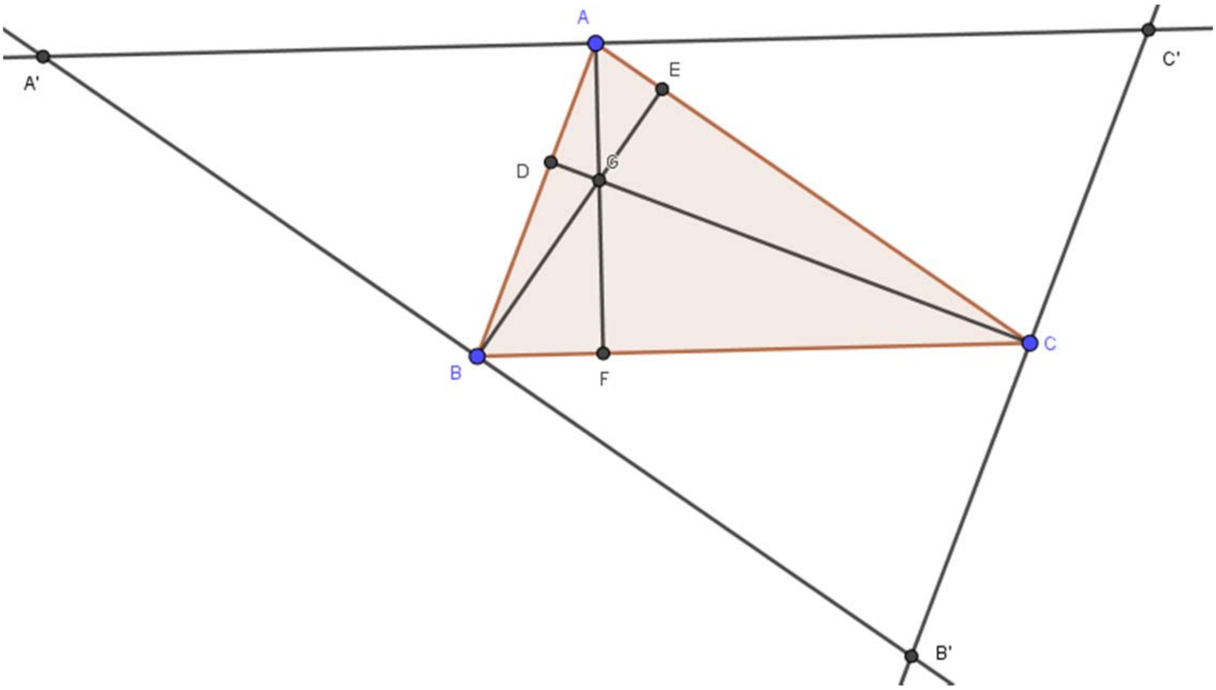
Üçgenin Diklik Merkezinin Özellikleri

Halit Çelik
Matematik Öğretmeni

Bir üçgenin diklik merkezinin özellikleri

1. **ABC üçgeninin yükseklikleri]AF], [BE] ve [CD] olsun. Bu yükseklikler bir noktada kesişir.**

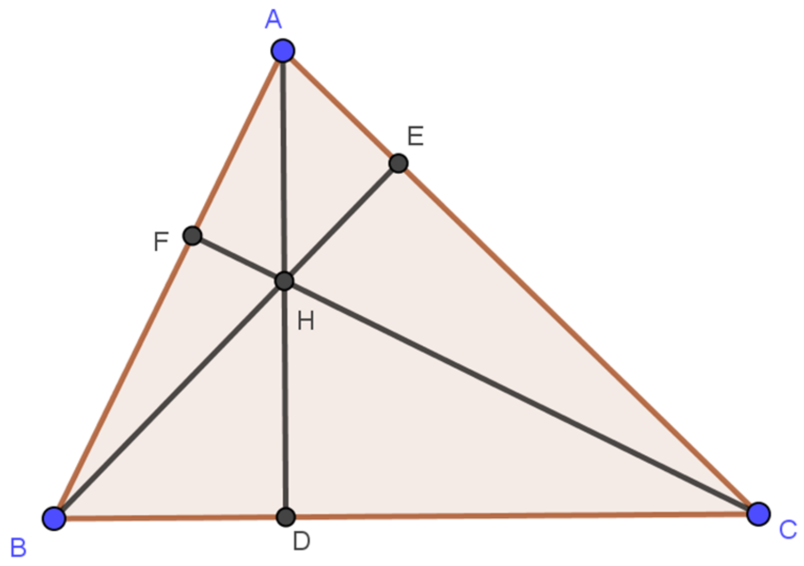
İspat:



A noktasından [BC] na A’C’, B noktasından [AC] kenarına A’B’ ve C noktasından [AB] kenarına B’C’ paralelleri çizilirse ABCC’, ACBA’ paralelkenar olduklarından |AA’|=|NC|=|AC’| olup [AF] [A’C’] nın orta dikmesidir.ACBA’ ile ACB’B paralelkenar olduklarında |AC|=|A’B|=|BB’| olup [BE] [A’B’] nın orta dikmesidir. Bu iki orta dikmenin kesişme noktası G olsun. |GA’|=|GB’|=|GC’| olup G noktasının B’ ile C’ noktalarına olan uzaklığı eşit olduğundan [B’C’] nın orta dikmesi üzerindedir.

ABB’ ile ABCC’ paralelkenar olduklarından |AB|=|B’C|=|CC’| olduğundan [CD], [B’C’] nın orta dikmesidir. Yani G noktası [CD] üzerinde olup üçgenin yükseklikleri bir noktada kesişir.

İkinci ispat:



ABC üçgeninde |AB|=c, |AC|=n ve |BC|=a diyalim. |BD|=x olsun

ABC üçgeninin alanı $A(ABC)=\frac{1}{2}ah_a$ veya çevrel çemberin yarıçapı R olmak üzere

$A(ABC)=\frac{abc}{4R}$ olarak hesaplanır. Buna göre $\frac{ah_a}{2}=\frac{abc}{4R}$ den $h_a=\frac{bc}{2R}$ olur. Benzer şeklide

$h_b=\frac{ac}{2R}$ ve $h_c=\frac{ab}{2R}$ olarak hesaplanır. BAD dik üçgeninde

$x^2=c^2-\frac{b^2c^2}{4R^2}$ den $x=\frac{c}{2R}\sqrt{4R^2-b^2}$ olarak hesaplanır. Benzer şekilde yükseklik ayaklarının

kenarlar üzerinde ayırdığı doğru parçalarının uzunlukları $|BD|=\frac{c}{2R}\sqrt{4R^2-b^2}$,

$|DC|=\frac{b}{2R}\sqrt{4R^2-c^2}$, $|CE|=\frac{a}{2R}\sqrt{4R^2-c^2}$, $|AE|=\frac{c}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}$, $|AF|=\frac{b}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}$,

$|BF|=\frac{a}{2R}\sqrt{4R^2-b^2}$ olarak hesaplanır. Ce'va teoreminin karşıtına göre eğer

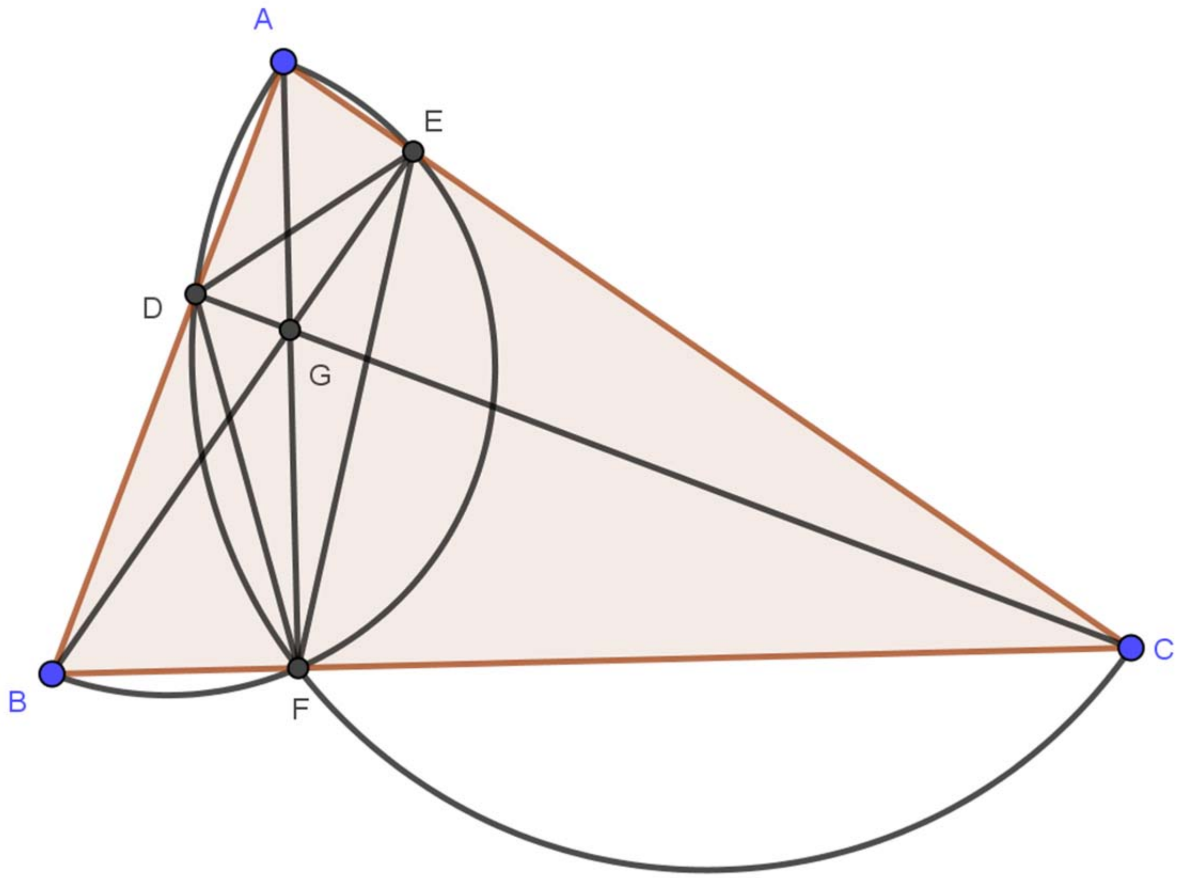
$\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}=1$ ise [AD], [BE] ve [CF] doğru parçaları bir noktada kesişir. Değerler yerine

yazılırsa $\frac{\frac{b}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}}{\frac{a}{2R}\sqrt{4R^2-b^2}}\cdot\frac{\frac{c}{2R}\sqrt{4R^2-b^2}}{\frac{b}{2R}\sqrt{4R^2-c^2}}\cdot\frac{\frac{a}{2R}\sqrt{4R^2-c^2}}{\frac{c}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}}=1$ olduğundan üçgenin yükseklikleri bir noktada kesişir.

Bu noktaya üçgeninin diklik merkezi denir.

2. ABC üçgeninde [AF], [BE] ve [CD] yükseklikler olsun. DEF üçgenine ABC üçgeninin ortik üçgeni denir. ABC üçgeninin diklik merkezi DEF üçgeninin iç açıortaylarının kesişme noktasıdır.

İsğat:

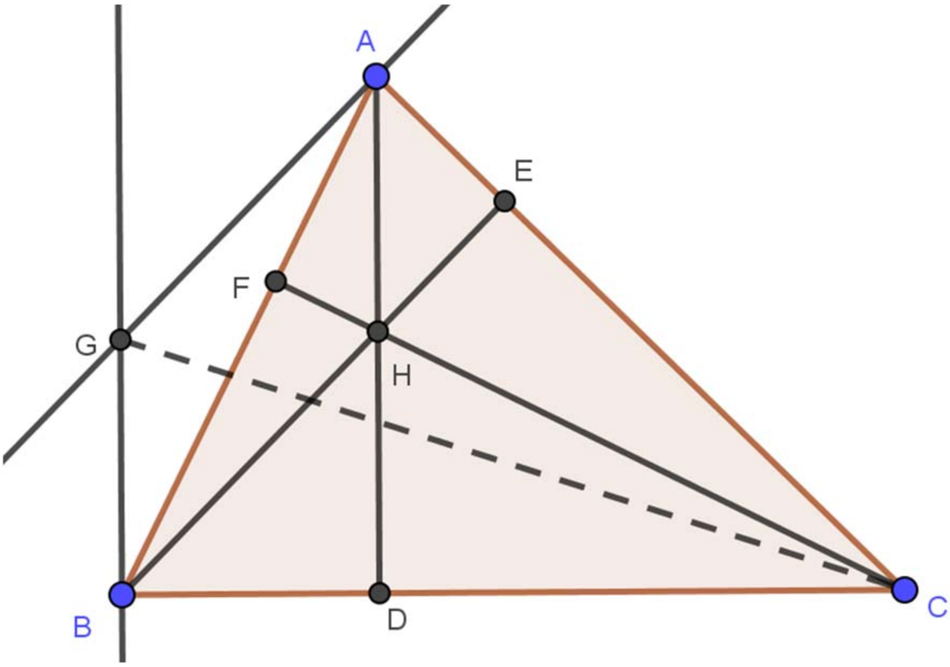


$m(AFB) = m(AEB) = 90$ olduğundan A, E, F ve B noktaları [AB] çaplı çember üzerindedir. ABE üçgeninde m(ABE)=90 – m(A) dır. Aynı yayı gördüklerinden
$m(ABE) = m(AFE) = 90 - m(A)$ olur.

$m(AFC) = m(ADC) = 90$ olduğundan A, D, F ve C noktaları [AC] çaplı çember üzerindedir. ADC üçgeninde $m(ACD) = 90 - m(A)$ dır. Aynı yayı gördüklerinden
$m(AFD) = m(ACD) = 90 - m(A)$ olur. Buna göre $m(AFD) = m(AFE)$ olur. Yani [AF], DFE açısının açıortayıdır. Bener şekilde [BE], DEF ve [CD] FDE açılarının açıortaylarıdır. Yani G noktası DEF üçgeninin iç açıortaylarının kesişme noktası yanı DEF üçgeninin iç teğet çemberinin merkezidir.

3. ABC üçgeninde [AD], [BE] ve [CF] yükseklikler ve H noktası diklik merkezi ise $|\boldsymbol{AH}|^2 + |\boldsymbol{BC}|^2 = |\boldsymbol{BH}|^2 + |\boldsymbol{AC}|^2 = |\boldsymbol{CH}|^2 + |\boldsymbol{AB}|^2$ bağıntısı vardır.

