Problem (TMOZ)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

fonksiyonu veriliyor.

$f(\mathbb{R})$ kümesini bulunuz.

Çözüm

I. yol

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=0$;

$f'(x)=\dfrac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$;

$f'(x)=0$ ise

$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\quad f(x_1)=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$ ve

$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},\quad f(x_2)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ olur.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

$f(\mathbb{R})=\left[\dfrac{-2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ olur.

II. yol

Her $x\in\mathbb{R}$ için, $a\le f(x)\le b$ olsun.

$\forall x,\ a\le f(x)\le b\Rightarrow$

$\Rightarrow a\le\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\le b$

$\Rightarrow a\cdot\left(x^2+x+1\right)\le 2x+1\le b\cdot\left(x^2+x+1\right)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} ax^2+(a-2)x+a-1\le 0\\ bx^2+(b-2)x+b-1\ge 0\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a<0 \text{ ve } \Delta_1=(a-2)^2-4a(a-1)\le 0\\ b>0 \text{ ve } \Delta_2=(b-2)^2-4b(b-1)\le 0\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}\le a<0\\ 0<b\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}\le f(x)\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ fonksiyonunun $\forall x\in\mathbb{R}$ için tanımlı ve sürekli olduğu dikkate alınırsa,

$f(\mathbb{R})=\left[\dfrac{-2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ olduğu görülür.

$f\left(\dfrac{-1}{2}\right)=0$ ve $f(0)=1$ olup f fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir.