Örnek Problem - 1

$a+b+c+d+e=10$ denkleminin sayma sayıları kümesindeki çözüm kümesinin eleman sayısını bulunuz.

Çözüm

1. yol

10 tane 1'i yan yana koyalım. Bunların ayırdığı 9 aralığın 4'ünü seçerek bu aralıklara birer ayıraç koyalım. Bu ayıraçlar a, b, c, d, e değişkenlerine verilecek olan 1'leri ayıracaktır:

1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1

1 . 1 **x** 1 . 1 . 1 **x** 1 **x** 1 . 1 **x** 1 . 1

Denklemin çözüm sayısı, $C(9,4)=126$ olur.

2. yol (Doğrudan doğruya sayma)

$1\ 1\ 1\ 1\ 6 \text{---------} > \dfrac{5!}{4!\cdot 1!} = 5$ çözüm,

$1\ 1\ 1\ 2\ 5 \text{---------} > \dfrac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!} = 20$ çözüm,

$1\ 1\ 1\ 3\ 4 \text{---------} > \dfrac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!} = 20$ çözüm,

$1\ 1\ 2\ 2\ 4 \text{---------} > \dfrac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = 30$ çözüm,

$1\ 1\ 2\ 3\ 3 \text{---------} > \dfrac{5!}{21!\cdot 1!\cdot 2!} = 30$ çözüm,

$1\ 2\ 2\ 2\ 3 \text{---------} > \dfrac{5!}{1!\cdot 3!\cdot 1!} = 20$ çözüm,

$2\ 2\ 2\ 2\ 2 \text{---------} > \dfrac{5!}{5!} = 1$ çözüm.

Toplam çözüm sayısı 126 olur.

Örnek Problem - 2

$a+b+c+d+e=10$ denkleminin doğal sayılar kümesindeki çözüm kümesinin eleman sayısını bulunuz.

Çözüm

10 tane 1'i yan yana koyalım.
4 tane ayıracı da bunların yanına koyalım.
Ayıraçlar a, b, c, d, e değişkenlerine verilecek 1'leri ayırsın. Ayıraçlar 1'lerin ayırdığı aralıklara ayrı ayrı konulmak zorunda değildir. 1'lerin dışında da olabilirler; yan yana da gelebilirler. Çünkü; değişkenler "0" değerini de alabileceklerdir.

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 x x x x

Denklemin çözüm sayısı, $\dfrac{14!}{10!\cdot 4!} = 1001$ olur.

Örnek Problem - 3

$a+b+c+d+e=15$ denkleminin $\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesindeki çözüm kümesinin eleman sayısını bulunuz.

Çözüm

Sayma sayıları kümesindeki çözümlerin sayısına N_1 diyelim. 15 tane 1'in ayırdığı 14 aralığın 4'ü seçilerek bu aralıklara birer ayıraç koyalım. Bu ayıraçlar a, b, c, d, e değişkenlerine verilecek olan 1'lerin sayılarını belirtecektir.

$N_1 = C(14,4) = 1001$ olur.

$a = a_1 + 6$ olsun.

$$a+b+c+d+e=15 \qquad (1)$$
$$\Rightarrow a_1+6+b+c+d+e=15$$
$$\Rightarrow a_1+b+c+d+e=9 \qquad (2)$$

(1) denkleminin sayma sayılarındaki çözümlerinden a'nın 6'dan büyük olduğu çözümlerin sayısı, (2) denkleminin sayma sayılarındaki çözüm sayısı kadardır. Bu sayıya N_2 dersek,

$$N_2 = C(8,4) = 70 \text{ olur.}$$

(9 tane 1'in ayırdığı 8 aralıktan 4'ünü seçerek, bu aralıklara birer ayıraç koyduk.)
Değişkenlerin herhangi ikisinin aynı anda 6'dan büyük olamayacağına dikkat ediniz.
b, c, d, e değişkenlerinin 6'dan büyük olduğu durumları da hesaba alırsak, denklemin verilen kümedeki çözümlerinin sayısı,
$N = N_1 - C(5,1)\cdot N_2 = 1001 - 5.70 = 651$ bulunur.

Örnek Problem - 4

$a+b+c+d+e=20$ denkleminin $\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesindeki çözüm kümesinin eleman sayısını bulunuz.

Çözüm

Sayma sayıları kümesindeki çözümlerin sayısına N_1 diyelim. 20 tane 1'in ayırdığı 19 aralığın 4'ü seçilerek bu aralıklara birer ayıraç koyalım. Bu ayıraçlar a, b, c, d, e değişkenlerine verilecek olan 1'lerin sayılarını belirtecektir.

$N_1 = C(19,4) = 3876$ olur.