İspat:



AG//BE ve BG//AH çizilirse $m(GAC) = m(GBC) = 90$ ve AGBH paralelkenar olur. Yani |BG|=|AH| ve |AG|=|BH| olur. CAG ve CBG ortak hipotenüslü dik üçgenlerdir. Buna göre

$|AG|^2 + |AC|^2 = |BG|^2 + |BC|^2$ yazılır |AG| ile | BG| nin eşitleri yerine yazılırsa

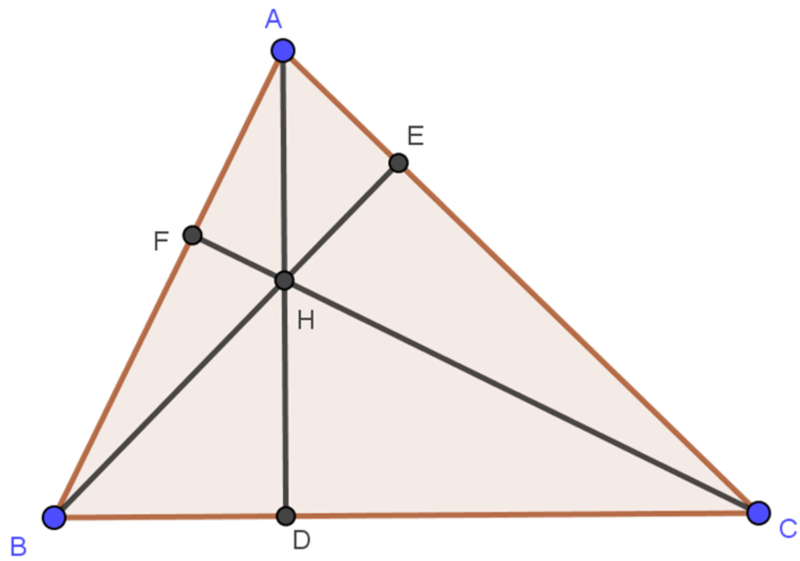
$$|AH|^2 + |BC|^2 = |BH|^2 + |AC|^2$$

Olur. Benzer şekilde uygulama yapılırsa

$$|\boldsymbol{AH}|^2 + |\boldsymbol{BC}|^2 = |\boldsymbol{BH}|^2 + |\boldsymbol{AC}|^2 = |\boldsymbol{CH}|^2 + |\boldsymbol{AB}|^2$$

Sonucu elde edilir.

4. ABC üçgeninde [AD], [BE] ve [CF] yükseklikler ve H diklik merkezi ise $|AD||DH| = |BD||DC|$ bağıntısı vardır.

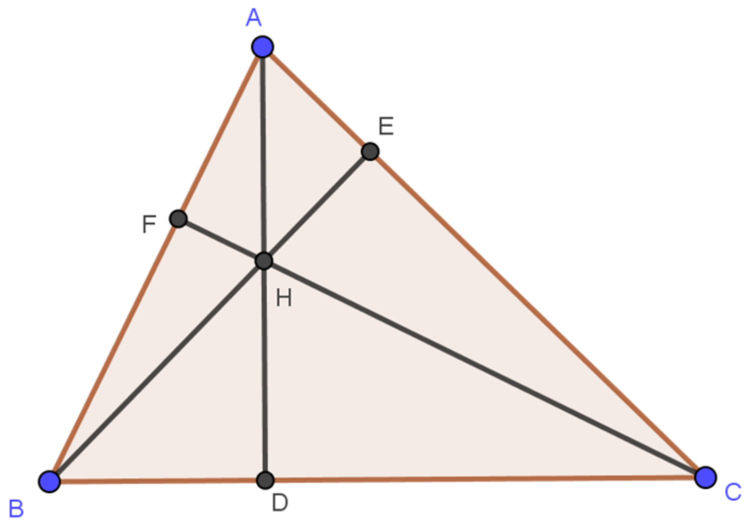


İspat:

ADC ile BDH üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|DC|}{|DH|}$ *den* $|AD| \cdot |DH| = |BD| \cdot |DC|$ elde edilir.

5. ABC üçgeninin yükseklikleri [AD], [BE], [CF] olsun. ABC üçgeninde $\tan(BAC)=\dfrac{|BC|}{|AH|}$ **dir.**

İspat:



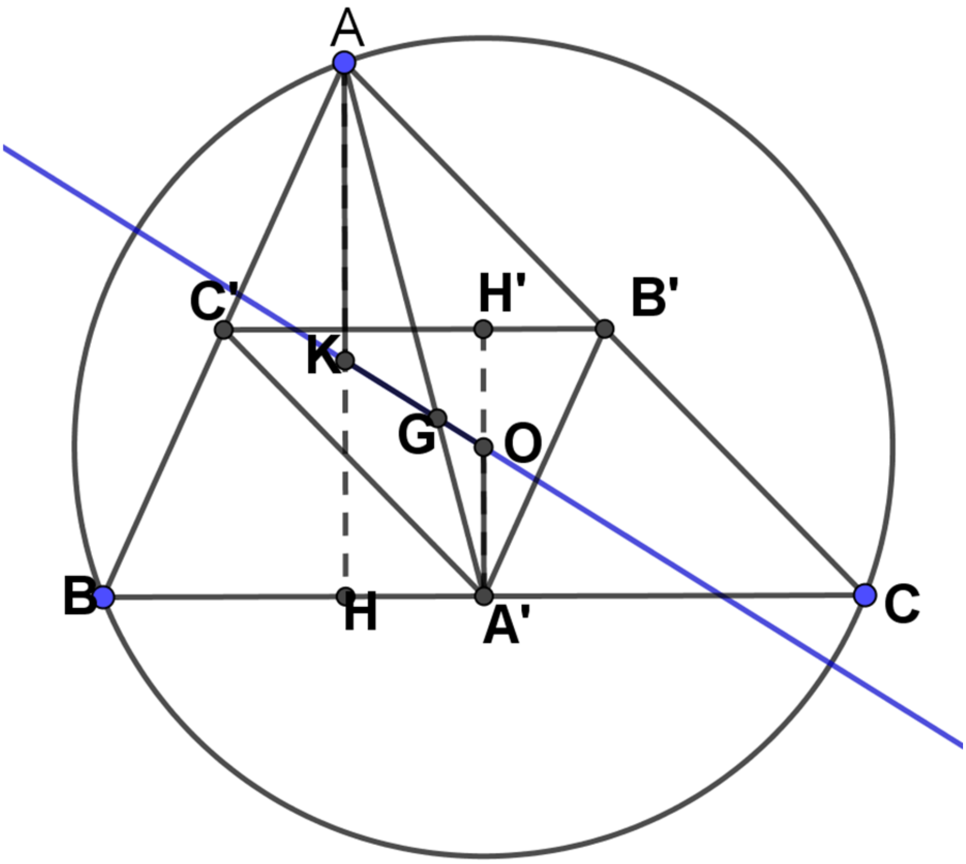
$m(BAD)=\alpha, m(DAC)=\beta,\ |AH|=x, |DH|=y, |BD|=z\ ve\ |BC|=a$ diyelim.

$$\tan(BAC)=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{z}{x+y}+\dfrac{a-z}{x+y}}{1-\dfrac{z}{x+y}\cdot\dfrac{a-z}{x+y}}=\frac{\dfrac{a}{x+y}}{1-\dfrac{z(a-z)}{(x+y)^2}}$$ olur. 4. İspatta ispatlandığı üzere $|AD||DH|=|BD||DC|$ idi yani $y(x+y)=z(a-z)$ olduğundan

$$\tan(BAC)=\frac{\dfrac{a}{x+y}}{1-\dfrac{z(a-z)}{(x+y)^2}}=\frac{\dfrac{a}{x+y}}{1-\dfrac{y(x+y)}{(x+y)^2}}=\frac{\dfrac{a}{x+y}}{\dfrac{x}{x+y}}=\frac{a}{x}=\frac{|BC|}{|AH|}$$ elde edilir.

6. Bir üçgenin diklik merkezi, çevrel çemberinin merkezi ve üçgensel bölgenin ağırlık merkezi aynı doğru üzerindedir. (Euler doğrusu)

İspat:



ABC üçgeninin kenar uzunlukları |BC|=a, |AC|=b, |AB|=c, çevrel çemberinin yarıçapı R, kenarlarının orta noktaları A', B' ve C' olsun. Çevrel çemberin merkezi kenar orta dikmelerinin kesişme noktasıdır. Bu nokta A'B'C' üçgeninin diklik merkezidir. ABC üçgeninin diklik merkezi K olsun. A'B'C' ile ABC üçgenleri benzerdir ve benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ dir. 1. Maddenin ikinci bölümünde hesaplandığı şekilde $|AH|=\frac{bc}{2R}$ olduğundan A'B'C' üçgeninde $|A'H'|=\frac{bc}{4R}$ olur.

Yine yukarıda hesaplandığı üzere $|BH|=\frac{c}{2R}\sqrt{4R^2-b^2}$ ve $|HC|=\frac{b}{2R}\sqrt{4R^2-c^2}$ olup $|KH|=\frac{|BH||CH|}{|AH|}$ den $|KH|=\frac{1}{2R}\sqrt{4R^2-b^2}\cdot\sqrt{4R^2-c^2}$ olur. Benzerlikten

$$\left|K'H'\right| = \frac{1}{4R}\sqrt{4R^2-b^2}\cdot\sqrt{4R^2-c^2}$$ olur.

$$\left|KA\right| = \left|AH\right| - \left|KH\right| = \frac{bc}{2R} - \frac{1}{2R}\sqrt{4R^2-b^2}\sqrt{4R^2-c^2} = \frac{1}{2R}\left(bc-\sqrt{4R^2-b^2}\sqrt{4R^2-c^2}\right)$$

$$\left|OA'\right| = \left|A'H'\right| - \left|OH'\right| = \frac{bc}{4R} - \frac{1}{4R}\sqrt{4R^2-b^2}\sqrt{4R^2-c^2} = \frac{1}{4R}\left(bc-\sqrt{4R^2-b^2}\sqrt{4R^2-c^2}\right)$$

O ve K noktalarından geçen doğru [AA’] kenarortayını G noktasında kessin. AH//A’H’ olduğundan iç açılarının ölçülerin

N eşliğinden GOA’ ile GKA üçgenleri benzerdir. Eğer benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ olursa G noktası kenarortay üzerinde $\frac{\left|GA'\right|}{\left|GA\right|} = \frac{1}{2}$ olur ki bu da G noktasının ABC üçgensel bölgesinin ağırlık merkezi olduğunu gösterir.

GOA’ ile GKA benzerilinde $\frac{\left|GO\right|}{\left|GK\right|} = \frac{\left|GA'\right|}{\left|GA\right|} = \frac{\left|OA'\right|}{\left|KA\right|} = \frac{\frac{1}{4R}\left(bc-\sqrt{4R^2-b^2}\sqrt{4R^2-c^2}\right)}{\frac{1}{2R}\left(bc-\sqrt{4R^2-b^2}\sqrt{4R^2-c^2}\right)} = \frac{1}{2}$ olur.

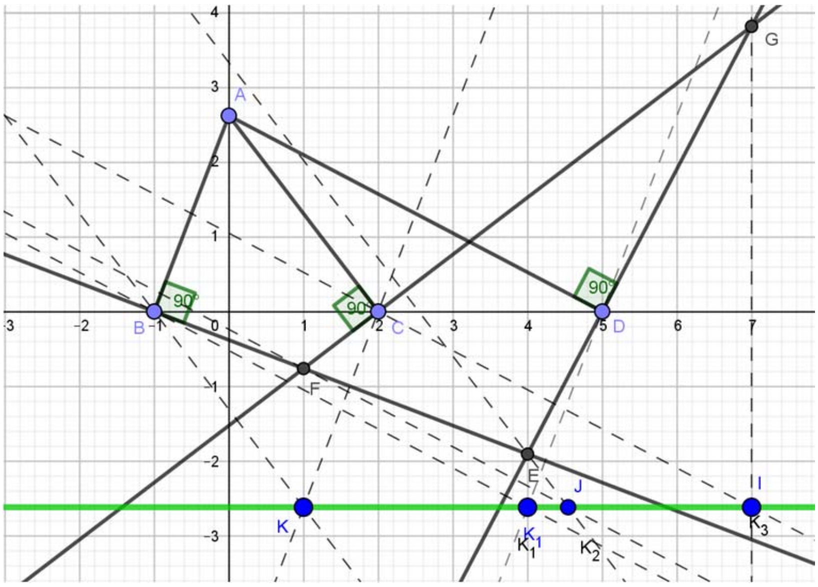
Yani $\frac{\left|GA'\right|}{\left|GA\right|} = \frac{1}{2}$ olur. Bu da G noktasının ABC üçgensel bölgesinin ağırlık merkezi olduğunu gösterir. Ve OK doğrusu üzerindedir. O halde K, G ve O noktaları doğrusaldır.

Bu doğruya Euler Doğrusu denir.

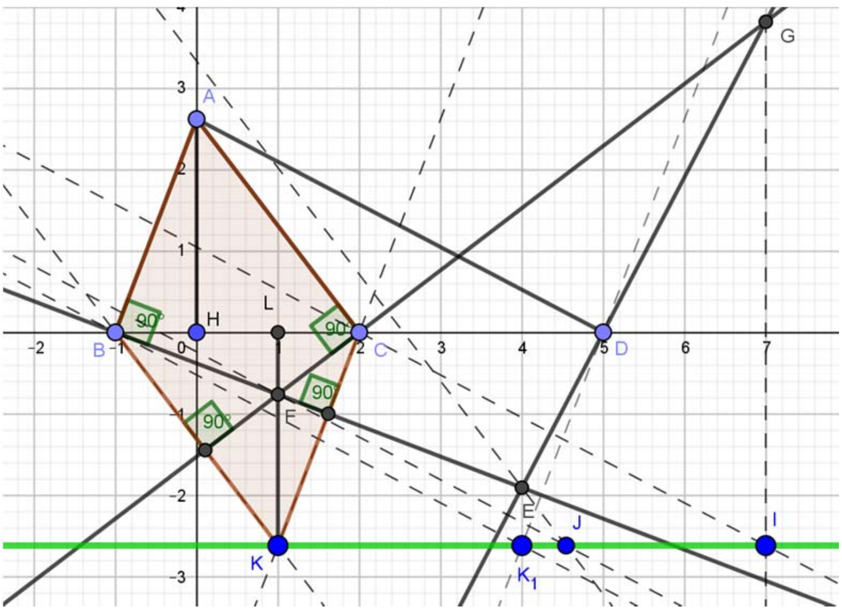
7. **Teorem:**

Bir d doğrusu ve dışında bir A noktası verilsin. d doğrusu üzerinde B, C ve D noktaları alalım. [AB], [AC] ve [AD] na sırasıyla B, C ve D noktalarından çizilen dikmelerin ikişer ikişer kesişerek oluşturdukları üçgen GEF olsun. Burada oluşan BFC, BED, GCD ve GEF üçgenlerinin diklik merkezleri aynı doğru üzerindedir.

