrik şekillere bağlı bölgesel alanları, hatta bu şekillerden elde edilebilecek karmaşık bölgelerin alanlarını hesaplamayı biliyoruz. Örneğin karenin, dikdörtgenin, dairenin vs. alanını elimizde yeterli bilgi varsa hesaplayabiliriz.
Fakat (göreceli olarak) rastgele bir eğri ile sınırlandırılmış bir bölgenin alanını nasıl hesaplayabiliriz?

Örneğin şekil-1 deki gibi $y = f(x) = 1 + x^2$ eğrisi, x ekseni ve $x = 0$ ile $x = 1$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayabilir miyiz?
Evet hesaplayabiliriz. Daha önce karşılaşmadığımız bu tür bir bölgenin alanını, aşina olduğumuz dikdörtgensel bölgelerin alanlarından faydalanarak bulmaya çalışacağız. Öncelikle [0,1] aralığını şekildeki gibi uzunlukları eşit 4 eş alt aralığa bölelim.



Şekil 1



Şekilden de görüleceği üzere bu alt aralıklar $\left[0,\frac{1}{4}\right],\left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right],\left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right]$ ve $\left[\frac{3}{4},1\right]$ olacaktır. Elde ettiğimiz aralık uç değerlerini $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ kümesiyle gösterelim.

Dikkat ederseniz burada $x_0 = 0$ ve $x_4 = 1$ dir. Böylece daha teorik olarak aralıklar

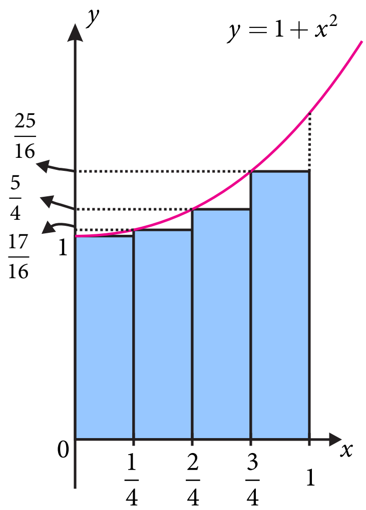
$[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ ve $[x_3,x_4]$ olacaktır.
Her bir aralığın uzunluğu

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \frac{x_4 - x_0}{4} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

birimdir. Bu değeri $\Delta x = \frac{1}{4}$ biçiminde gösterelim.

$f(x) = 1 + x^2$ fonksiyonu verilen aralıkta artan olduğundan alt aralıklarda da artandır. Dolayısıyla herhangi bir alt aralıkta aralığın sol uç değerinde fonksiyon en küçük; sağ uç değerinde de en büyük değerini alacaktır. Örneğin $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ aralığında fonksiyon en küçük değerini

$f(0) = 1$ olarak; en büyük değerini de $f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{4}$ olarak alır.



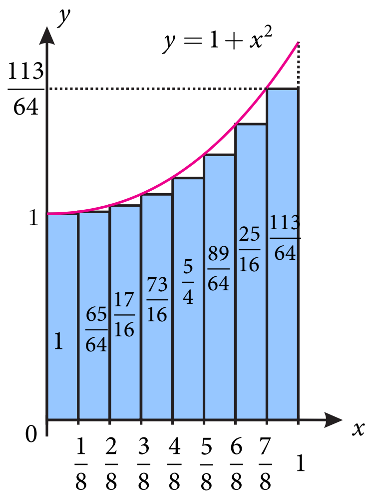
Şekil 2

Şimdi şekil-2 deki gibi, elde ettiğimiz alt aralık uzunluklarını ve bu aralıklarda fonksiyonun aldığı en küçük değerleri kenar uzunlukları kabul eden dikdörtgenleri çizelim.

Bu dikdörtgenlerin alanları toplamını A_4 ile gösterelim. Her birinin alanı, eni ile boyunun çarpımı kadar olacağından

$$\begin{aligned} A_4 &= f(0)\cdot\Delta x + f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Delta x + f\left(\frac{2}{4}\right)\cdot\Delta x + f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\Delta x \\ &= \Delta x\cdot\left(1 + \frac{17}{16} + \frac{5}{4} + \frac{25}{16}\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{39}{8} = \frac{39}{32} \cong 1{,}2188 \end{aligned}$$

bulunur. Bulduğumuz bu değer eğri altında kalan alana tabii ki eşit değildir. Fakat yakın bir değerdir diyebiliriz.



Şekil 3

Daha yakın değer elde etmek için [0,1]aralığını 8 eş aralığa bölüp aynı işlemleri yapalım. Şekil-3 ten de görüleceği üzere

$$A_8 = f(0)\cdot\Delta x + f\left(\frac{1}{8}\right)\cdot\Delta x + \cdots + f\left(\frac{7}{8}\right)\cdot\Delta x$$
$$= \Delta x\cdot\left(1+\frac{65}{64}+\cdots+\frac{113}{64}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{163}{16} = \frac{163}{128} \cong 1{,}2734$$

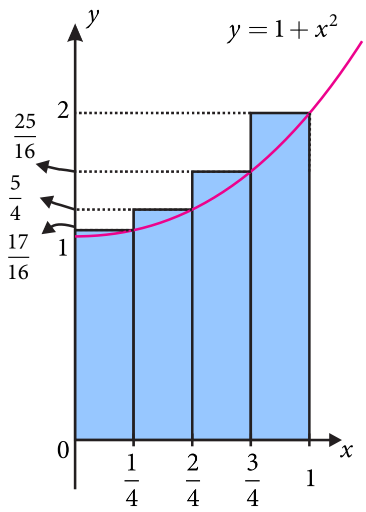
olur.

Bulduğumuz bu değer de eğri altındaki alana eşit değildir. Fakat önceki değerden daha yakın bir değerdir. Eğer aralığı daha fazla eş aralıklara bölerek hesap yaparsak bu yakınlaşmanın da artacağı ve daha doğru cevaplar elde edeceğimiz sanırım görünmüştür.

Bazı n değerleri için A_n değerlerini bilgisayar yardımıyla hesapladığımızda

n	A_n
12	1,2928
100	1,3238
200	1,3308
500	1,3323
1000	1,3328

olmaktadır. Öyle görünüyor ki $n \to \infty$ için $A_n \to 1{,}3333... = \frac{4}{3}$ olmaktadır. Tabii bunu kanıtlamak gerekiyor.



Şekil 4 (a)

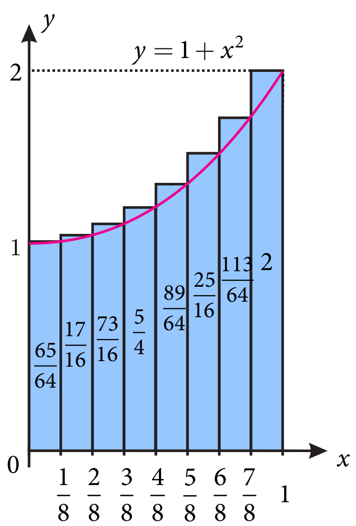
Bu kanıta geçmeden önce şekil-4 (a) ve (b) deki gibi dikdörtgenlerin boylarını, fonksiyonun alt aralıklarda aldığı en küçük değer almak yerine en büyük değer alarak hesap yapalım.