$a = a_1 + 6$ olsun.

$$a+b+c+d+e=20 \qquad (1)$$
$$\Rightarrow a_1+6+b+c+d+e=20$$
$$\Rightarrow a_1+b+c+d+e=14 \qquad (2)$$

(1) denkleminin sayma sayılarındaki çözümlerinden a'nın 6'dan büyük olduğu çözümlerin sayısı, (2) denkleminin sayma sayılarındaki çözüm sayısı kadardır. Bu sayıya N_2 dersek,

$$N_2 = C(13,4) = 715 \text{ olur.}$$

(14 tane 1'in ayırdığı 13 aralıktan 4'ünü seçerek, bu aralıklara birer ayıraç koyduk.)
Değişkenlerin herhangi ikisi de aynı anda 6'dan büyük olabilir.

$a = a_1 + 6$ ve $b = b_1 + 6$ olsun.

$$a+b+c+d+e=20 \qquad (1)$$
$$\Rightarrow a_1+6+b_1+6+c+d+e=20$$
$$\Rightarrow a_1+b_1+c+d+e=8 \qquad (3)$$

(1) denkleminin sayma sayılarındaki çözümlerinden a'nın ve b'nin 6'dan büyük olduğu çözümlerin sayısı, (3) denkleminin sayma sayılarındaki çözüm sayısı kadardır. Bu sayıya N_3 dersek,

$$N_3 = C(7,4) = 35 \text{ olur.}$$

a, b, c, d, e değişkenlerinin herhangi üçü aynı anda 6'dan büyük olamaz.
Buna göre;
$a+b+c+d+e=20$ denkleminin $\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesindeki çözüm kümesinin eleman sayısı,

$$\begin{aligned} N &= N_1 - C(5,1)\cdot N_2 + C(5,2)\cdot N_3 \\ &= 3876 - 5\cdot 715 + 10\cdot 35 \\ &= 651 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek Problem - 5

$a+b+c+d+e=25$ denkleminin $\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesindeki çözüm kümesinin eleman sayısını bulunuz.

Çözüm

Sayma sayıları kümesindeki çözümlerin sayısına N_1 diyelim. 25 tane 1'in ayırdığı 24 aralığın 4'ü seçilerek bu aralıklara birer ayıraç koyalım. Bu ayıraçlar a, b, c, d, e değişkenlerine verilecek olan 1'lerin sayılarını belirtecektir.

$N_1 = C(24,4) = 10626$ olur.

$a = a_1 + 6$ olsun.

$$a+b+c+d+e=25 \qquad (1)$$
$$\Rightarrow a_1+6+b+c+d+e=25$$
$$\Rightarrow a_1+b+c+d+e=19 \qquad (2)$$

(1) denkleminin sayma sayılarındaki çözümlerinden a'nın 6'dan büyük olduğu çözümlerin sayısı, (2) denkleminin sayma sayılarındaki çözüm sayısı kadardır. Bu sayıya N_2 dersek,

$$N_2 = C(18,4) = 3060 \text{ olur.}$$

Değişkenlerin herhangi ikisi de aynı anda 6'dan büyük olabilir.

$a = a_1 + 6$ ve $b = b_1 + 6$ olsun.

$$a+b+c+d+e=25 \qquad (1)$$
$$\Rightarrow a_1+6+b_1+6+c+d+e=25$$
$$\Rightarrow a_1+b_1+c+d+e=13 \qquad (3)$$

(1) denkleminin sayma sayılarındaki çözümleri içinde a'nın ve b'nin 6'dan büyük olduğu çözümlerin sayısı, (3) denkleminin sayma sayılarındaki çözüm sayısı kadardır. Bu sayıya N_3 dersek,

$$N_3 = C(12,4) = 495 \text{ olur.}$$

a, b, c, d, e değişkenlerinin herhangi üçü de aynı anda 6'dan büyük olabilir.

$a = a_1 + 6$, $b = b_1 + 6$ ve $c = c_1 + 6$ olsun.

$$a+b+c+d+e=25 \qquad (1)$$
$$\Rightarrow a_1+6+b_1+6+c_1+6+d+e=25$$
$$\Rightarrow a_1+b_1+c_1+d+e=7 \qquad (4)$$

(1) denkleminin sayma sayılarındaki çözümlerinden a'nın, b'nin ve c'nin 6'dan büyük olduğu çözümlerin sayısı, (4) denkleminin sayma sayılarındaki çözüm sayısı kadardır. Bu sayıya N_4 dersek,

$$N_4 = C(6,4) = 15 \text{ olur.}$$

Buna göre;
$a+b+c+d+e=25$ denkleminin $\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesindeki çözüm kümesinin eleman sayısı,

$$\begin{aligned} N &= N_1 - C(5,1)\cdot N_2 + C(5,2)\cdot N_3 - C(5,3)\cdot N_4 \\ &= 10626 - 5\cdot 3060 + 10\cdot 495 - 10.15 \\ &= 126 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek Problem - 6

Bir zar art arda 5 kere atılıyor.
Gelen 5 sayının toplamının 5 ile bölünebilmesi olasılığı kaçtır?