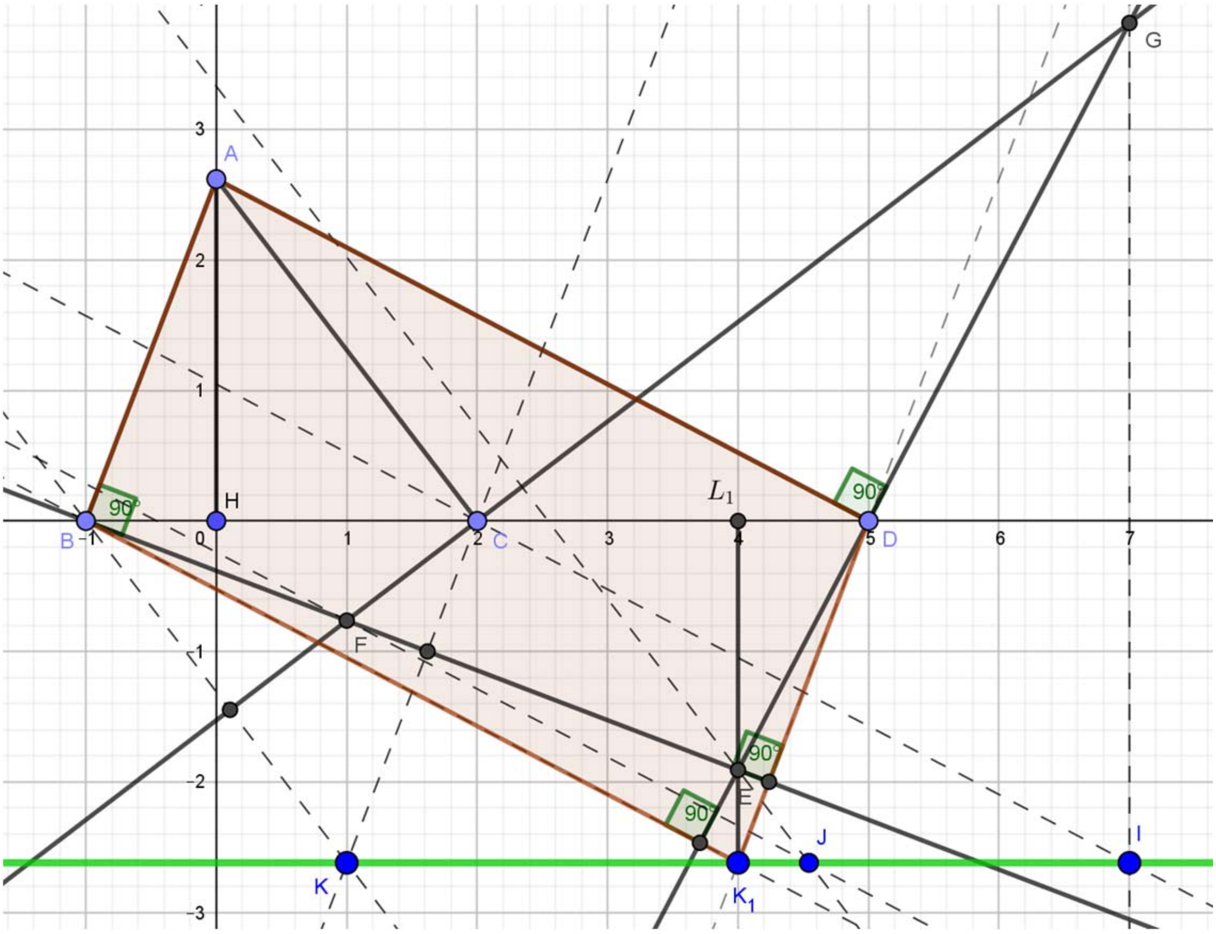
İspat:



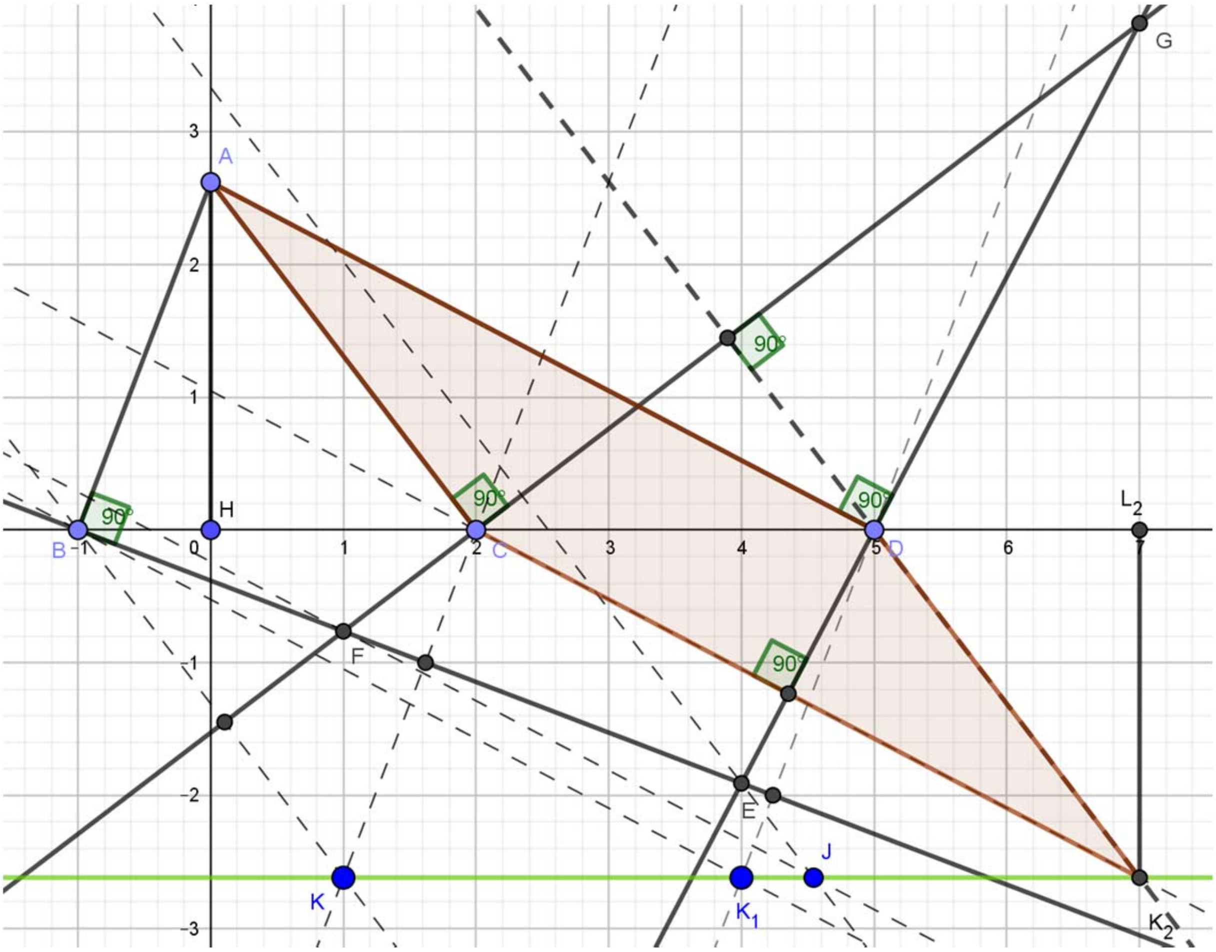
Şimdi ispatı adım adım ele alalım.



BFC üçgeninin diklik merkezi K olsun [BK] ve [AC], FC doğrusuna dik olduklarından paraleldir. [CK] ve [AB] BF doğrusuna dik olduklarından paraleldir. Yani ABKC paralelkenardır. Bu nedenle |AH|=|KL| olur.

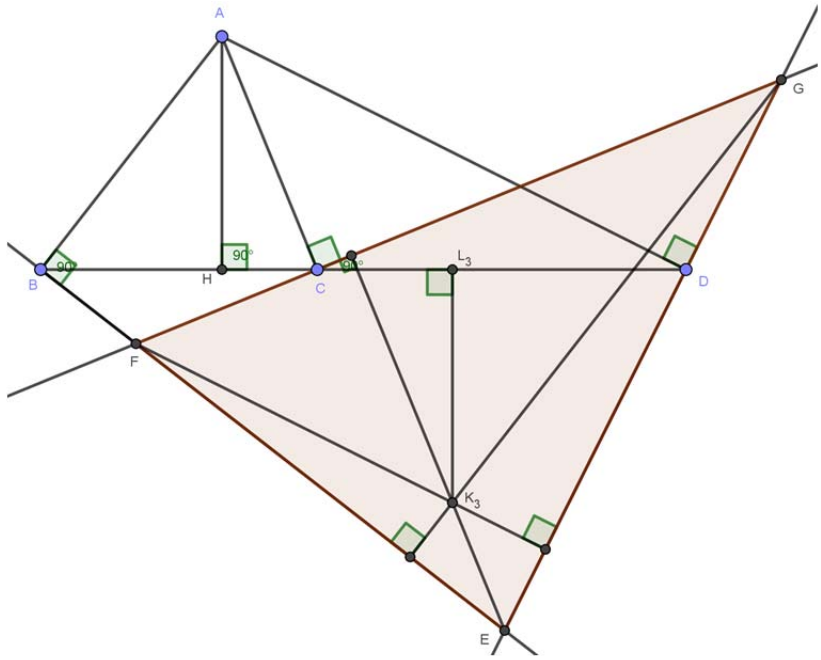


BED üçgeninin diklik merkezi K_1 olsun. [BK_1 ve [AD], DE doğrusuna dik olduklarından paraleldir. [DK_1 ve [AB], BE doğrysyna dik olduklarından paraleldir. Yani ABK_1D paralelkenardır. Paralelkenarın [BD] köşegenine dik olduklarından $|AH|=|K_1L_1|$ olur. Yani $|AH|=|KL|=|K_1L_1|$ olur.



GCD üçgeninin diklik merkezi K_2 olsun. [AC] ile [K_2D], CG doğrusuna dik olduklarından paraleldir. [K_2C] ile [AD] GD doğrusuna dik olduklarından paraleldir. Yani ACK_2D paralelkenardır bu paralelkenarın CD köşegenine dk olduklarından $|AH|=|K_2L_2|$ olacaktır. Yani $|AH|=|KL|=|K_1L_1|=|K_2L_2|$ olacaktır. Yani K, K_1 ve K_2 noktaları d doğrusundan |AH| kadar uzaklıktaki noktalardır ve bu noktalar d doğrusuna |AH| kadar uzaklıkta ve d doğrusuna paralel olan doğru üzerindedir.

Şimdi de GEF üçgeninin diklik merkezinin d doğrusuna |AH| kadar uzaklıkta olduğunu gösterelim.



Bunun için d doğrusunu x ekseni üzerine ve [AH] nı y ekseni üzerine ve H noktası orijine gelecek şekilde yerleştirelim.

$a, b, c\ ve\ d\ pozitif\ sayılar\ olmak$ üzere $A(0, a), B(-b, 0), C(c, 0) ve\ D(d, 0)$ olsun. |AH|=a kadardır. GEF üçgeninin diklik merkezi K_3 olsun. Eğer K_3 noktasının ordinatının mutlak değeri a olursa bu nokta K, K_1 ve K_2 noktaları gibi aynı d doğrusuna paralel olan doğru üzerinde olacaktır.

AB nun eğimi $\frac{a}{b}$, AC doğrusunun eğimi $-\frac{a}{c}$ ve AD doğrusunun eğimi $-\frac{a}{d}$ dir. Bu doğrulara dik olan doğruların denklemleri

$$EF\ nun\ denklemi\ y = -\frac{b}{a}(x + b) den\ bx + ay = -b^2$$

$$FG\ nun\ denklemi\ y = \frac{c}{a}(x - c)\ den - cx + ay = -c^2$$

$$EG\ nun\ denklemi\ y = \frac{d}{a}(x - d) dn - dx + ay = -d^2$$

dir.

F noktası EF ile FG doğrularının kesişme noktasıdır. Bu nokta

$$bx + ay = -b^2$$
$$-cx + ay = -c^2$$

$$taraf\ tarafa\ çıkarılırsa\ \ x = c - b\ ve\ y = -\frac{bc}{a}\ yani\ F\left(c - b, -\frac{bc}{a}\right)\ olur.$$

E noktası EF ile EG doğrularının kesişme noktasıdır. Bu nokta

$$bx + ay = -b^2$$
$$-dx + ay = -d^2$$

$$taraf\ tarafa\ çıkarılırsa\ x = d - b\ ve\ y = -\frac{bd}{a}\ yani\ E\left(d - b, -\frac{bd}{a}\right)\ olur.$$

G noktası FG ile EG doğrularının kesişme noktasıdır. Bu nokta

$$-cx + ay = -c^2$$
$$-dx + ay = -d^2$$
$$taraf\ tarafa\ çıkarılırsa\ x = c + d\ ve\ y = \frac{dc}{a}\ yani\ G\left(c + d, \frac{cd}{a}\right)\ olur.$$

GEF üçgeninin diklik merkezi F den EG doğrusuna çizilen dikme ile E den FG doğrusuna çizilen dikmenin kesişme noktasıdır.

F den EG doğrusuna çizilen dikmenin denklemi AD doğrusuna paralel olacağından

$$y + \frac{bc}{a} = -\frac{a}{d}(x - c + b) den\ a^2x + ady = -bcd + a^2c - a^2b$$

G den EF doğrusuna çizilen dikmenin denklemi AB doğrusuna paralel olduğundan

$$y - \frac{cd}{a} = \frac{a}{b}(x - c - d)\ den - a^2x + aby = bcd - a^2c - a^2d$$

Bu iki doğrunu denklemi taraf tarafa toplanırsa

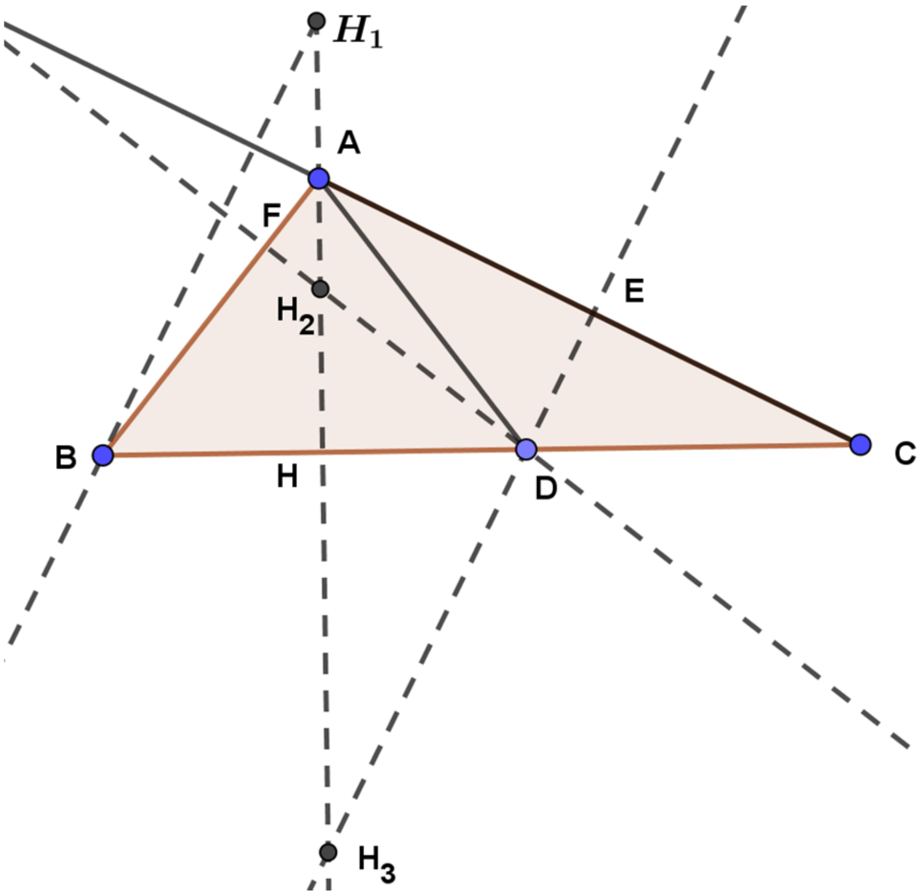
$$aby + ady = -a^2b - a^2d$$
$$(b + d)ay = -a^2(b + d) den\ y = -a$$

Olarak bulunur. Yani K_3 noktasının ordinatı $-a$ sayısıdır. d doğrusuna olan uzaklığı $|-a|$ olup K, K_1 ve K_2 noktaları ile aynıdır. Buna göre K, K_1, K_2 ve K_3 noktaları d doğrusundan a kadar uzaklıkta ve d doğrusuna paralel olan bir doğru üzerindedir.