Bu dikdörtgenlerin alanları toplamını sırasıyla $Ü_4$ ve $Ü_8$ olarak gösterirsek

$$Ü_4 = f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Delta x + f\left(\frac{2}{4}\right)\cdot\Delta x + f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\Delta x + f(1)\cdot\Delta x$$
$$= \Delta x\cdot\left(\frac{17}{16}+\frac{5}{4}+\frac{25}{16}+2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{47}{8} = \frac{47}{32} \cong 1{,}4688$$

ve

$$Ü_8 = f\left(\frac{1}{8}\right)\cdot\Delta x + f\left(\frac{2}{8}\right)\cdot\Delta x + \cdots + f(1)\cdot\Delta x$$
$$= \Delta x\cdot\left(\frac{65}{64}+\cdots+\frac{113}{64}+2\right)$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{179}{16} = \frac{179}{128} \cong 1{,}3984$$



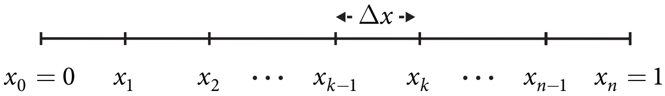
Şekil 4 (b)

Bazı n değerleri için $Ü_n$ değerlerini bilgisayar yardımıyla hesapladığımızda

n	$Ü_n$
12	1,3762
100	1,3383
200	1,3358
500	1,3338
1000	1,3328

olmaktadır. Öyle görünüyor ki $n \to \infty$ için $Ü_n \to 1{,}3333... = \frac{4}{3}$ olmaktadır. Şimdi bunların kanıtlarını verelim.

Örneklerde olduğu gibi, [0,1] aralığını, uç değerleri $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ kümesinin elemanlarından oluşturan, n eş alt aralığa bölelim. Böylece her bir alt aralığın uzunluğu şekildeki gibi $\Delta x=\dfrac{1}{n}$ olsun.

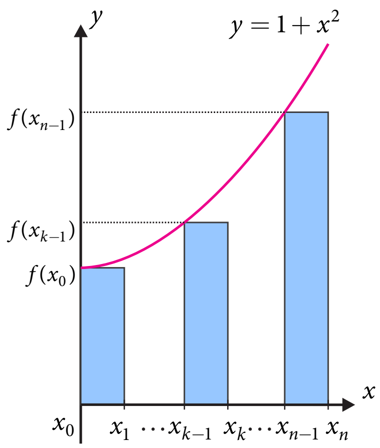


Eşit uzunlukta aralık uzunluğuyla elde edilen aralıkların uç değerleri aslında bir aritmetik dizi oluştururlar, öyle ki ortak farkları, aralık boyu $\Delta x=\dfrac{1}{n}$ kadardır. Yani $x_1=x_0+\Delta x=\dfrac{1}{n}$,

$x_2=x_0+2\Delta x=\dfrac{2}{n}$, ... , $x_k=x_0+k\Delta x=\dfrac{k}{n}$, ... , $x_n=x_0+n\Delta x=1$ olacaktır.

O halde şekil - 5 de görüleceği üzere A_n toplamı

$$A_n=\Delta x\cdot f(x_0)+\Delta x\cdot f(x_1)+\cdots+\Delta x\cdot f(x_{k-1})+\cdots+\Delta x\cdot f(x_{n-1})$$
$$=\Delta x\cdot\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(n^2+k^2)$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(n^2+k^2)=\frac{1}{n^3}\cdot\left[\sum_{k=0}^{n-1}n^2+\sum_{k=0}^{n-1}k^2\right]$$
$$=1+\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{8n^2-3n+1}{6n^2}$$



Şekil 5

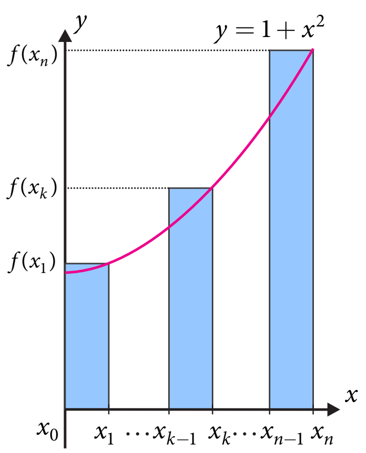
olur.

(Aralıkların sol uç değerlerinde fonksiyonun aldığı değerleri boy olarak aldığımıza dikkat edin).

Böylece $n\to\infty$ için $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2-3n+1}{6n^2}=\dfrac{4}{3}$ bulunur.

Benzer biçimde şekil - 6 da görüleceği üzere $\ddot{U}_n$ toplamı

$$\ddot{U}_n=\Delta x\cdot f(x_1)+\Delta x\cdot f(x_2)+\cdots+\Delta x\cdot f(x_k)+\cdots+\Delta x\cdot f(x_n)$$
$$=\Delta x\cdot\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(n^2+k^2)$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n^2+k^2)=\frac{1}{n^3}\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}n^2+\sum_{k=1}^{n}k^2\right]$$
$$=1+\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{8n^2+3n+1}{6n^2}$$



Şekil 6

Böylece $n \to \infty$ için $\lim_{n\to\infty} \ddot{U}_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{8n^2+3n+1}{6n^2} = \dfrac{4}{3}$ bulunur. $n \to \infty$ olduğunda kullandığımız dikdörtgenlerin enleri $\Delta x = \dfrac{1}{n} \to 0$ olacak ve artık dikdörtgenler sonsuz sıklıkta doğru parçalarına dönüşecektir. Böylece eğri altındaki alan elde edilecektir.

Sonuç olarak bu limitler gösteriyor ki eğri altında kalan alan $\dfrac{4}{3}$ birim karedir.

Bu örnekte ve genel ispatta kullandığımız A_n toplamına "alt toplamlar"; $\ddot{U}_n$ toplamına ise "üst toplamlar" denir. Genel olarak x ekseninin üstünde kalan bir eğrinin, x ekseni ile arasında kalan alan, $n \to \infty$ için yani $\Delta x = \dfrac{1}{n} \to 0$ için, bu toplamların limitine eşittir. Şimdi bu durumu daha matematiksel ifade edelim.

Talim Terbiye Kurulu, P parçalanmasının normu kavramı yerine, aralık uzunluklarını eşit alarak P parçalanmasını düzgün parçalanma olarak alın diyor.

TANIM 1

$[a,b]$ aralığını uç noktaları $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k \cdots < x_n = b$ olacak biçimde $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{k-1},x_k],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ alt aralıklarına bölen $P = \{x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ kümesine $[a,b]$ aralığının bir parçalanması (bölüntüsü) denir.

Aralık uzunlukları

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1, \quad \cdots, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \cdots, \quad \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

olur.

Bu aralıklardan uzunluğu en büyük olanının uzunluğuna P nin uzunluğu (normu) denir ve

$$\| P \| = \max\{\Delta x_k\}$$

ile gösterilir.

Eğer her bir aralığın uzunluğu birbirine eşit ise P ye "düzgün parçalanma" denir. Bu durumda

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

olur.

TANIM 2

$y = f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $P = \{a = x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k,\cdots,x_{n-1},x_n = b\}$ bu aralığın bir parçalanması olsun. $y = f(x)$ sürekli olduğundan herhangi bir $[x_{k-1},x_k]$ aralığında bir en küçük, bir de en büyük değeri olacaktır. Sırasıyla bunlara m_k ve M_k diyelim. Bu durumda

$$A_n = m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + \cdots + m_k \cdot \Delta x_k + \cdots + m_n \cdot \Delta x_n$$

$$\Rightarrow \boxed{A_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k}$$

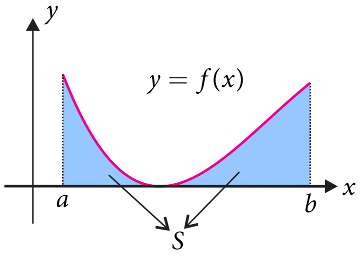
toplamına "alt toplamlar";

$$\ddot{U}_n = M_1 \cdot \Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + \cdots + M_k \cdot \Delta x_k + \cdots + M_n \cdot \Delta x_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{U}_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k}$$

toplamına da "üst toplamlar" denir.

Dikkat ederseniz, $m_k \le M_k$ olduğundan $A_n \le \ddot{U}_n$ olacaktır.