Çözüm

Gelen sayılar sırasıyla a, b, c, d, e olsun.
Deneyin örneklem uzayı (a,b,c,d,e) beşlilerinin kümesidir.
$E=\{(a,b,c,d,e) \mid a,b,c,d,e \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ uzayı eş olumlu olup $n(E)=6^5$ olur.
İstenen olay da,

$$\begin{array}{llll} a+b+c+d+e=5 & (1) & a+b+c+d+e=10 & (2) \\ a+b+c+d+e=15 & (3) & a+b+c+d+e=20 & (4) \\ a+b+c+d+e=25 & (5) & a+b+c+d+e=30 & (6) \end{array}$$

denklemlerinin $\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesindeki çözüm kümelerinin A birleşim kümesidir. Denklemlerin ayrı ayrı çözüm kümeleri $Ç_1$, $Ç_2$, $Ç_3$, $Ç_4$, $Ç_5$, $Ç_6$ ise $A = Ç_1 \cup Ç_2 \cup Ç_3 \cup Ç_4 \cup Ç_5 \cup Ç_6$ olacaktır.
$(1,1,1,1,1)$, $(2,3,1,1,3)$, $(1,6,4,6,3)$, … beşlileri A olayının birer elemanıdır.
Yapacağımız, $n(A)$ sayısını ve $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(E)}$ oranını bulmaktır.
$Ç_1=\{(1,1,1,1,1)\}$ olup $n(Ç_1)=1$'dir.
$Ç_6=\{(6,6,6,6,6)\}$ olup $n(Ç_6)=1$'dir.
Önceki örnek problemlerimizde $n(Ç_2)=126$, $n(Ç_3)=651$, $n(Ç_4)=651$, $n(Ç_5)=126$ olduğunu bulmuştuk.

$Ç_1$, $Ç_2$, $Ç_3$, $Ç_4$, $Ç_5$, $Ç_6$ kümeleri ayrık olduğundan,

$$\begin{aligned} n(A) &= n(Ç_1)+n(Ç_2)+n(Ç_3)+n(Ç_4)+n(Ç_5)+n(Ç_6) \\ &= 1+126+651+651+126+1 \\ &= 1556 \end{aligned}$$

olur.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(E)}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{389}{1944}$$

bulunur.

Örnek Problem - 7

$a \ge 3$, $b \ge 4$ ve $c < 5$ olduğuna göre;
$a+b+c+d+e=15$ denkleminin doğal sayılar kümesindeki çözüm kümesinin eleman sayısını bulunuz.

Çözüm

$a=a_1+3$ ve $b=b_1+4$ olsun.

$$\begin{aligned} & a+b+c+d+e=15 \quad (1) \\ \Rightarrow\ & a_1+3+b_1+4+c+d+e=15 \\ \Rightarrow\ & a_1+b_1+c+d+e=8 \quad (2) \end{aligned}$$

(1) denkleminin , doğal sayılarda, $a \ge 3$, $b \ge 4$ koşullarını sağlayan çözümlerinin sayısı, (2) denkleminin doğal sayılardaki çözümlerinin sayısı kadardır. 8 tane 1'i 4 ayıraçla ayırıp 5 değişkene paylaştıracağız. Tabii; bu paylaştırmada bazı değişkenlerin payına "0" düşecektir.
Bu sayıya N_1 dersek,

$$N_1=\frac{12!}{8!\,4!}=495 \text{ olur.}$$

Şimdi de; 495 tane çözüm içindeki, $c<5$ koşuluna uymayanları çıkaracağız:

$c=c_1+5$ diyelim.

$$\begin{aligned} & a_1+b_1+c+d+e=8 \quad (2) \\ \Rightarrow\ & a_1+b_1+c_1+5+d+e=8 \\ \Rightarrow\ & a_1+b_1+c_1+d+e=3 \quad (3) \end{aligned}$$

(2) denkleminin $c \ge 5$ koşuluna uyan çözümlerinin sayısı (3) denkleminin doğal sayılardaki çözüm sayısı kadardır.
Bu sayıya N_2 dersek,

$$N_2=\frac{7!}{4!\,3!}=35 \text{ olur.}$$

İstenen çözüm sayısı,
$N=N_1-N_2 \Rightarrow N=495-35 \Rightarrow N=460$ bulunur.