8. Önerme:

Ortak köşeli ve bu köşenin karşısındaki kenar doğruları ortak olan üç üçgenin diklik merkezleri doğrusaldır.

İspat:

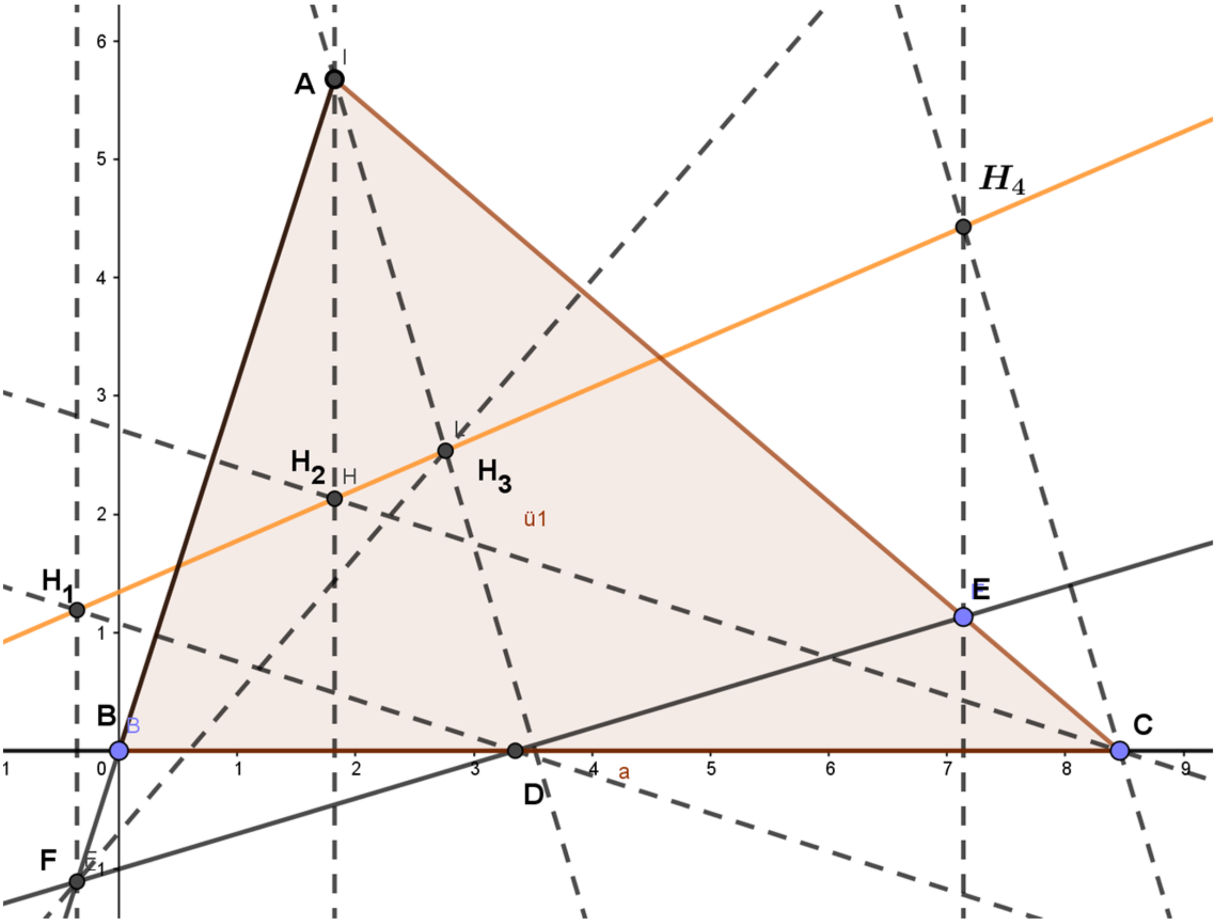


9.

A dan BC doğrusuna çizilen AH dikmesi ABD, ADB ve ABC üçgenlerinin ortak yüksekliğidir. B den AC na çizilen dikme ile AH doğrusunun kesişme noktası H_1 ABC üçgeninin diklik merkezidir. D den AB doğrusuna çizilen dikme ile AH doğrusunun kesişme noktası H_2 ABD üçgeninin diklik merkezidir. D den AC doğrusuna çizilen dikmenin AH doğrusunu kestiği nokta H_3 noktası ADC üçgeninin diklik merkezidir. Bu üç diklik merkezi AH doğrusu üzerindedir. Yani üç diklik merkezi doğrusaldır.

9. Önerme:

Bir üçgenin kenarlarını farklı noktalarda kesen bir doğrunun üçgenin kenarları ile oluşturduğu dört üçgenin diklik merkezleri bir doğru üzerindedir.



İspat:

$\boldsymbol{A(a,b), B(0,0), C(c,0)}$ olacak şekilde ABC üçgenini Dik koordinat sistemine yerleştirelim. $y = mx + n$ doğrusu AB kenarını F de, BC kenarını D de ve AC kenarını E de kessin. ABC, BDF, FAE ve CDE üçgenlerinin diklik merkezlerinin doğrusal olduğu ispatlanacaktır.

BC kenarı x ekseni üzerindedir. $y = mx + n$ doğrusunun x eksenini kestiği nokta $D\left(-\frac{n}{m},0\right)$ noktasıdır.

Üçgenin kenar doğruları AB doğrusu $y=\frac{b}{a}x$, AC doğrusunun denklemi $y=\frac{-b}{c-a}(x-c)$ ve BC doğrusu y = 0 şeklindedir.

ABC üçgeninin diklik merkezi C den AB doğrusuna çizilen dikme ile x = a doğrusunun kesişme noktasıdır. Bu nokta $y=-\frac{a}{b}(x-c) de\ x=a$ ve $c-a=d$ yazılırsa $H_2\left(a,\frac{ad}{b}\right)$ olur.

F noktasının koordinatlarını bulalım. Bu nokta AB ile $y=mx+n$ doğrusunun kesişme noktasıdır. $\frac{b}{a}x=mx+n$ denkleminden $x=\frac{an}{b-ma}\ ve\ y=\frac{bn}{b-ma}$ elde edilir. $b-ma=e$ yazılırsa $F\left(\frac{an}{e},\frac{bn}{e}\right)$ olur. BDF üçgeninin diklik merkezi D den AB doğrusuna çizilen dikme ile $x=\frac{an}{b-ma}$ doğrusunun kesişme noktasıdır. D den AB doğrusuna çizilen dikme $y=-\frac{a}{b}\left(x+\frac{n}{m}\right) de\ x=\frac{an}{b-ma}$ yazılırsa $y=-\frac{a}{b}\left(\frac{an}{b-ma}+\frac{n}{m}\right)=\frac{-a}{b}\left(\frac{man+nb-man}{m(b-ma)}\right)=\frac{-an}{m(b-ma)}$ olur.

Yani BDF üçgeninin diklik merkezi $H_1\left(\frac{an}{e},\frac{-an}{me}\right)$ olur.

H_1H_2 doğrusunun eğimi $\dfrac{\frac{-an}{me}-\frac{ad}{b}}{\frac{an}{e}-a}=\dfrac{-a\left(\frac{bn+dem}{bem}\right)}{a\left(\frac{n-e}{e}\right)}=\dfrac{bn+dem}{bm(e-n)}$ olur.

Şimdi CDE üçgeninin diklik merkezini bulalım. Bunun için önce E noktasının apsisini bulalım

Bu nokta $y=mx+n$ doğrusu ile AC doğrusunun kesişme noktasıdır.

$mx+n=-\frac{b}{d}(x-c)$ denkleminden $mx+n=-\frac{bx}{d}+\frac{bc}{d}\ dan\ x=\frac{bc-nd}{b+md}$ olarak bulunur. CDE üçgeninin diklik merkezi $x=\frac{bc-nd}{b+md}$ doğrusu ile Cden $y=mx+n$ doğrusuna çizilen dikmenin kesişme noktasıdır. C den $y=mx+n$ doğrusuna çizilen dikme $y=-\frac{1}{m}(x-c)$ de x yerine E nin apsisi yazılırsa CDE üçgeninin diklik merkezinin ordinatı

$y=-\frac{1}{m}\left(\frac{bc-nd}{b+md}-c\right)=-\frac{1}{m}\left(\frac{bc-nd-bc-mcd}{b+md}\right)=\frac{d(n+mc)}{m(b+md)}$ yani

$H_4\left(\frac{bc-nd}{b+md},\frac{d(n+mc)}{m(b+md)}\right)$ noktasıdır. Şimdi H_2H_4 doğrusunun eğimini bulalım.

$$\frac{\frac{d\left(n+mc\right)}{m\left(b+md\right)}-\frac{ad}{b}}{\frac{bc-nd}{b+md}-a}=\frac{d\left[\frac{bn+bmc-mab-m^2ad}{mb(b+md)}\right]}{\frac{bc-nd-ab-mad}{b+md}}=$$

$$\frac{d\left[\frac{bn+mbd-m^2ad}{mb(b+md)}\right]}{\frac{bd-nd-mad}{b+md}}=\frac{bn+md\left(b-ma\right)}{bm\left(b-ma-n\right)}=\frac{bn+dem}{bm(e-n)}$$

Olarak bulunur. Görüldüğü gibi $H_1H_2\ ile\ H_2H_4$ doğrularının eğimleri eşittir. Bu da H_1, H_2 ve H_4 noktalarının aynı doğru üzerinde olduklarını gösterir.

Şimidi de FAE üçgeninin diklik merkezini bulalım. Bu nokta F den AC doğrusuna çizilen dik doğru ile A dan EF doğrusuna çizilen dikmenin kesişme noktasıdır. A dan $y=mx+n$ doğrusuna çizilen dikmenin denklemi $y-b=-\frac{1}{m}\left(x-a\right)\ den\ y=\frac{-x}{m}+\frac{a+mb}{m}$ ve F den AC doğrusuna çizilen dikme $y-\frac{bn}{e}=\frac{d}{b}\left(x-\frac{an}{e}\right)\ den\ y=\frac{dx}{b}+\frac{n\left(b^2-ad\right)}{be}$ doğrusudur. Bu iki doğrusunun kesişme noktası

$\frac{dx}{b}+\frac{n\left(b^2-ad\right)}{be}=\frac{-x}{m}+\frac{a+mb}{m}$ denkleminden $\frac{dx}{b}+\frac{x}{m}=\frac{a+mb}{m}-\frac{n\left(b^2-ad\right)}{be}$

$$\frac{\left(b+md\right)x}{bm}=\frac{abe+b^2me-mnb^2+admn}{bme}\ den\ x=\frac{be(a+bm)-mn(b^2-ad)}{e(b+dm)}$$

$y=-\frac{1}{m}x+\frac{a+bm}{m}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$y=-\frac{1}{m}\left(\frac{be(a+bm)-mn(b^2-ad)}{e(b+dm)}\right)+\frac{a+bm}{m}=\frac{-be(a+bm)+mn(b^2-ad)+e(b+dm)(a+bm)}{me(b+dm)}$$

$$=\frac{(a+bm)\left[-be+be+dem\right]+mn\left(b^2-ad\right)}{me(b+dm)}=\frac{m\left(ade+bdem+b^2n-dna\right)}{me(b+dm)}$$

$y=\frac{ade+bdem+b^2n-adn}{be+dem}=\frac{de(a+bm)+n(b^2-ad)}{be+dem}$ olur. Yani FAE üçgeninin diklik merkezi

$H_3\left(\frac{be(a+bm)-mn(b^2-ad)}{e(b+dm)},\frac{de(a+bm)+n(b^2-ad)}{be+dem}\right)$ noktasıdır.