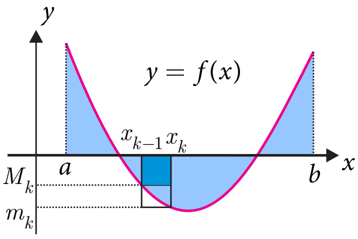


Şekil 7

Şekil-7 deki gibi, eğer $[a,b]$ aralığının her değeri için $f(x) \geq 0$ ise, $n \to \infty$ için bu toplamların limiti $y = f(x)$ eğrisi altında kalan alanı verecektir. Yani

$$S = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} Ü_n$$

olur.



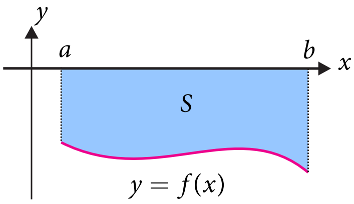
Şekil 8

Şekil-8 deki gibi, eğer $[a,b]$ aralığının herhangi bir $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında $y = f(x)$ negatif ise fonksiyonun bu aralıklarda en küçük ve en büyük değerleri $m_k < 0$ ve $M_k < 0$ olacağından kullandığımız dikdörtgenlerin alanları için seçtiğimiz değerler $m_k \cdot \Delta x < 0$ ve $M_k \cdot \Delta x < 0$ olur. Bu durumda A_n veya $Ü_n$ eğri altında kalan alanı vermez. Zira alan negatif değer alamaz.

Öte yandan eğer $y = f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığının her noktasında şekil-9 daki gibi $f(x) \leq 0$ ise bu durumda alt veya üst toplamların limiti negatif olacağından

$$S = -\lim_{n\to\infty} A_n = -\lim_{n\to\infty} Ü_n$$

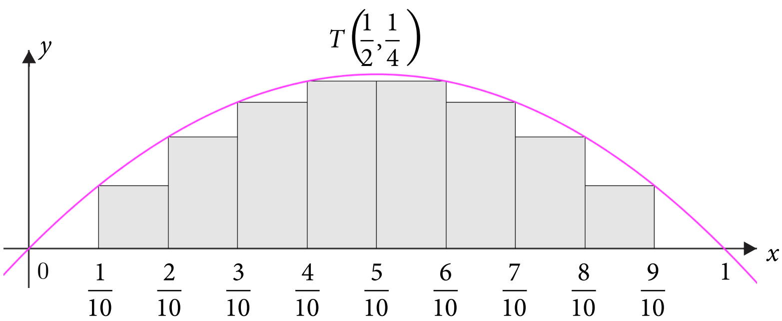
olur.



Şekil 9

ÖRNEK 1 $y = x - x^2$ fonksiyonu için, $[0,1]$ aralığının $P = \{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \cdots, \frac{9}{10}, 1\}$ bölüntüsünde $Ü_{10} - A_{10}$ farkını bulunuz.

Çözüm Konuya giriş yaparken kullandığımız örnekten farklı olarak verilen fonksiyon (parabol) tepe noktası $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e kadar artarken sonrasında azalmaktadır. Bu nedenle şekil-10 da görüleceği üzere $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ için fonksiyon en küçük değerlerini her bir alt aralığın sol uç değerleri için alırken; $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ için sağ uç değerlerinde almaktadır.



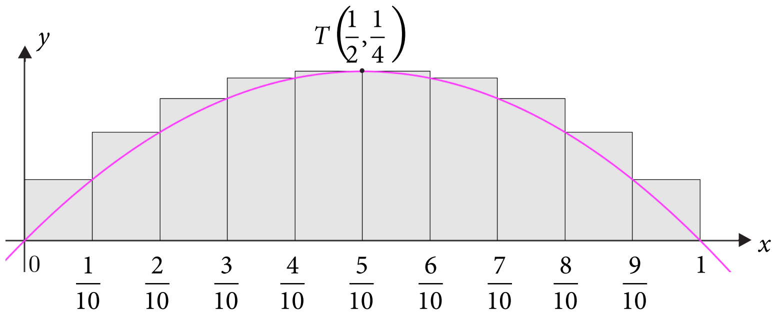
Şekil 10

O halde

$$\begin{aligned}
A_{10} &= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} m_k \\
&= \frac{1}{10}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + \cdots + f\left(\frac{8}{10}\right) + f\left(\frac{9}{10}\right) + f(1)\right] \\
&= \frac{1}{10}\left[0 + \frac{9}{100} + \frac{16}{100} + \frac{21}{100} + \frac{24}{100} + \frac{24}{100} + \frac{21}{100} + \frac{16}{100} + \frac{9}{100} + 0\right] \\
&= \frac{1}{10} \cdot \frac{7}{5} \\
&= 0.14
\end{aligned}$$

olur.

$\ddot{U}_{10}$ için de, şekil-11 de görüleceği üzere $0 \le x \le \frac{1}{2}$ için fonksiyon en büyük değerlerini, her bir alt aralığın sağ uç değerleri için alırken; $\frac{1}{2} \le x \le 1$ için sol uç değerlerinde almaktadır.



Şekil 11

Biraz kendinizi zorlayıp, çözümlerde geçen değerleri bulmaya çalışırsanız konuyu daha iyi öğrenirsiniz.

O halde

$$\begin{aligned}\ddot{U}_{10} &= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} M_k \\ &= \frac{1}{10}\left[f\left(\frac{1}{10}\right)+f\left(\frac{2}{10}\right)+f\left(\frac{3}{10}\right)+\cdots+f\left(\frac{7}{10}\right)+f\left(\frac{8}{10}\right)+f\left(\frac{9}{10}\right)\right] \\ &= \frac{1}{10}\left[\frac{9}{100}+\frac{16}{100}+\frac{21}{100}+\frac{24}{100}+\frac{25}{100}+\frac{25}{100}+\frac{24}{100}+\frac{21}{100}+\frac{16}{100}+\frac{9}{100}\right] \\ &= \frac{1}{10}\cdot\frac{19}{10} \\ &= 0.19\end{aligned}$$

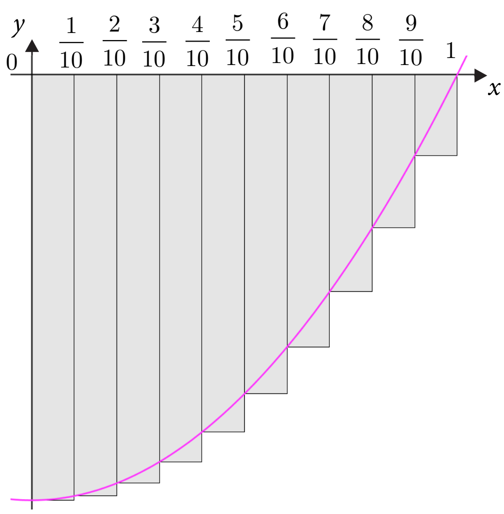
olur.

Böylece $\ddot{U}_{10} - A_{10} = 0.19 - 0.14 = 0.05$ bulunur.

ÖRNEK 2 $y = x^2 - 1$ fonksiyonu için, $[0,1]$ aralığının $P = \{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \cdots, \frac{9}{10}, 1\}$ bölüntüsünde $\ddot{U}_{10} - A_{10}$ farkını bulunuz.

Çözüm

Verilen fonksiyon şekil-12 de görüleceği üzere $[0,1]$ aralığında pozitif olmayan değerler almaktadır. Fonksiyon m_k değerlerini her bir aralığın sol uç değeri için; M_k değerlerini de sağ uç değeri için almaktadır. Bu durumu şekillerden görebilirsiniz.

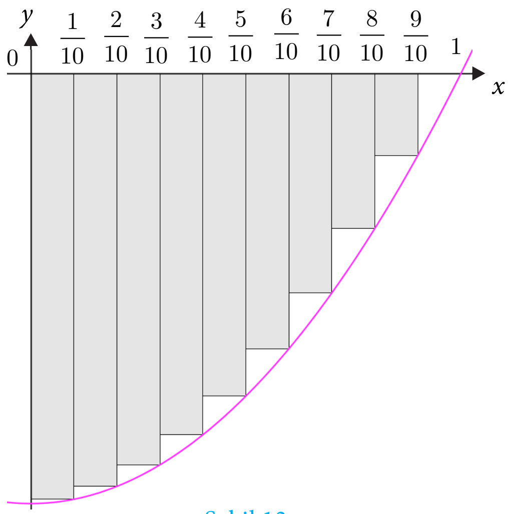


Şekil 12

O halde

$$\begin{aligned}A_{10} &= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} m_k \\ &= \frac{1}{10}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{10}\right)+f\left(\frac{2}{10}\right)+\cdots+f\left(\frac{7}{10}\right)+f\left(\frac{8}{10}\right)+f\left(\frac{9}{10}\right)\right] \\ &= \frac{1}{10}\left[-1-\frac{99}{100}-\frac{96}{100}-\frac{91}{100}-\frac{84}{100}-\frac{75}{100}-\frac{64}{100}-\frac{51}{100}-\frac{36}{100}-\frac{19}{100}\right] \\ &= \frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{143}{20}\right) \\ &= -0.715\end{aligned}$$

olur.



Şekil 13

Benzer biçimde şekil - 13 incelenirse

$$
\begin{aligned}
\ddot{U}_{10} &= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} M_k \\
&= \frac{1}{10}\left[f\left(\frac{1}{10}\right)+f\left(\frac{2}{10}\right)+f\left(\frac{3}{10}\right)+\cdots+f\left(\frac{8}{10}\right)+f\left(\frac{9}{10}\right)+f(1)\right] \\
&= \frac{1}{10}\left[-\frac{99}{100}-\frac{96}{100}-\frac{91}{100}-\frac{84}{100}-\frac{75}{100}-\frac{64}{100}-\frac{51}{100}-\frac{36}{100}-\frac{19}{100}+0\right] \\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{123}{20}\right) \\
&= -0.615
\end{aligned}
$$

olur.

Böylece $\ddot{U}_{10} - A_{10} = -0.615 - (-0.715) = 0.1$ bulunur.

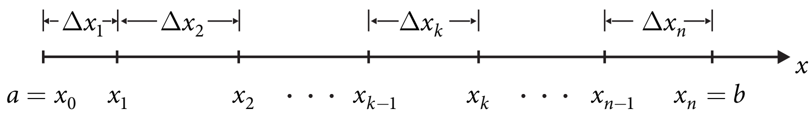
Eğri altında kalan alanın üst toplamlar türünden $-\ddot{U}_{10} = 0.715$ *ve alt toplamlar türünden* $-A_{10} = 0.615$ *olduğuna dikkat edin.*

Georg Friedrich Bernhard Riemann (17 Eylül 1826 - 20 Temmuz 1866), analiz ve diferansiyel geometri dalında çok önemli katkıları olan Alman matematikçidir. Söz konusu katkılar daha sonra izafiyet teorisinin geliştirilmesinde önemli rol oynamıştır. Bu matematikçinin ismi aynı zamanda zeta fonksiyonu, Riemann hipotezi, Riemann manifoldları ve Riemann yüzeyleri ile de bağlantılıdır.

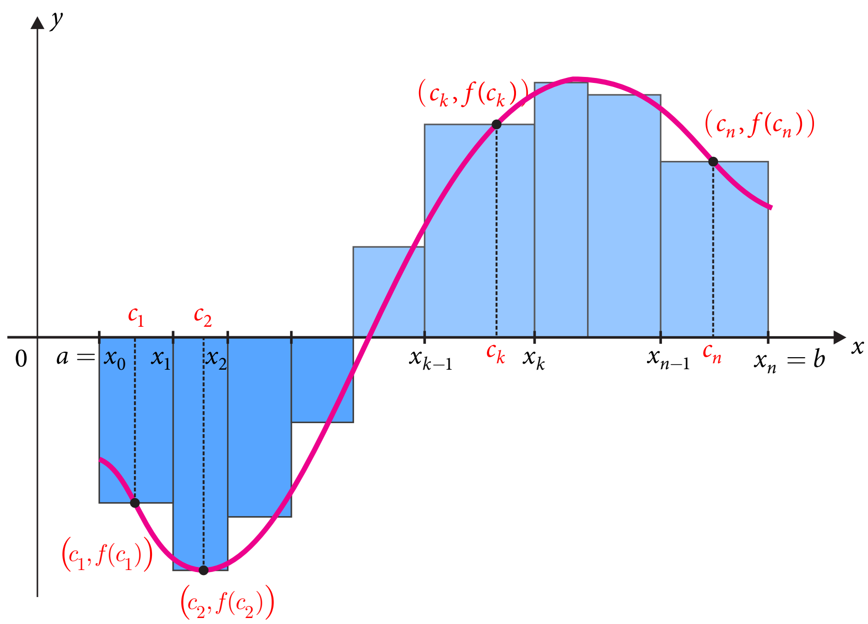
Alt ve üst toplamları bu örneklerde olduğu gibi ayrı ayrı hesaplamak yerine her ikisini de kapsayan, hatta fazlasını ifade eden bir yaklaşım söz konusudur.

Tarihsel süreci incelediğimizde, eğri altında kalan alanı dikdörtgenler yardımıyla bulmaya çalışan ve kendi adıyla anılan "Riemann Toplamı" nı sunan ilk matematikçi *Bernhard Riemann* dır.

Riemann, $[a,b]$ aralığının bir $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ parçalanması için, herhangi bir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında fonksiyonun en küçük veya en büyük değerini boyu olarak kabul eden dikdörtgenlerle ifade edilen alt ve üst toplamları kullanmak yerine, bu aralıkta rastgele bir c_k değeri için dikdörtgenler oluşturmuştur. Alan hesabının ötesine geçen farklı bir kavramı tanımlamıştır. Şekil 14 ü inceleyiniz.



Riemann toplamında $[a,b]$ *aralığının rastgele parçalanması*



Şekil 14

TANIM 3 (Riemann Toplamı)

$[a,b]$ aralığında tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonu için bu aralığın, düzgün olması gerekmeyen, bir parçalanması $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ olsun. Herhangi bir alt aralıkta $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ olacak biçimde bir c_k sayısı için

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

toplamına “Riemann Toplamı” denir.

P ye bağlı olarak farklı Riemann toplamları yazılabilir. Bu parçalanmanın herhangi bir aralığında $f(c_k) \cdot \Delta x_k > 0$, $f(c_k) \cdot \Delta x_k = 0$ veya $f(c_k) \cdot \Delta x_k < 0$ olabilir. Ayrıca, Riemann toplamında alt aralık uzunlukları farklı olduğundan, içlerinden en uzun olanını yani $\| P \|$ yi olabildiğinde küçük alarak tüm aralıkları kontrol etmiş oluruz.

Teorem 1

$[a,b]$ aralığında sürekli $y = f(x)$ fonksiyonu için $A_n \le R_n \le Ü_n$ olur.

İspat

$y = f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olduğuna göre $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ için, $m_k \le f(c_k) \le M_k$ olacak biçimde bu alt aralıkta bir en küçük bir de en büyük değeri olacaktır. Bu durumda $m_k \cdot \Delta x_k \le f(c_k) \cdot \Delta x_k \le M_k \cdot \Delta x_k$ olacağından

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$

bulunur. ■

Alan hesabı yaparken alt ve üst toplamların $n \to \infty$ için limitlerini almıştık. Riemann toplamıyla bulunacak bir alan için de $\| P \| \to 0$ için limit alınabilir. Çünkü en uzun aralığı 0 a yaklaştırmış oluruz. Artık karşımıza türlü türlü çıkan bu limite bir tanım getirelim.