H_2H_3 doğrusunun eğimi

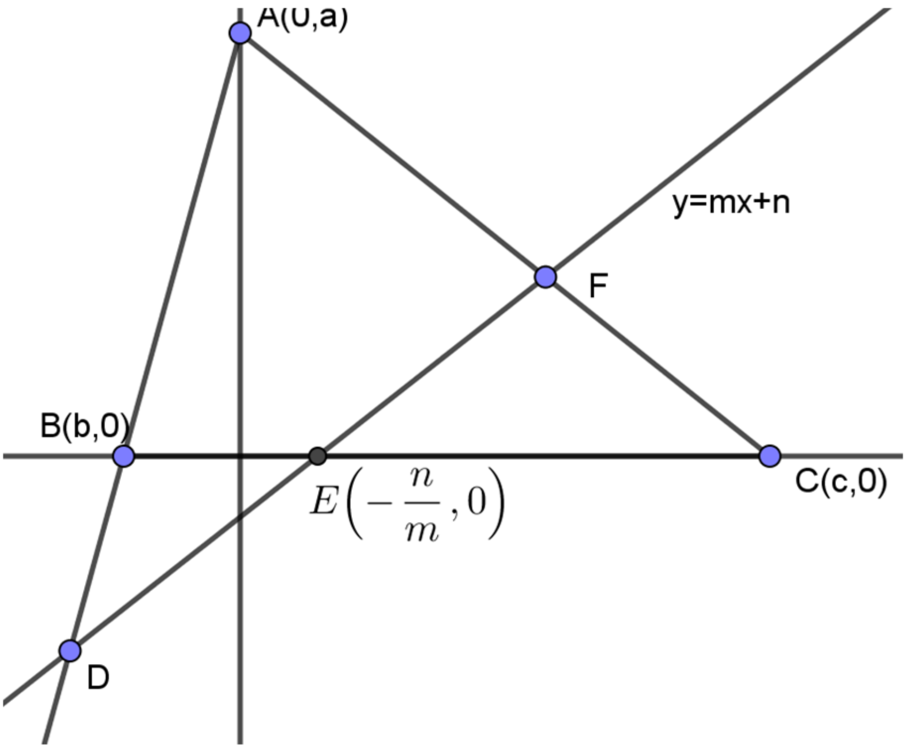
$$\frac{\dfrac{de(a+bm)+n(b^2-ad)}{be+dem}-\dfrac{ad}{b}}{\dfrac{be(a+bm)-mn(b^2-ad)}{e(b+dm)}-a}=\frac{\dfrac{abde+b^2dem+b^3n-abdn-abde-ad^2em}{b(be+dem)}}{\dfrac{abe+b^2em-b^2mn+admn-abe-adem}{be+dem}}=$$

$$\frac{\dfrac{dem(b^2-ad)+bn(b^2-ad)}{be(b+dm)}}{\dfrac{m\left[b^e e-b^2n+adn-ade\right]}{e(b+dm}}=\frac{\left(b^2-ad\right)\left(bn+dem\right)}{bm\left[e\left(b^2-ad\right)-n\left(b^2-ad\right)\right]}=\frac{\left(b^2-ad\right)\left(bn+dem\right)}{bm\left(b^2-ad\right)\left(e-n\right)}=\frac{\left(bn+dem\right)}{bm\left(e-n\right)}$$

olur. Bu sonuca göre $Eğim(H_1H_2) = Eğim(H_2H_3) = Eiğm(H_2H_4)$ olduğundan H_1, H_2, H_3 ve H_4 noktaları yani ABC, AFE, FBD ve DEC üçgenlerinin diklik merkezleri aynı doğru üzerindedir.

Bu teoremi üçgeni koordinat sistemine köşelerinin koordinatları $\boldsymbol{A(0,a)}, \boldsymbol{B(b,0)}\ \boldsymbol{ve}\ \boldsymbol{C(c,0)}$ olacak şekilde yerleştirelim.

Har üçgen dik koordinat sistemine $A(0,a), B(b,0) ve\ C(c,0)$ olacak şekilde yerleştirilebilir.



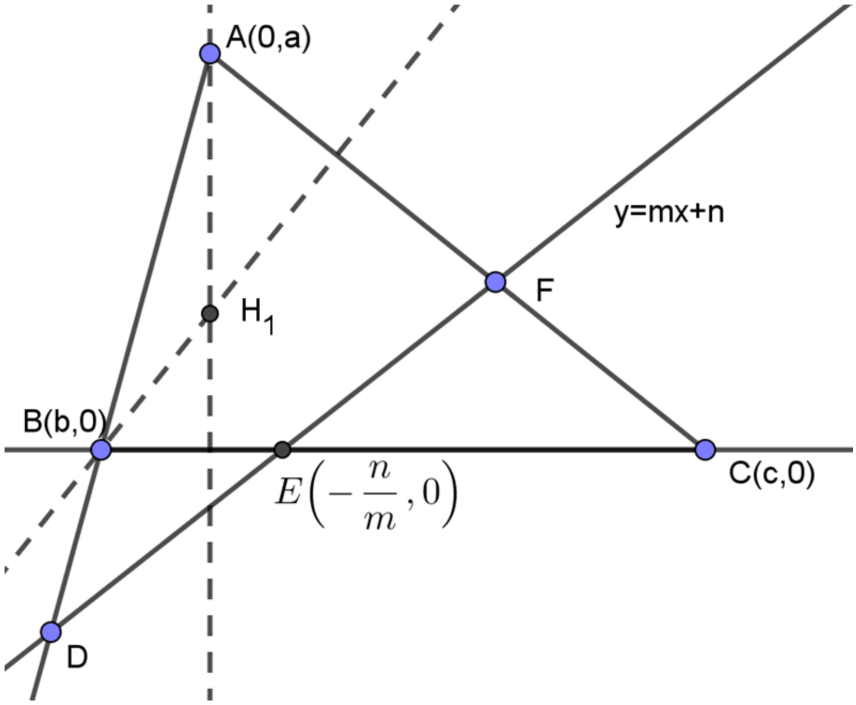
Bu durumda AB doğrusunun denklemi $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1\ den\ y=-\frac{a}{b}x+a$, BC doğrusunun denklemi $y=0$ ve AC doğrusunun denklemi $\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1\ den\ y=-\frac{a}{c}x+a$ şeklinde olur. $y=mx+n$ Doğrusu ile $y=0$ doğrusunun kesişme noktası $E\left(-\frac{n}{m},0\right)$ noktasıdır.

$y=mx+n$ Doğrusunun AB doğrusu ile kesişme noktasının apsisi $mx+n=-\frac{a}{b}x+a$ denkleminin çözümü $mx+\frac{a}{b}x=a-n\ den\ x=\frac{b(a-n)}{bm+a}$ olur $a-n=d\ ve\ bm+a=e$ dersek $x=\frac{bd}{e}$, ordinatı ise $y=-\frac{a}{b}\cdot\frac{bd}{e}+a=\frac{-ad+ae}{e}=\frac{a(e-d)}{e}$ $D\left(\frac{bd}{e},\frac{a(e-d)}{e}\right)$ olur.

$y = mx + n$ $doğrusunun$ AC doğrusu ile kesişme noktasının apsisi $mx + n = -\frac{a}{c}x + a$ denkleminin çözümünden $mx + \frac{a}{c}x = a - n$ den $x = \frac{c(a-n)}{cm+a}$, $cm + a = f$ dersek $x = \frac{cd}{f}$, ordinatı

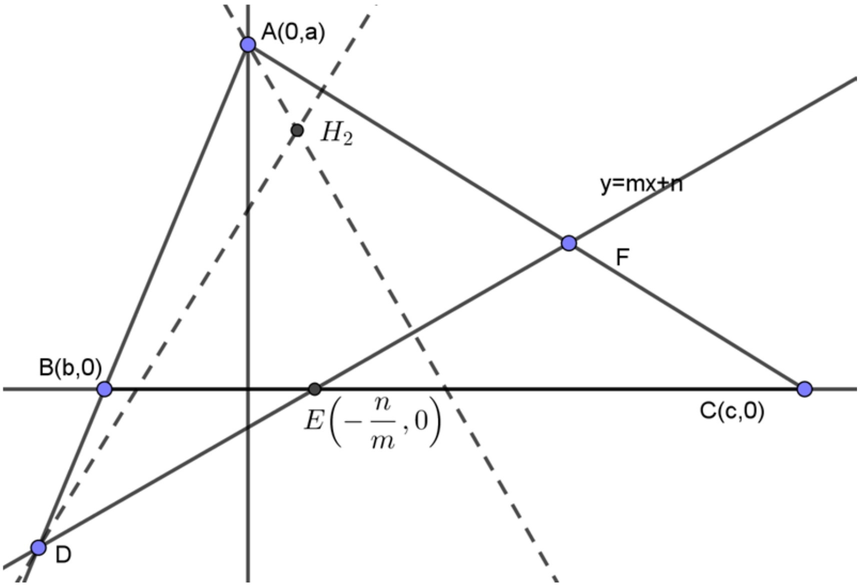
$y = -\frac{a}{c} \cdot \frac{cd)}{f} + a = \frac{-ad + af}{f} = \frac{a(f-d)}{f}$, $F\left(\frac{cd}{f}, \frac{a(f-d)}{f}\right)$ olur.

Önce ABC üçgeninin diklik merkezi $x = 0$ doğrusu ile B den AC doğrusuna çizilen dik doğrunun kesişme noktasıdır.



A dan BC doğrusuna çizilen dikme $x = 0$ doğrusudur. B den AC na çizilen dikmenin denklemi $y = \frac{c}{a}(x-b)$ de $x = 0$ yazılırsa H_1 noktası $H_1\left(0, -\frac{bc}{a}\right)$ olur.

ADF üçgeninin diklik merkezi D noktasından AC doğrusuna çizilen dikme ile F noktasından AB doğrusuna çizilen dikmenin kesişme noktasıdır.



D den AC doğrusuna çizilen dik doğrunun denklemi

$$y-\frac{a(e-d)}{e}=\frac{c}{a}\left(x-\frac{bd}{e}\right) \; den \; y=\frac{c}{a}\left(x-\frac{bd}{e}\right)+\frac{a(e-d)}{e}=\frac{c}{a}x+\frac{a^2(e-d)-bcd}{ae}$$ olur.

A dan $y = mx + n$ doğrusuna çizilen dik doğrunun denklemi $y-a=-\frac{1}{m}x \; den \; y=-\frac{1}{m}x+a$

Bu iki doğrunun kesişme noktasının apsisi $\frac{c}{a}x+\frac{a^2(e-d)-bcd}{ae}=-\frac{1}{m}x+a$ denkleminin

çözümünden $\frac{c}{a}x+\frac{1}{m}x=a-\frac{a^2(e-d)-bcd}{ae} \; den \; \frac{(cm+a)}{ma}x=\frac{a^2e-a^2(e-d)+bcd}{ae}$

$cm+a=f \; dersek \; \frac{f}{m}x=\frac{a^2e-a^2e+a^2d+bcd}{e} \quad den \; x=\frac{md(a^2+bc)}{ef}$ olur. Ordinatı ise

$$y=-\frac{1}{m}\cdot\frac{md(a^2+bc)}{ef}+a=\frac{aef-d(a^2+bc)}{ef}$$ olur. Yani $H_2\left(\frac{md(a^2+bc)}{ef},\frac{aef-d(a^2+bc)}{ef}\right)$

noktasıdır.

olur. Yukarıdaki denklemlerden birinde yerine yazılırsa

Şimdi H_1H_2 doğrusunun eğimini hesaplayalım

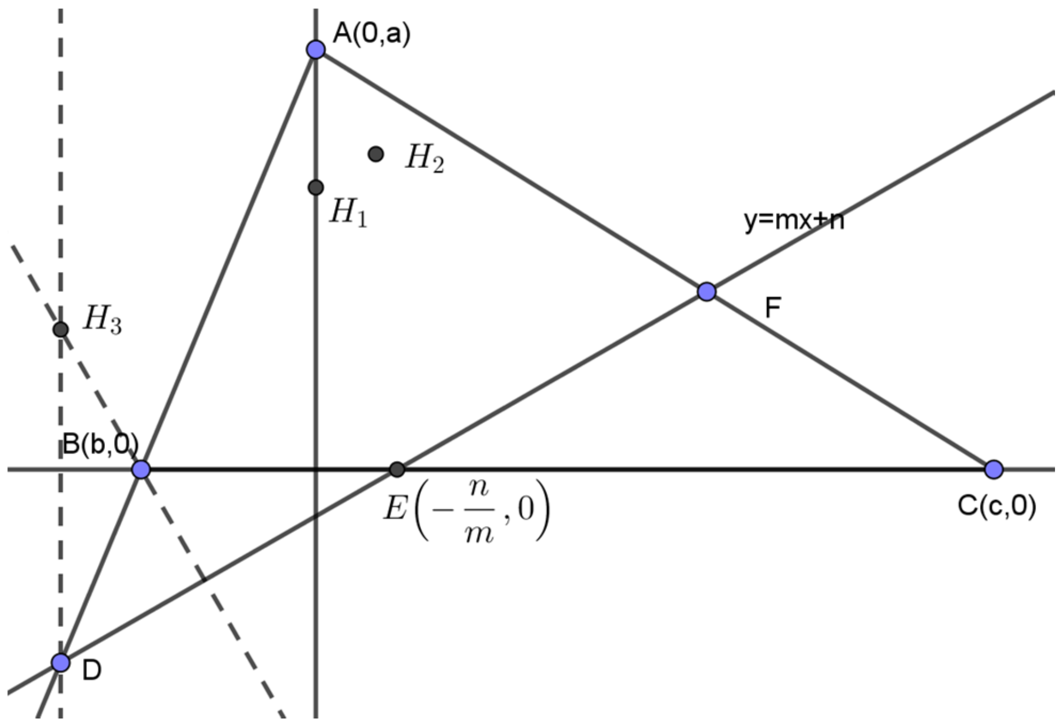
$$\frac{\dfrac{aef-d(a^2+bc)}{ef}+\dfrac{bc}{a}}{\dfrac{md(a^2+bc)}{ef}}=\frac{\dfrac{a^2ef-a^3d-abcd+bcef}{aef}}{\dfrac{md(a^2+bc)}{ef}}=\frac{ef(a^2+bc)-ad(a^2+bc)}{adm(a^2+bc)}=\frac{ef-ad}{adm}$$

$$=\frac{(bm+a)(cm+a)-a(a-n)}{adm}=\frac{bcm^2+abm+acm+a^2-a^2+an}{adm}$$

$$=\frac{bcm^2+abm+acm+an}{adm}$$

Olarak bulunur.

Şimdi BDE üçgeninin diklik merkezini bulalım



D noktasından BC doğrusuna çizilen dikme $x=\dfrac{b(a-n)}{bm+a}$ doğrusudur. B den $y=mx+n$ doğrusuna çizilen dik doğrunun denklemi

$y=-\dfrac{1}{m}(x-b)$ şeklindedir. BDE üçgeninin diklik merkezinin ordinatı

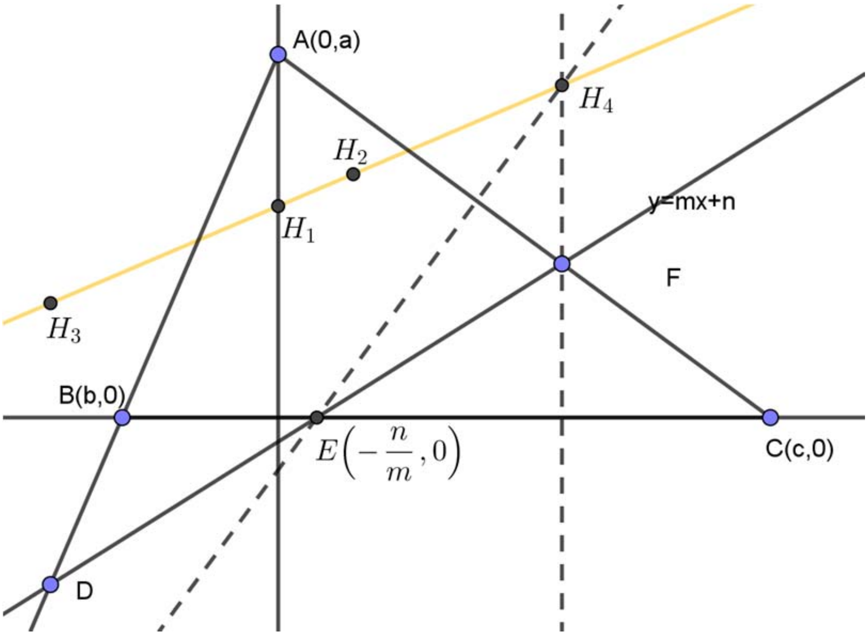
$y=-\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{b(a-n)}{bm+a}+\dfrac{b}{m}=\dfrac{b^2m+ab-ab+bn}{m(bm+a)}=\dfrac{b(bm+n)}{m(bm+a)}$ yani BDE üçgeninin diklik merkezi

$H_3\left(\dfrac{b(a-n)}{bm+a},\dfrac{b(bm+n)}{m(bm+a)}\right)$ olur. H_1H_3 doğrusunun eğimi

$$\frac{\dfrac{b(bm+n)}{m(bm+a)}+\dfrac{bc}{a}}{\dfrac{b(a-n)}{bm+a}}=\frac{b\left[\dfrac{a(bm+n)+cm(bm+a)}{ma(bm+a)}\right]}{\dfrac{b(a-n)}{bm+a}}=\frac{a(bm+n)+cm(bm+a)}{ma(a-n)}$$
$$=\frac{bcm^2+abm+acm+an}{adm}$$

yani Eğim (H_1H_2)=Eğim(H_1H_3) olduğundan H_1, H_2 ve H_3 doğrusaldır.

Şimdi de CEF üçgeninin diklik merkezini bulalım.



Bu noktanın apsisi F noktasının apsisidir. Yani $x=\frac{c(a-n)}{cm+a}$ dir.

E den AC doğrusuna çizilen dikmenin denklemi $y=\frac{c}{a}\left(x+\frac{n}{m}\right)$ denkleminde $x=\frac{c(a-n)}{cm+a}$ yazılırsa diklik merkezinin ordinatı bulunur.

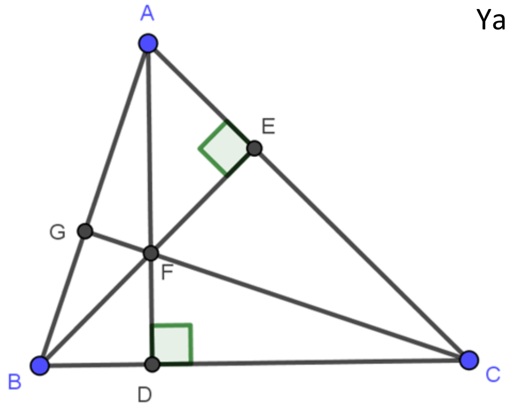
$$y=\frac{c}{a}\cdot\frac{c(a-n)}{cm+a}+\frac{cn}{ma}=\frac{mc^2(a-n)+c^2mn+acn}{ma(cm+a)}=\frac{ac^2m-c^2mn+c^2mn+acn}{afm}$$
$$=\frac{ac(cm+n)}{afm}=\frac{c(cm+n)}{fm}$$

Yani $H_4\left(\frac{c(a-n)}{f},\frac{c(cm+n)}{fm}\right)$ olur. Buna göre H_1H_4 doğrusunun eğimi

$$\frac{\frac{c(cm+n)}{(cm+a)m}+\frac{bc}{a}}{\frac{c(a-n)}{cm+a}}=\frac{\frac{ac(cm+n)+mbc(cm+a)}{ma(cm+a)}}{\frac{cd}{cm+a}}=\frac{c(acm+an+bcm^2+abm)}{acdm}$$
$$=\frac{bcm^2+abm+acm+an}{adm}$$

Olur. Yani $Eğim(H_1H_2)=Eğim(H_1H_3)=Eğim(H_1H_4)$ olduğundan bu noktalar doğrusaldır.

10. Teorem:



Yandaki şekilde $|FD| = \dfrac{|BD||DC|}{|AD|}$ dir.

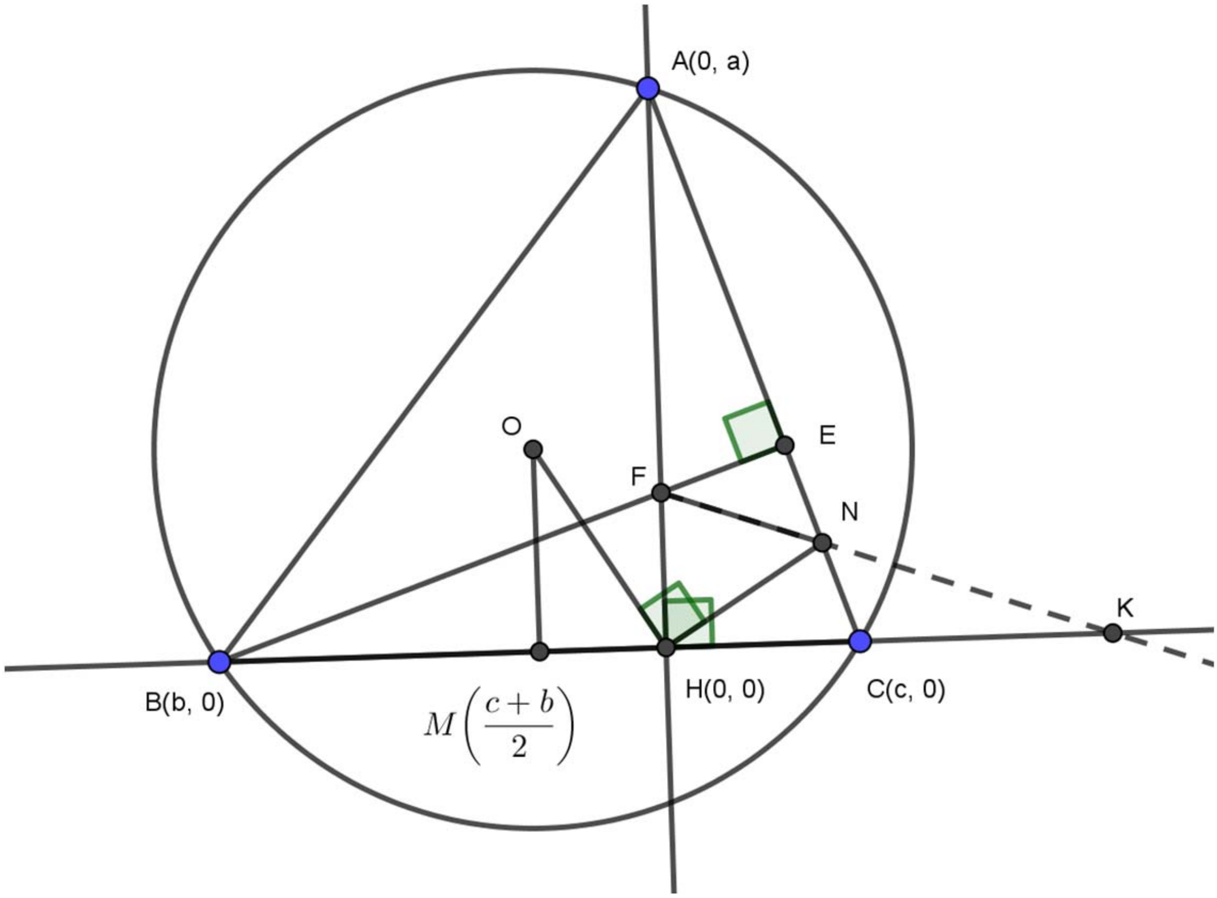
İspat:

Şekilde m(DAC)=m(EBC) olup FBD ile CAD üçgenleri benzerdir. Bu benzerlikten.
$\dfrac{|FD|}{|DC|} = \dfrac{|BD|}{|AD|}$ *den* $|FD| = \dfrac{|BD||DC|}{|AD|}$ sonucu elde edilir. Bu sonuçtan hareketle

$|FE| = \dfrac{|EC||EA|}{|BE|}$ ve $|FG| = \dfrac{|AG||GB|}{|CG|}$ elde edilir.

11.Özellik:

ABC üçgeninde O çevrel çemberin merkezi, F diklik merkezi olsun. H ve E dikme ayakları. [OH]⊥[HN] olmak üzere [FN∩BC={K} ise FBK üçgeni ikizkenardır.



İspat:

İspatı Analitik olarak yapacağız. Şekildeki gibi H(0, 0), A(0, a), B(b, 0) ve C(c, 0) olacak şekilde dik koordinat sistemine yerleştirilirse [BC] nin orta noktası $M\left(\frac{b+c}{2},0\right)$ olur.

AC doğrusunun eğimi $-\frac{a}{c}$ ve denklemi $y=-\frac{a}{c}(x-c)=-\frac{a}{c}x+a$ olur.

F noktası diklik merkezidie. |AH|=a, |HC|=c ve |BH|= – b olduğundan $|FH|\cdot|AH|=|BH|\cdot|HC|$ olduğundan $|FH|=-\frac{bc}{a}$ yani $F\left(0,-\frac{bc}{a}\right)$ olur.

O noktasının koordinatlarını bulmak için Kenarların orta dikmelerinin kesim noktasının bulunması gerekir. [AC] nın orta noktası $\left(\frac{c}{2},\frac{a}{2}\right)$ ve bu noktadan [AC] na çizilen dikmenin denklemi

$y-\frac{a}{2}=\frac{c}{a}\left(x-\frac{c}{2}\right)$ dir bu doğru ile [BC] nın orta dikmesi $x=\frac{b+c}{2}$ doğrusunun kesişme noktasının

ordinatı $y=\frac{c}{a}\left(\frac{b+c}{2}-\frac{c}{2}\right)+\frac{a}{2}=\frac{a^2+bc}{2a}$ dan $O\left(\frac{b+c}{2},\frac{a^2+bc}{2a}\right)$ noktasıdır.

Buna göre OH doğrusunun eğimi $\frac{\frac{a^2+bc}{2a}}{\frac{b+c}{2}}=\frac{a^2+bc}{a(b+c)}$ olur. H noktasından OH doğrusuna çizilen dik

doğrunun denklemi $y=-\frac{a(b+c)}{a^2+bc}x$ olur. Bu doğru ile AC doğrusunun kesişme noktası

$-\frac{a}{c}x+a=-\frac{a(b+c)}{a^2+bc}\ den\ x\left(\frac{1}{c}-\frac{b+c}{a^2+bc}\right)=1$ olur. Düzenlenirse

$x\left(\frac{a^2+bc-bc-c^2}{c(a^2+bc)}\right)=1\ den\ x=\frac{a^2c+bc^2}{a^2-c^2}$ ve

$y=-\frac{a}{c}\cdot\frac{c(a^2+bc)}{a^2-c^2}+a=\frac{-a^3-abc+a^3-ac^2}{a^2-c^2}=\frac{-ac(b+c)}{a^2-c^2}$ olur. Yani

$N\left(\frac{a^2c+bc^2}{a^2-c^2},\frac{-ac(b+c)}{a^2-c^2}\right)$ olur.

FB doğrusunun x ekseni ile yaptığı açımım ölçüsü α, olsun $\tan\alpha=\frac{|FH|}{|BH|}=\frac{-\frac{bc}{a}}{-b}=\frac{c}{a}$ olur.

FN doğrusun x ekseni ile yaptığı açının ölçüsü β olsun

$\tan\beta=\frac{\frac{-ac(b+c)}{a^2-c^2}-\left(-\frac{bc}{a}\right)}{\frac{a^2c+bc^2}{a^2-c^2}-0}=\frac{\frac{-a^2bc-a^2c^2+a^2bc-bc^3}{a(a^2-c^2)}}{\frac{c(a^2+bc)}{a^2-c^2}}=\frac{-c^2\left(a^2+bc\right)}{ac\left(a^2+bc\right)}=-\frac{c}{a}$ olur. Yani α ile β bütünlerdir. FBK üçgeninde β, K köşesindeki dış açının ölçüsüdür. Buna göre aynı köşede iç açının ölçüsü α olup m(FBK)=m(FKB olur ki nu da FBK üçheninin ikizkenar olması demektir.

Hatırlatma: Bir doğrunun eğimi x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının tanjantıdır.

Bu nedenle FN doğrusunun eğimi FBK üçgeninin K köşesindeki dış açının tanjantı olur.

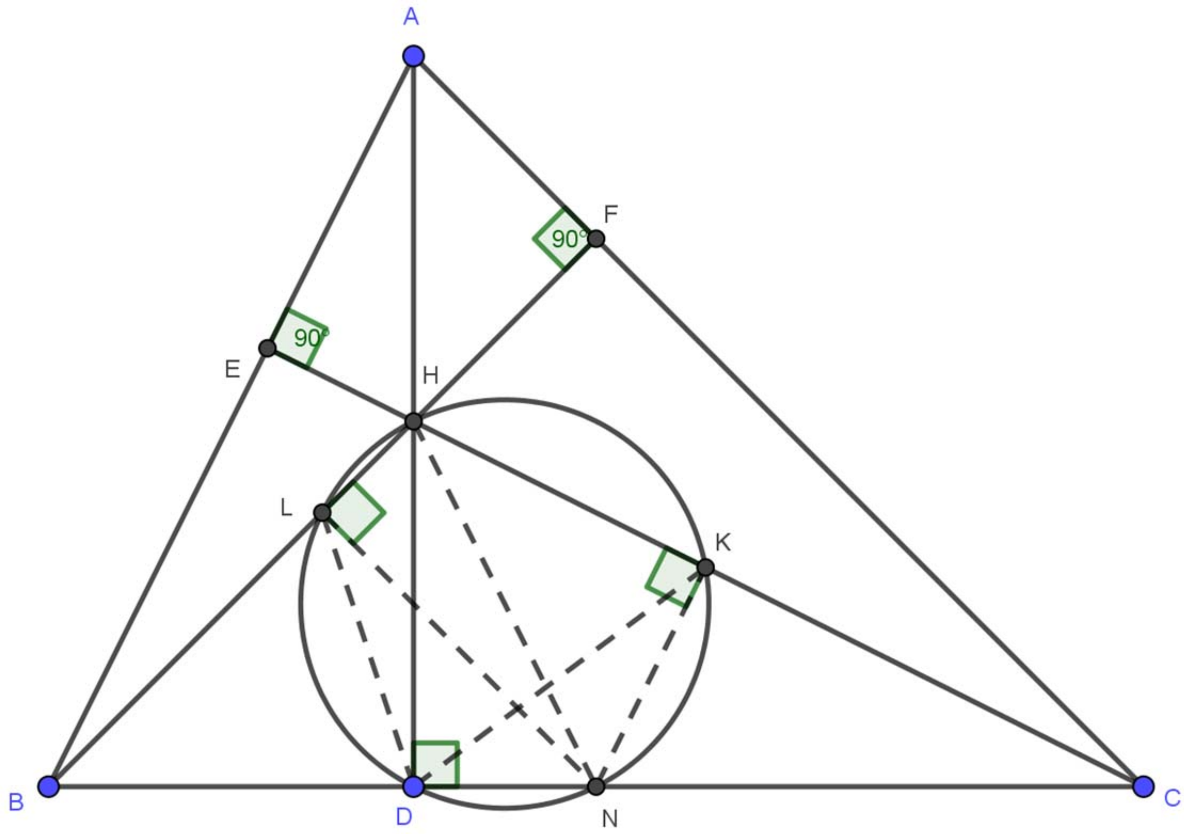
12.Özellik

Teorem.