TANIM 4 (Riemann Toplamıyla Belirli İntegral)

$[a,b]$ aralığında tanımlı $y = f(x)$ için

$$\lim_{\|P\| \to 0} R_n = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

ifadesine $y = f(x)$ fonksiyonunun a dan b ye belirli integrali denir.

Eğer bu limit bir gerçel sayıya eşit oluyorsa “ *$y = f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilir*” denir.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716); bir Alman filozofu, bilim dünyasının önemli sistemci düşünürlerinden biridir. Matematik, metafizik ve mantık alanlarında ileri sürdüğü yeni düşünce ve görüşleriyle tanınır.

Tanımda geçen $\int$ sembolünü ilk olarak Gottfried Wilhelm Leibniz kullanmıştır. İngilizce toplam anlamına gelen “Sum” kelimesinin ilk harfinden esinlenmiştir. Bu gösterimi biraz daha açarsak

Üst limit

İntegrand

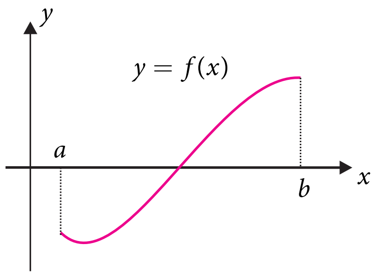
integral değişkeni (x)

İntegral Sembolü

$$\int_a^b f(x)dx$$

Alt limit

f in a dan b ye integrali



Şekil 15

$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyon

Riemann tanımıyla verilen bu integralde c_k nın ilgili aralıkta rastgele bir sayı olması ve $\| P \|$ nin en uzun aralığın uzunluğu olarak alınması, tanımın ne kadar esnek olduğunu göstermektedir.

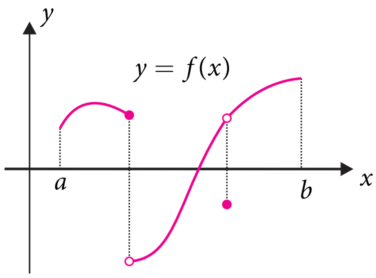
Örneğin her bir aralık boyunu eşit alırsak $\| P \| = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ olacağından

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k = (b-a) \cdot \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \right]$$

olur. O halde

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \right]$$

biçiminde yazılabilir.



Şekil 16

$[a,b]$ aralığında sayılı süreksizliği olan fonksiyon

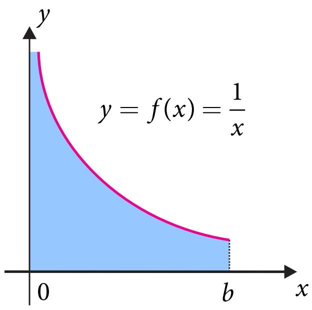
Bir fonksiyonun $[a,b]$ aralığında integrali, tanım gereği limite bağlı olduğundan varlığı da bu limitin varlığına bağlıdır. Bu nedenle her fonksiyonunun belli bir aralıkta integrali kesin olarak vardır diyemeyiz. Bu durumla ilgili önemli iki teoremi verelim.

Teorem 2

$[a,b]$ aralığında $y = f(x)$ fonksiyonu sürekli ise bu aralıkta integrallenebilir.

Teorem 3

$[a,b]$ aralığında sınırlı ve bu aralığın sayılı değerlerinde sürekliliği olmayan bir fonksiyon bu aralıkta integrallenebilirdir.



Şekil 17

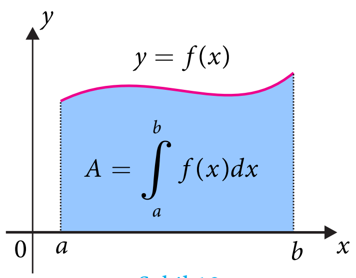
Bu teoremlerin ispatları lise seviyesi üzerindedir. Bu nedenle sadece yorumlarını verelim.

Teoremlerden ilki sürekli fonksiyonların sürekli oldukları aralıklarda integrallenebilir olduğunu; ikincisi ise, $[a,b]$ aralığında sınırlı bir fonksiyonun bu aralığın sayılı değerlerinde sürekliliği bozulmuş olsa dahi integrallenebilir olduğunu söylüyor.

Şekil 16 da görüleceği üzere, sürekliliğin bozulduğu x değerlerinde, fonksiyon eğrisi sıçrama veya kopya yapabilir.

Tabii integralin var olduğu bu durumların daha iyi anlaşılması için bir de integralin var olmadığı bir durum göstermek gerekiyor. Özellikle fonksiyonların, sağdan veya soldan sonsuza ıraksadığı değerleri içeren aralıklarda, integrallerinden bahsetmek olası değildir.

Örneğin, şekil 17 de görüleceği üzere $y = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun $[0,b]$ aralığında integralini incelersek, $x = 0$ için $f(0)$ tanımlı değil ve $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ dur. Bu nedenle burada çizilecek bir dikdörtgenin alanı da sonsuza ıraksar.

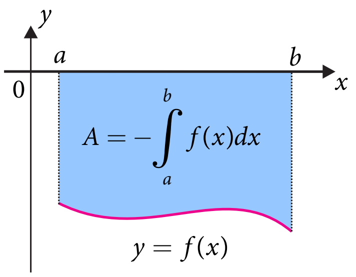


Şekil 18

TANIM 5 (Eğri Altında Kalan Alan)

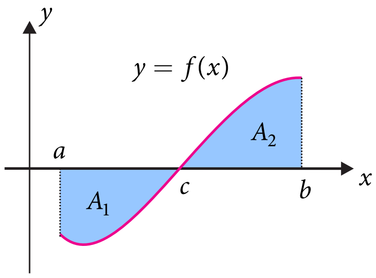
$[a,b]$ aralığında negatif değerler almayan ve bu aralıkta integrallenebilir bir $y = f(x)$ eğrisi ile x ekeni arasında kalan (şekil 18) bölgenin alanı, fonksiyonun bu aralıktaki belirli integraline eşittir. Yani

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



Şekil 19

Bu tanım sayesinde $[a,b]$ aralığında pozitif değerler almayan ve integrallenebilir $y = f(x)$ eğrisi ile x ekseni altında kalan alanın da, fonksiyonun bu aralıktaki belirli integralinin eksi işaretlisi olduğunu söyleyebiliriz (şekil 19).

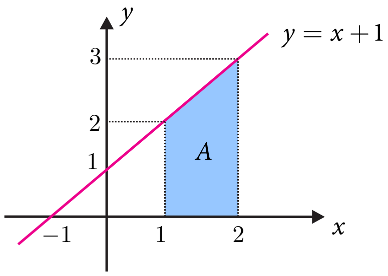


Şekil 20

Böyelce her iki durumu içeren şekil 20 deki $y = f(x)$ fonksiyonu için $\int_a^c f(x)dx = -A_1$ ve $\int_c^b f(x)dx = A_2$ olacağından

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = A_2 - A_1$$

olur.



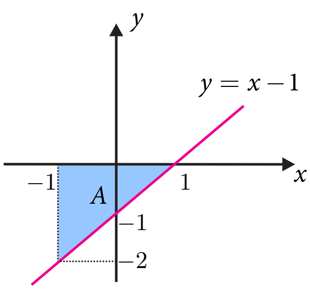
Şekil 21

ÖRNEK 3 $\int_1^2 (x+1)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Verilen integral şekil 21 de görüleceği üzere aslında $[1,2]$ aralığında $y = x+1$ doğrusu ile x ekseni arasında kalan alana eşittir. O halde

$$\int_1^2 (x+1)dx = A = \frac{2+3}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$$

bulunur.