Bir üçgende iki köşeden çizilen yüksekliklerin orta noktaları, diklik merkezi ve üçüncü köşeden çizilen yüksekliğin dikme ayağı aynı çember üzerindedir.

İspat:

Sentetik ispat:



ABC üçgeninin yükseklikleri]AD], [BF] ve [CE] ve diklik merkezi H olsun. [BF] nin orta noktası L, [CE] nin orta noktası K olsun. [BC] nin orta noktasına N diyelim. FBC üçgeninde orta noktaları birleştirdiğinden [NL]//[CF], m(NLH)=90 ve m(NDH)=90 olduğundan N, D ve L [HL] çaplı çember üzerindedir.

EBC üççgeninde [NK] orta noktaları birleştirdiğinden [NK]//[BE] ve m(NKH)=90 ve K noktası [NH] çaplı çember üzerinde olduğundan H, L, D, N ve K noktaları aynı çember üzerindedir.

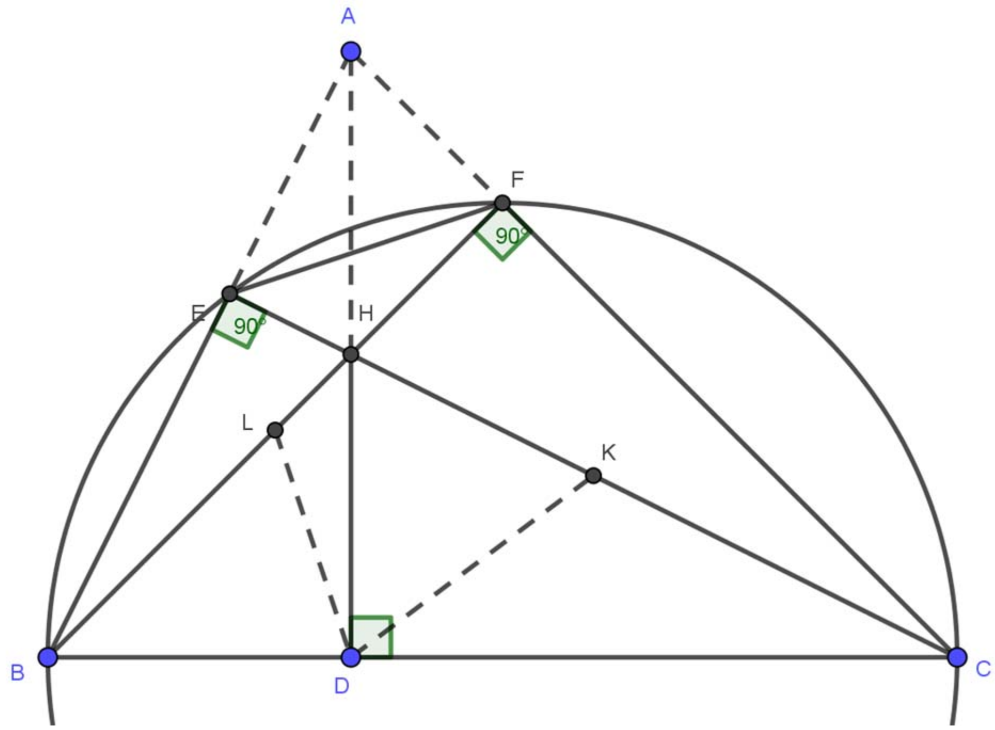
Sonuçlar:

1. $\boldsymbol{m(LDK) = m(LNK) = m(BAC)dir}$.
   AEHF kirişler dörtgeni olduğundan m(EAF)+m(EHF)=180 ve ters açı olduklarından m(EHF)=m(LHK) olur. HLDK kirişler dörtgeni olduğundan m(LDK)+m(LHK)=180 ve dolayısıyla

m(LDK)+m(EHF)=180 ve yukarıda ispatlandığı üzere m(LNK)+m(EHF)=180 olur. Bu durumda m(LDK)=m(LNK)=m(A) olacaktır.

Yani bir üçgende iki yüksekliğin orta noktalarını üçüncü yüksekliğin dikme ayağı ile birleştirildiğinde oluşan açının ölçüsü, bu üçgenin bu yüksekliğin çizildiği köşedeki açının ölçüsüne eşittir.

2. **Bir kenarı çap olan bir kirişler dörtgeninde iki köşegenin orta noktaları ile köşegenlerin kesişme noktasından çapa çizilen dikme ayağını birleştiren doru parçalarının oluşturduğu açı ile çapı iki ucundaki dörtgenin açıları bütünlerdir.**

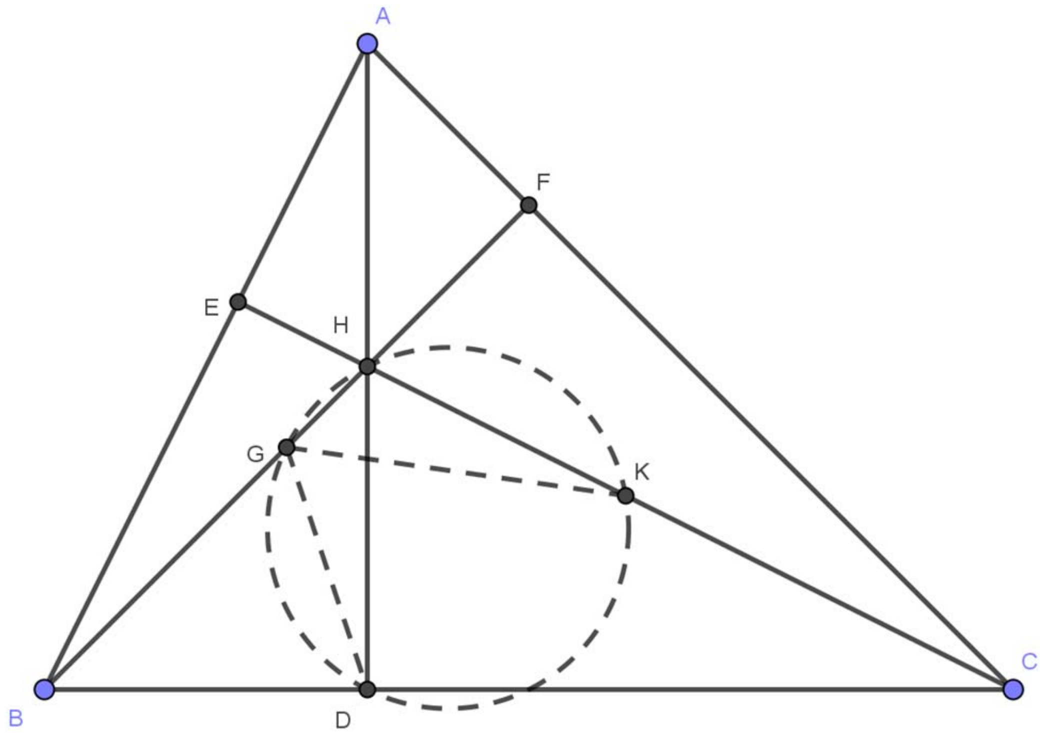


Yukarıdaki şekilde [BC] çap. BEFC kirişler dörtgeni ve [BC] çaptır. [BE ile [CF nin kesişme noktası A olsun. ABC üçgeninde [BF], [CE] ve [AD] ABC üçgeninin yükseklikleri , L ve K noktaları yüksekliklerin orta noktaları ve D bu üçgende A köşesinden çizilen yükseklik ayağıdır. Bu nedenle yukarıda ispatlandığı üzere m(LDK)=m(A) ve üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamından

$$m(A) + m(B) + m(C) = m(LDK) + m(EBC) + m(FCB) = 180$$

Olur.

Analitik İspat:



A dan [BC] kenarına çizilen x = o doğrusu olursa A dan [BC[kenarına çizilen yükseklik [AD] ve D(0, 0) olur. Bu durumda ABC üçgenimiz olsun. Bu üçgeni A(0, a), B(b, 0) ve C(c, 0) olacak şekilde dik koordinat sistemine yerleştirilmiş olur.

AB doğrusunun denklemi $y=-\dfrac{a}{b}x+a$ dır. Buna dik olan CF doğrusunun denklemi

$y=\dfrac{b}{a}(x-c)=\dfrac{b}{a}x-\dfrac{bc}{a}\ dir.$ Bu iki doğrunun kesişme noktası

$-\dfrac{a}{b}x+a=\dfrac{b}{a}x-\dfrac{bc}{a}\ dan\ x=\dfrac{b(a^2+bc)}{a^2+b^2}\ ve\ y=\dfrac{ab(b-c)}{a^2+b^2}$ ve $F\left(\dfrac{b(a^2+bc)}{a^2+b^2},\dfrac{ab(b-c)}{a^2+b^2}\right)$ olur.

[CF] nın orta noktası $K\left(\dfrac{\dfrac{b(a^2+bc)}{a^2+b^2}+c}{2},\dfrac{\dfrac{ab(b-c)}{a^2+b^2}+0}{2}\right)\ den\ K\left(\dfrac{a^2(b+c)+2b^2c}{2(a^2+b^2)},\dfrac{ab(b-c)}{2\left(a^2+b^2\right)}\right)$

olur.

AC doğrusunun denklemi $y=-\frac{a}{c}x+a$, buna dik olan BE doğrusunun denklemi

$y=\frac{c}{a}x-\frac{bc}{a}$ şeklinde olup bu iki doğrunun kesişme noktası

$-\frac{a}{c}x+a=\frac{c}{a}x-\frac{bc}{a}$ den $x=\frac{c(a^2+bc)}{a^2+c^2}$ ve $y=\frac{ac(c-b)}{a^2+c^2}$ den $E\left(\frac{c(a^2+bc)}{a^2+c^2},\frac{ac(c-b)}{a^2+c^2}\right)$

noktasıdır. [BE] nın orta noktası $G\left(\frac{\frac{c(a^2+bc)}{a^2+c^2}+b}{2},\frac{\frac{ac(c-b)}{a^2+c^2}}{2}\right)$ düzenlenirse bu nokta

$G\left(\frac{a^2(b+c)+2bc^2}{2(a^2+c^2)},\frac{ac(c-b)}{2(a^2+c^2)}\right)$

Bu üçgenin diklik merkezi ABC üçgeninde |BD|DC|=|HD|AD| olduğundan $H\left(a,-\frac{bc}{a}\right)$ olur

burada $-\boldsymbol{b}>\mathbf{0}$ dır. noktası olur.

GK doğrusunun eğimi

$$\frac{\frac{ac(c-b)}{2\left(a^2+c^2\right)}-\frac{ab(b-c)}{2\left(a^2+b^2\right)}}{\frac{a^2(b+c)+2bc^2}{2\left(a^2+c^2\right)}-\frac{a^2(b+c)+2b^2c}{2(a^2+b^2)}}=\frac{a(c-b)\left(\frac{c}{\left(a^2+c^2\right)}+\frac{b}{\left(a^2+b^2\right)}\right)}{\left(\frac{a^2(b+c)}{\left(a^2+c^2\right)}-\frac{a^2(b+c)}{(a^2+b^2)}+\frac{2bc^2}{(a^2+c^2)}-\frac{2b^2c}{(a^2+b^2)}\right)}$$

$$=\frac{a(c-b)\left(\frac{a^2c+b^2c+a^2b+bc^2}{\left(a^2+c^2\right)\left(a^2+b^2\right)}\right)}{\frac{a^2\left(b+c\right)\left[a^2+b^2-a^2-c^2\right]+2bc\left[a^2c+b^2c-a^2b-bc^2\right]}{\left(a^2+c^2\right)\left(a^2+b^2\right)}}=$$

$$\frac{a\left(c-b\right)(c+b)\left(a^2+bc\right)}{a^2(b+c)\left(b^2-c^2\right)+2bc\left(a^2(c-b)-bc(c-b)\right)}$$

$$=\frac{a\left(c-b\right)(c+b)\left(a^2+bc\right)}{(c-b)\left[-a^2(b+c)^2+2bc(a^2-bc)\right]}=\frac{a(c+b)\left(a^2+bc\right)}{\left[-a^2(b+c)^2+2bc(a^2-bc)\right]}$$

$$=\frac{-(ab+ac)(a^2+bc)}{a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2-2a^2bc+2b^2c^2}=\frac{-(a^3b+ab^2c+a^3c+abc^2)}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+b^2c^2}$$

$$=\frac{-[ab(a^2+c^2)+ac(a^2+b^2)]}{b^2(a^2+c^2)+c^2(a^2+b^2)}$$

$a^2+c^2=p$ ve $a^2+b^2=q$ denirse GK nın eğimi $m_1=\frac{-abp-acq}{b^2p+c^2q}$ şeklinde yazılır.

HK nin eğimi CE doğrusunun eğimidir ve $m_2 = \dfrac{b}{a}$ dir. Şimdi tan(HKG) değerini hesaplayalım.

$$m(HKG) = \beta \ ise \ \tan(\beta) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{\dfrac{-a(bp+cq)}{b^2p + c^2q} - \dfrac{b}{a}}{1 + \dfrac{-a(bp+cq)}{b^2p+c^2q} \cdot \dfrac{b}{a}} = \frac{\dfrac{-a^2bp - a^2cq - b^3p - bc^2q}{a\left(b^2p + c^2q\right)}}{\dfrac{b^2p + c^2q - b^2p - bcq}{b^2p + c^2q}}$$

$$= \frac{-bp\left(a^2+b^2\right) - cq\left(a^2+bc\right)}{acq(c-b)} = \frac{-bpq - cq(a^2+bc)}{acq(c-b} = \frac{-bp - c(a^2+bc)}{ac(c-b)}$$

$$= \frac{-a^2(b+c) - 2bc^2}{ac(c-b)} \qquad (I)$$

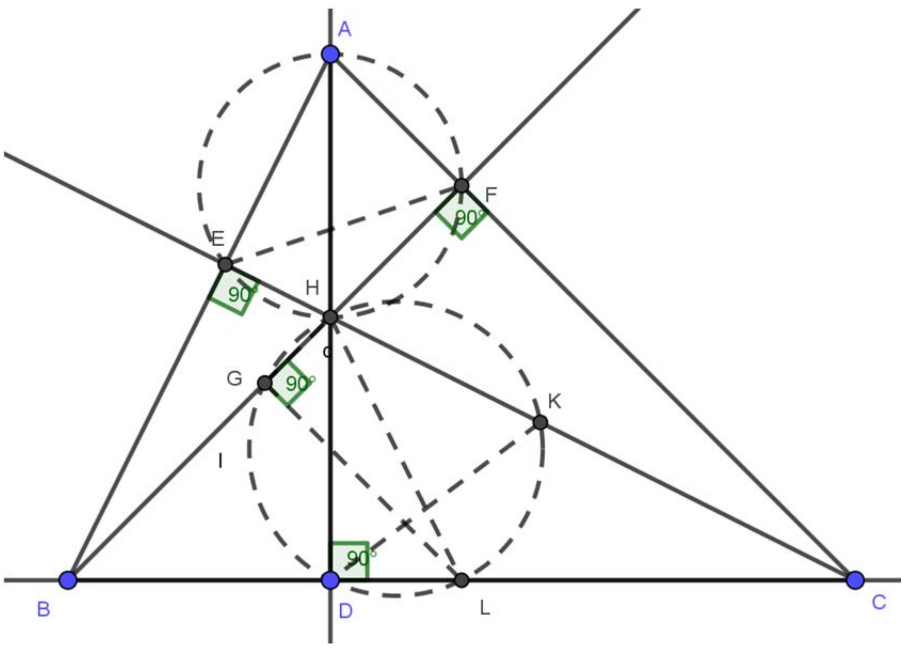
Olur.