Şekil 22

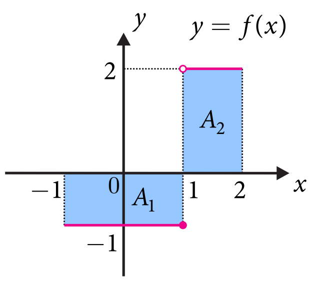
ÖRNEK 4 $\int_{-1}^1 (x-1)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Verilen integral şekil 22 de görüleceği üzere aslında $[-1,1]$ aralığında $y = x-1$ doğrusu ile x ekseni arasında kalan alanın ekşi işaretlisine eşittir. O halde

$$\int_{-1}^1 (x-1)dx = -A = -\frac{2 \cdot 2}{2} = -2$$

bulunur.

ÖRNEK 5 $f(x) = \begin{cases} 2 & , \ x > 1 \\ -1 & , \ x \le 1 \end{cases}$ fonksiyonu için $\int_{-1}^2 f(x)dx$ integralini hesaplayınız.



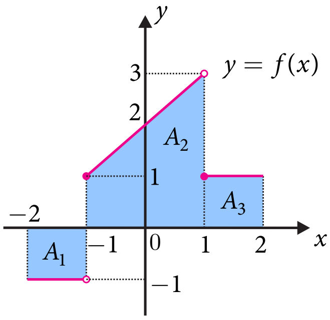
Şekil 23

Çözüm Verilen fonksiyonun grafiği şekil 23 te gösterilmiştir. Buna göre sorulan integral

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f(x)dx &= \int_{-1}^1 -1dx + \int_1^2 2dx \\ &= -A_1 + A_2 \\ &= -\frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur.

ÖRNEK 6 $f(x)=\begin{cases}-1 & , \ x<-1\\ x+2 & , \ -1\le x<1\\ 1 & , \ 1\le x\end{cases}$ olduğuna göre $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ integralini hesaplayınız.



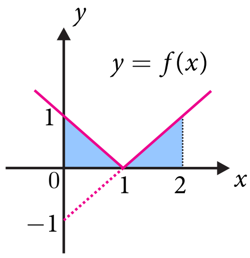
Şekil 24

Çözüm Verilen parçalı fonksiyonun grafiği şekil 24 de çizilmiştir. Buna göre sorulan integral

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} f(x)dx &= \int_{-2}^{-1} -1dx + \int_{-1}^{1}(x+2)dx + \int_{1}^{2} 1dx\\ &= -A_1 + A_2 + A_3\\ &= -1\cdot 1 + \frac{1+3}{2}\cdot 2 + 1.1\\ &= 4\end{aligned}$$

bulunur.

ÖRNEK 7 $f(x)=|x-1|$ olduğuna göre $\int_{0}^{2} f(x)dx$ integralini hesaplayınız.



Şekil 25

Çözüm Verilen mutlak değer fonksiyonunun grafiği şekil 25 te çizilmiştir. Buna göre sorulan integral taralı alanlar toplamına eşittir. Yani

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2} f(x)dx &= \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx\\ &= \frac{1\cdot 1}{2} + \frac{1\cdot 1}{2}\\ &= 1\end{aligned}$$

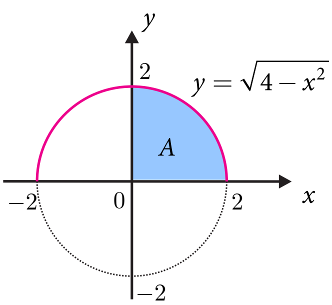
bulunur.

ÖRNEK 8 $\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Öncelikle $y=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 = 4-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=4$ olduğunu görelim. Bu denklem esasında şekil 26 da olduğu gibi yarıçapı 4 birim olan merkezil çember belirtir. $y=\sqrt{4-x^2}$ denklemi ise bu çemberin üst yarısıdır. Çünkü $\sqrt{4-x^2}\ge 0$ dır. O halde istenilen integral taralı çeyrek dilimin alanına eşittir. Yani

$$\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx = A = \frac{\pi\cdot 2^2}{4} = \pi$$

bulunur.



Şekil 26

ÖRNEK 9 $\int_{-3}^{0} \sqrt{9-y^2}\,dy$ integralini hesaplayınız.

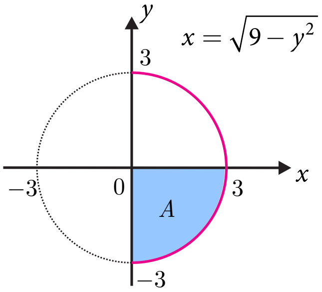
Çözüm Bir önceki örnekte olduğu gibi $x=\sqrt{9-y^2} \Rightarrow x^2+y^2=9$ merkezil çemberi elde edilir. Şekil 27 de görüleceği üzere $x=\sqrt{9-y^2}$ denklemi bu çemberin sağ yarısıdır. Çünkü $\sqrt{9-y^2}\geq 0$ dır.

O halde istenilen integral taralı çeyrek dilimin alanına eşittir. (*x eksenininin altında kaldığı için alanının eksilisine eşit olduğu düşünülebilir, fakat burada integral değişkeni y dir. Ayrıca, integrand* $\sqrt{9-y^2}\geq 0$ *olduğundan bu integralin cevabı negatif olamaz.*)

Yani

$$\int_{-3}^{0} \sqrt{9-y^2}\,dy = A = \frac{\pi\cdot 3^2}{4}=\frac{9\pi}{4}$$

bulunur.



Şekil 27

Daha farklı örneklere geçmeden önce belirli integralin temel özelliklerini verelim.

Teorem 4

f ve *g* integrallenebilir fonksiyonları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$
2. $\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$
3. $c\in R$ için $\int_{a}^{b} c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_{a}^{b} f(x)dx$
4. $\int_{a}^{b} [f(x)\pm g(x)]dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)dx$
5. $\int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$
6. *f* tek fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
7. *f* çift fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)dx$
8. $\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \leq \int_{a}^{b} |f(x)|dx$

Bu özelliklerin ilk beşi belirli integralin tanımından yararlanılarak ispatlanabilir. Örneğin, ilk özellik aslında $[a,b]$ aralığını soldan sağa okumak yerine sağdan sola doğru okumanın getirdiği bir sonuçtur. Sağdan sola doğru kurulacak bir sistemde $x_0 = b$ ve $x_n = a$ olacak ve her bir alt aralık boyu $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} < 0$ olacaktır. Bu nedenle 1. özellik gerçekleşir. İkinci özellik zaten $\Delta x = 0$ olacağından hemen görülebilir.

Diğer özelliklerin ispatları için örnek oluşturması açısından 5.özelliğin ispatını verelim.

İspat (5 özellik)

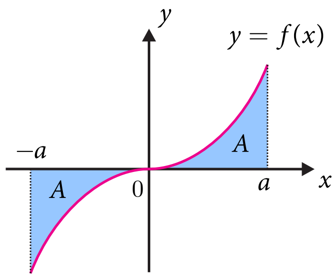
Tanım 4 ün bulunduğu sayfa incelenirse Riemann tanımında geçen aralık boylarını eşit aldığımızda

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\right]$$

olduğunu söylemiştik. O halde

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= (b-a)\cdot \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\right]\\ &= (b-c+c-a)\cdot \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\right]\\ &= (b-c)\cdot \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\right]+(c-a)\cdot \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\right]\\ &= \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx\end{aligned}$$

olur. ■



Şekil 28

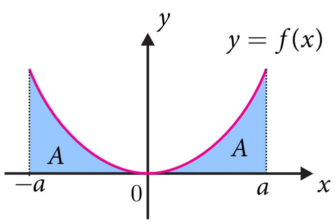
f tek fonksiyonu için $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

6, 7 ve 8. özelliklerin teorik ispatlarını vermek yerine geometrik yorumlarını vermek daha anlamlı olacaktır.

$y = f(x)$ tek fonksiyonu şekil 28 de olduğu gibi orijine göre simetriktir. Bu nedenle $[-a,0]$ ve $[0,a]$ aralıklarında, x ekseni ile arasında kalan alanlar eşit fakat x ekseninin farklı taraflarında olur. Yani

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx\\ &= -A + A\\ &= 0\end{aligned}$$

olur.



Şekil 29

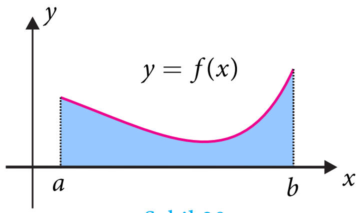
f çift fonksiyonu için

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$y = f(x)$ çift fonksiyonu ise şekil 29 da olduğu gibi x eksenine göre simetriktir. Bu nedenle $[-a,0]$ ve $[0,a]$ aralıklarında, x ekseni ile arasında kalan alanlar eşit ve x ekseninin aynı tarafında olur. Yani

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx\\ &= A + A\\ &= 2A\\ &= 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)dx\end{aligned}$$

olur.



Şekil 30

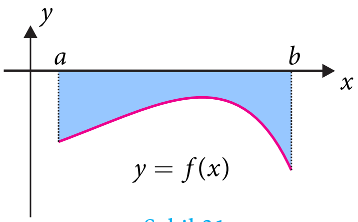
$f(x) \geq 0$ olduğundan

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f(x)dx$$

$y = f(x)$ fonksiyonu şekil 30 de olduğu gibi $[a,b]$ aralığında negatif olmuyorsa, yani $f(x) \geq 0$ ise, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ olacağından $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b f(x)dx$ olur. Ayrıca $|f(x)| = f(x)$ olacağından $\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f(x)dx$ olur. O halde $f \geq 0$ için

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f(x)dx$$

olur.



Şekil 31

$f(x) \leq 0$ olduğundan

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Aksini düşünürsek, $y = f(x)$ fonksiyonu şekil 31 de olduğu gibi $[a,b]$ aralığında pozitif olmuyorsa, yani $f(x) \leq 0$ ise, $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ olacağından $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx$ olur.

Ayrıca $|f(x)| = -f(x)$ olacağından $\int_a^b |f(x)|dx = -\int_a^b f(x)dx$ olur. O halde $f \leq 0$ için,

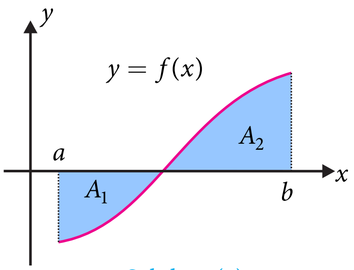
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx = -\int_a^b f(x)dx$$

olur.

Öte yandan şekil 32(a) da olduğu üzere *f* fonksiyonu aralığın bir kısmında pozitif, bir kısmında da negatif oluyorsa $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = |-A_1 + A_2|$ olur, şekil 32 (b) de çizili $|f|$ grafiğine göre $\int_a^b |f(x)|dx = A_1 + A_2$ olacaktır. O halde bu durum için

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| < \int_a^b |f(x)|dx$$

geçerlidir.

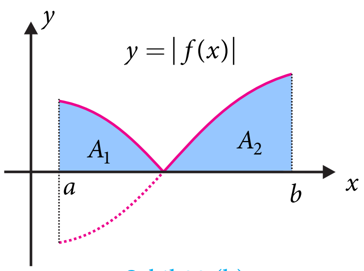


Şekil 32 (a)

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = |-A_1 + A_2|$$

ÖRNEK 10 $\int_{-3}^{0} f(x)dx = 5$ ve $-\int_{1}^{0} f(x)dx = 7$ olduğuna göre, $\int_{-3}^{1} f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Teorem 4 te geçen 1.özellik gereği $-\int_1^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ yazılabilir, ayrıca 5.özellik gereği de $\int_{-3}^{1} f(x)dx = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$ olur. O halde $\int_{-3}^{1} f(x)dx = 5 + 7 = 12$ bulunur.



Şekil 32 (b)

$$\int_a^b |f(x)|dx = A_1 + A_2$$

ÖRNEK 11 $\forall x \in R$ için $f(x) > 0$ ve $\int_{-4}^{0} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = 10$ olduğuna göre,

$\int_{-4}^{2} f(x)dx$ integrali için ne söylenebilir?

Çözüm $\int_{-4}^{2} f(x)dx = \int_{-4}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$ olduğundan, soruda verilen eşitlik yerine yazılırsa $\int_{-4}^{2} f(x)dx = 10 + \int_{0}^{1} f(x)dx$ olur. $f > 0$ olduğundan $\int_{0}^{1} f(x)dx > 0$ olacağından $\int_{-4}^{2} f(x)dx > 10$ olmalıdır.

ÖRNEK 12 $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 5$ ve $\int_{-1}^{2} g(x)dx = 2$ olduğuna göre, $\int_{-1}^{2} [2f(x) - 3g(x)]dx$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm 3 ve 4. özellikler gereği

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} [2f(x) - 3g(x)]dx &= \int_{-1}^{2} 2f(x)dx - \int_{-1}^{2} 3g(x)dx \\ &= 2\int_{-1}^{2} f(x)dx - 3\int_{-1}^{2} g(x)dx \\ &= 2\cdot 5 - 3\cdot 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

olur.

ÖRNEK 13 $[a,b]$ aralığında sürekli $y = f(x)$ fonksiyonu için

$\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| = \int_{a}^{b} |f(x)|dx$ olduğuna göre,

I. $[a,b]$ aralığında $f \geq 0$ dır.

II. $[a,b]$ aralığında $f \leq 0$ dır.

III. $a < c < b$ olmak üzere, $x < c$ için $f < 0$ ve $x > c$ için $f > 0$ dır.

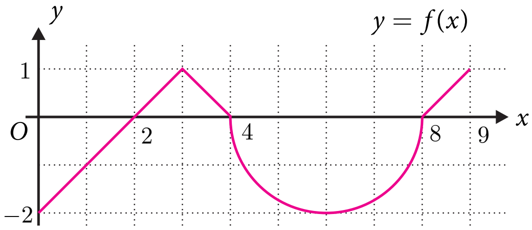
önermelerinden hangileri doğrudur?

Çözüm 8.özelliğin şekillerle verilen yorumları tekrar incelenirse verilen eşitliğin sağlanabilmesi için $[a,b]$ aralığında verilen f fonksiyonunun bu aralıkta ya ≥ 0 ya da ≤ 0 olması gerektiği görülecektir. Bu nedenle I. ve II. önermeler doğru, III. önerme yanlıştır.

ÖRNEK 14 $[0,9]$ aralığında $y=f(x)$ fonksiyonu şekil 33 da olduğu gibi üç doğru parçası ve bir yarım çember yayından oluşmaktadır. Buna göre,

a. $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$ b. $\displaystyle\int_4^8 f(x)dx$ c. $\displaystyle\left|\int_0^9 f(x)dx\right|$ d. $\displaystyle\int_0^9 |f(x)|dx$

integrallerini hesaplayınız.

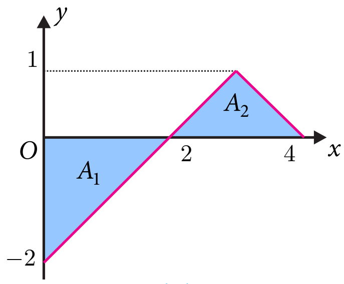


Şekil 33

Çözüm a. Şekil 34 de görüleceği üzere

$$\int_0^4 f(x)dx = -A_1 + A_2 = -\frac{2\cdot 2}{2}+\frac{1\cdot 2}{2} = -1$$

bulunur.

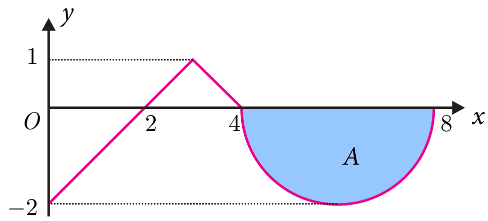


Şekil 34

b. Şekil 35 de görüleceği üzere

$$\int_4^8 f(x)dx = -A = -\frac{\pi\cdot 2^2}{2} = -2\pi$$

bulunur.



Şekil 35

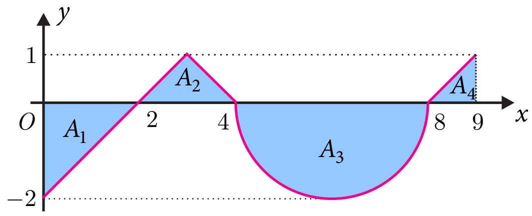
c. Şekil 36 da görüleceği üzere

$$\left|\int_0^9 f(x)dx\right| = |-A_1+A_2-A_3+A_4|$$

$$= \left|-\frac{2\cdot 2}{2}+\frac{1\cdot 2}{2}-\frac{\pi\cdot 2^2}{2}+\frac{1\cdot 1}{2}\right|$$

$$= 2\pi+\frac{1}{2}$$

bulunur.



Şekil 36

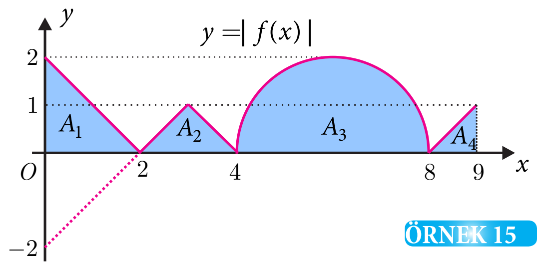
d. Şekil 37 de görüleceği üzere

$$\int_0^9 |f(x)|dx = A_1+A_2+A_3+A_4$$

$$= \frac{2\cdot 2}{2}+\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{\pi\cdot 2^2}{2}+\frac{1\cdot 1}{2}$$

$$= 2\pi+\frac{7}{2}$$

bulunur.



Şekil 37

ÖRNEK 15 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{(x^2)}\sin x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Dikkat ederseniz integrand $f(x)=e^{(x^2)}\sin x$ fonksiyonu tek fonksiyondur. Çünkü

$$f(-x)=e^{((-x)^2)}\sin(-x) = e^{(x^2)}(-\sin x) = -e^{(x^2)}\sin x = -f(x)$$

dir. O halde Teorem 4 ün 6.özelliği gereği $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ olur.

ÖRNEK 16 $\forall x \in R$ için $f(x)=f(-x)$ ve $\int\limits_0^4 f(x)dx=-6$ olduğuna göre

$\int\limits_{-4}^{4} 3f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

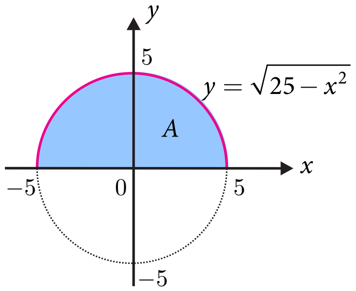
Çözüm

Verilen $f(-x)=-f(x)$ bilgisine göre fonksiyon çifttir. 7 ve 3. özellikler gereği

$$\int\limits_{-4}^{4} 3f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{4} 3f(x)dx = 6\int\limits_{0}^{4} f(x)dx = 6\cdot -6 = -36$$

olur.

ÖRNEK 17 $\int\limits_{-5}^{5}\left(\sqrt{25-x^2}-x\right)dx$ integralini hesaplayınız.



Şekil 38

Çözüm

Verilen integrali

$$\int\limits_{-5}^{5}\left(\sqrt{25-x^2}-x\right)dx = \int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx - \int\limits_{-5}^{5} xdx$$

biçiminde yazarsak ve $f(x)=x$ fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu

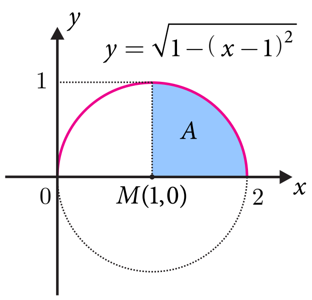
görürsek $\int\limits_{-5}^{5} xdx = 0$ olacaktır. O halde istenilen integral şekil 38 de görü-

leceği üzere $y=\sqrt{25-x^2}$ eğrisi ile sınırlı yarım dairenin alanına eşittir.
O halde

$$\int\limits_{-5}^{5}\left(\sqrt{25-x^2}-x\right)dx = A = \frac{\pi\cdot 5^2}{2} = \frac{25\pi}{2}$$

olur.

ÖRNEK 18 $\int\limits_{1}^{2}\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.



Şekil 39

Çözüm

İntegrand $y=\sqrt{1-(x-1)^2} \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$ olduğundan verilen fonksiyon, merkezi $M(1,0)$ ve yarıçapı 1 birim olan şekil 39 daki yarım çemberdir. İstenilen integralin sınırlarına bakıldığında bu integralin, yarım çember ile x ekseni arasında kalan çeyrek dilimlik alana eşit olduğu görülecektir.
O halde

$$\int\limits_{1}^{2}\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = A = \frac{\pi.1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

olur.

Teorem 5

$[a,b]$ aralığında integrallenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonu için

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

olur.

İspat

$y = f(x)$ fonksiyonu integrallenebilir olduğuna göre

$\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)dx$ dir. P parçalanmasını düzgün

bir parçalanma alırsak $\|P\| = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ olur. Bu durumda

$x_0 = a,\ x_1 = a+\Delta x,\ x_2 = a+2\Delta x, \cdots, x_k = a+k\Delta x, \cdots, x_n = a+n\Delta x$ olur.

O halde $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ sayısını $c_k = x_k = a+k\cdot\Delta x$ alabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned}\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x\\ &= \lim_{n\to\infty}\Delta x\cdot\sum_{k=1}^{n} f(a+k\cdot\frac{b-a}{n})\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(a+k\cdot\frac{b-a}{n})\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

olur.

ÖRNEK 19 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ ifadesini $[0,\pi]$ aralığında integral olarak ifade ediniz.

Çözüm $y = \sin x$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında sürekli olduğundan Teorem 5 gereği

$$\int_0^{\pi}\sin x dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi-0}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(0+k\frac{\pi-0}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

olur. O halde sorulan limit

$$\int_0^{\pi}\sin x dx$$

integraline eşittir.

ÖRNEK 20 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\cos^2\frac{1}{n}+\cos^2\frac{2}{n}+\cdots+\cos^2 1\right)$ ifadesini $[0,1]$ aralığında integral olarak ifade ediniz.

Çözüm $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\cos^2\frac{1}{n}+\cos^2\frac{2}{n}+\cdots+\cos^2 1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k}{n}$ dir. İstenilen integral $[0,1]$ aralığında olduğundan $\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$ ve $a+k\frac{b-a}{n}=\frac{k}{n}$ dir.

Bu durumda Teorem 5 gereği $f(x)=\cos^2 x$ ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k}{n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k}{n}=2\int_0^1\cos^2 x\,dx$$

bulunur.

ÖRNEK 21 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+k}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ ifadesini integral ile ifade ediniz.

Çözüm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+k}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ dır. Genel terimi n ile çarpıp bölelim:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{n+k}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\frac{n+k}{n}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\end{aligned}$$

olur. Teorem 5 gereği $[0,1]$ aralığında $\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ ve $a+k\frac{b-a}{n}=\frac{k}{n}$ olacak biçimde $f(x)=\frac{1}{1+x}$ alarak (bu aralıkta sürekli olduğuna dikkat edin), elde ettiğimiz limiti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

olarak ifade edebiliriz.