GD nin eğimi $m(GDH) = \alpha \ ise \ \tan\left[90+\alpha\right] = \dfrac{ac(c-b)}{a^2(b+c)+2bc^2} = -\cot(\alpha)$ olur. Bu durumda

$\tan(\alpha) = \dfrac{1}{\cot(\alpha)} = -\dfrac{1}{Eğim(GD)}$ olur yani $\tan(\alpha) = \dfrac{-a^2(b+c) - 2bc^2}{ac(c-b)} \quad (II)$ olur.

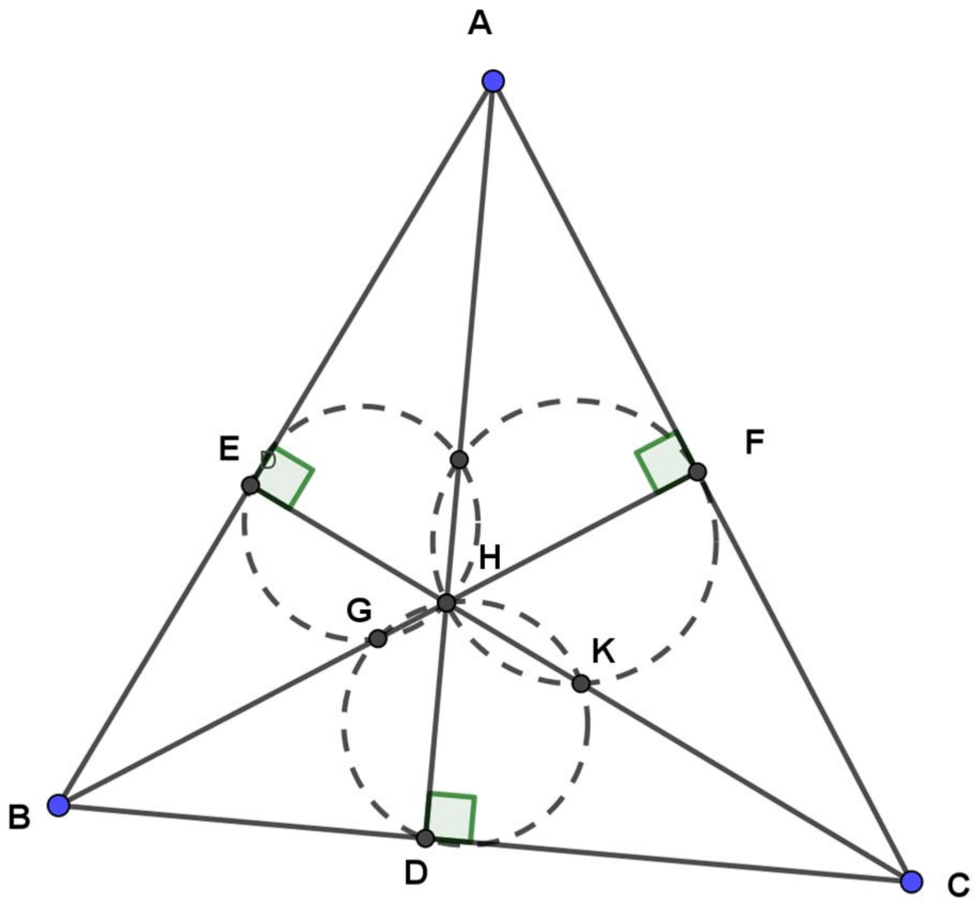
Görüldüğü üzere (I) (II) den tan(α)=tan(β) olduğundan m(GDH)=m(GKH) olur. Bu durumda D ve K noktaları]GH] doğru parçasını eş açı altında gören noktalar olduklarından HGDK kirişler dörtgenidir ve H, G, D, K noktaları bir çember üzerindedir. Bundan faydalanarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır;

1. GDK ile GHK açıları bütünlerdir.
2. AEHF kirişler dörtgeni olduğundan üçgenin A açısı ile EHF bütünlerdir. EHF ile GHK ters açılar olduğundan ölçüleri eşittir bundan dolayı m(A)=m(GDH) olur.
3. Üçgende m(A)+m(B)+m(C)=180 olduğundan m(B)+m(GDH)+m(C)=180 olur.
4.



GDKH dörtgeninin çevrel çemberinin [BC] kenarıı kestiği nokta L olsun m(HDL)=90 olduğundan [HL] bu çemberin çapıdır. Çapı gördüğü için m(HGL)=90 olup [GL]//[AC] olur. G noktası [BF] nin orta noktası olduğundan L noktası [BC] nin ortası olur.

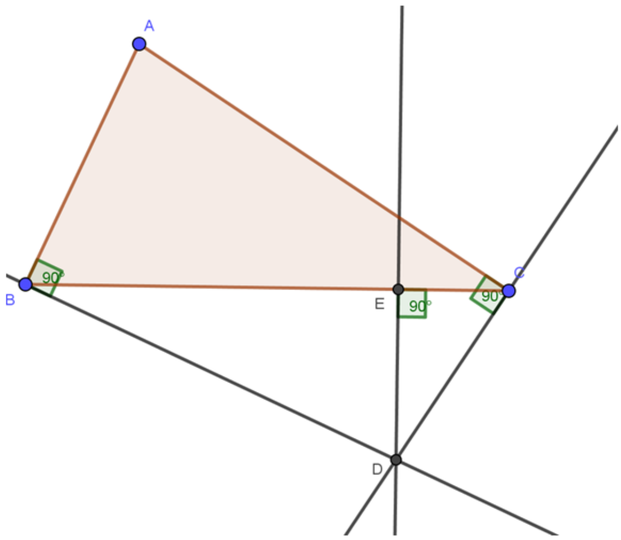
5.



Dikkat edilirse ABC üçgeninin yükseklikleri teoremdeki çemberlerin ikişer ikişer kuvvet eksenleridir. Bu durumda üçgenin diklik merkezi bu çemberlerin kuvvet merkezidir.

Üçgenin Alanına farklı bir yaklaşım

Teorem:



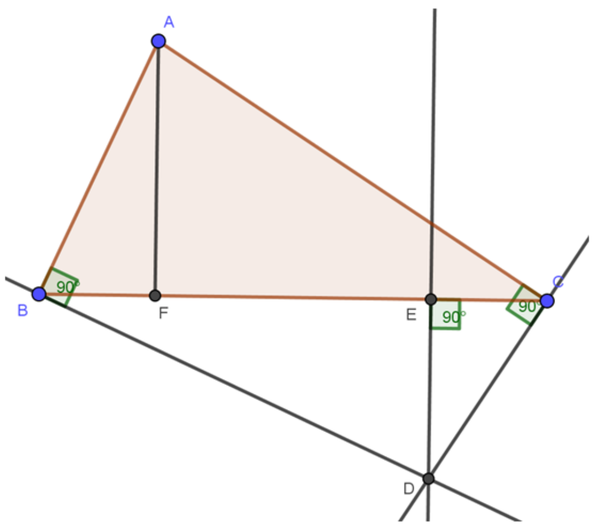
Bir ABC üçgeninin herhangi iki köşesi B ve C yi alalım. B den [AB] kenarına, C den [AC] kenarına çizilen dik doğruların kesişme noktası D olsun. D den [BC] kenarına çizilen dik doğrunun [BC] kenarını kestiği nokta E olsun. Bu üçgenin alanı A(ABC) ise

$$A(ABC) = \frac{|BE||EC||BC|}{2|DE|}$$

ile hesaplanır.

İspat:

1. Üçgen dar açılı olsun



A köşesinden BC kenarına AF dikmesini çizelim.
|AF|=h, |BF|=d, |BE -=x, |EC|=y ve |DE|=z diyelim.

ABF ile BDE üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{|BF|}{|DE|}=\frac{|AF|}{|BE|}$ den $\frac{d}{z}=\frac{h}{x}$ buradan $hz = xd$

AFC ile CED üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{|FC|}{|ED|}=\frac{|AF|}{|CE|}$ den $\frac{x+y-d}{z}=\frac{h}{y}$ buradan

$hz = (x+y)y - yd$ olur.

$$hz = xd$$
$$hz = (x+y)y - yd$$

Bu iki denklemden d yok edilirse $h=\frac{xy}{z}$ $yani$ $|AF|=\frac{|BE||EC|}{|DE|}$ olarak bulunur.

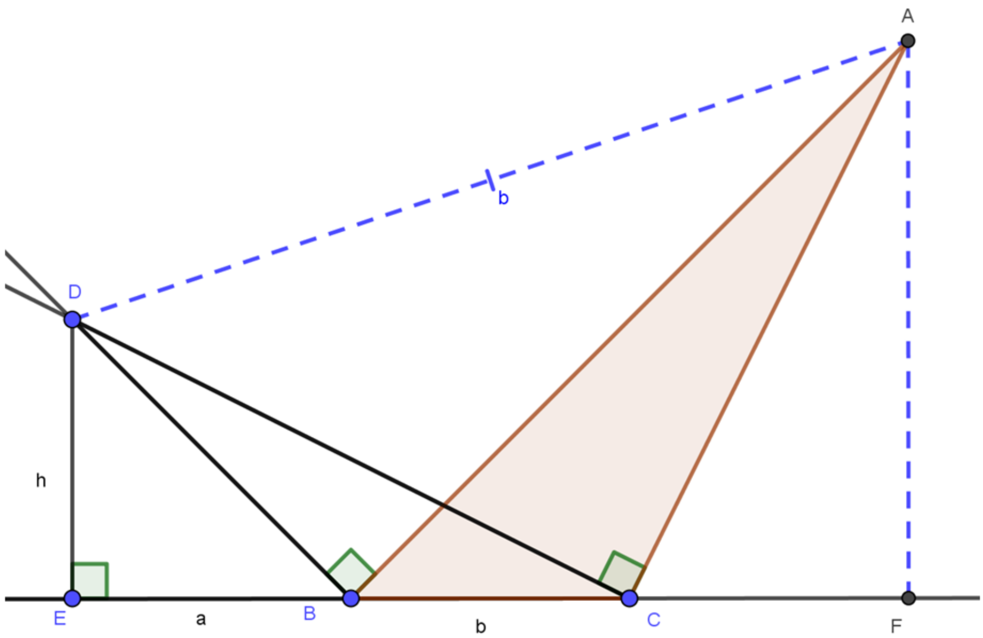
$$A(ABC) = \frac{|BC||AF|}{2} = \frac{|AF|(|BE|+|EC|)}{2}$$

İfadesinde yerine yazılırsa

$$A(ABC) = \frac{\frac{|BE||EC|}{|DE|}(|BE|+|EC|)}{2}$$
$$A(ABC) = \frac{|BE||EC||BC|}{2|DE|}$$

Olarak bulunur.

2. Üçgen geniş açılı olsun.



DEC ile CFA üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{|EC|}{|AF|}=\frac{|DC|}{|CA|}$ (I) yazılır.

DBA ve DCA açıları dik olduğundan D, B, C ve A noktaları [AD] çaplı çember üzerindedir. Buna göre m(BDC)=m(BAC) ve m(DCB)=m(DAB) olur. $m(DAC) = m(DAB) + m(BAC)$ ve DBC üçgeninde dış açı olduğundan m(DCE)=m(BDC)+m(DCB) olduğundan m(DBE)=m(DAC) olur. Yani DBE üçgeni ile DAC üçgenleri benzerdir. Bu benzerlikten

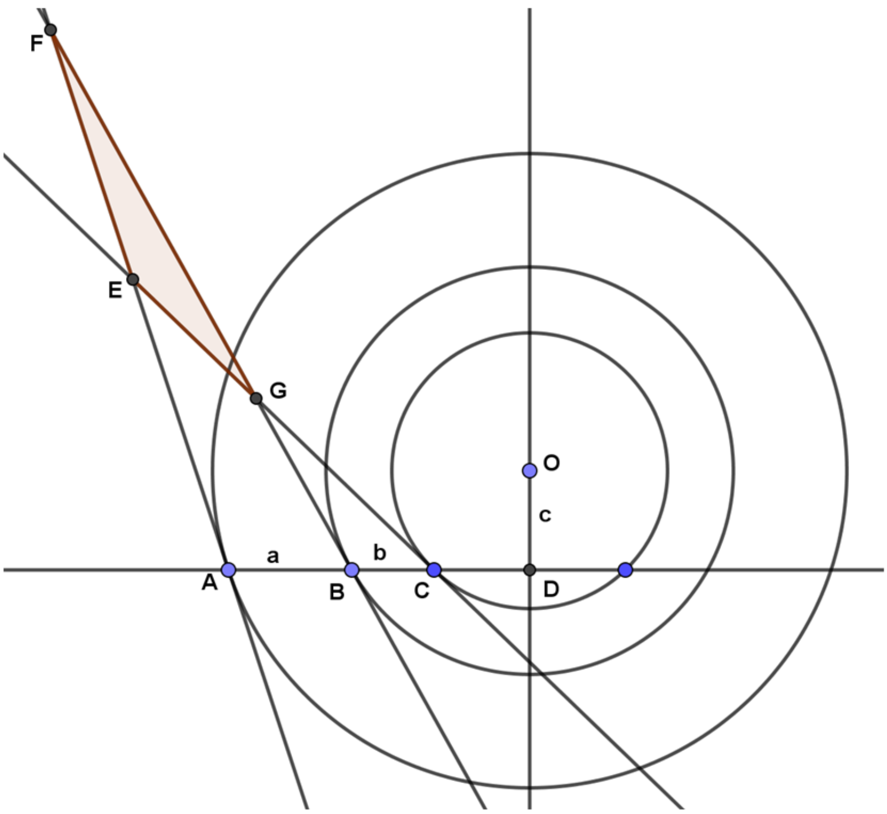
$$\frac{|BE|}{|AC|}=\frac{|DE|}{|DC|}\ \ den\ \ \frac{|DC|}{|AC|}=\frac{|DE|}{|BE|} \qquad (II)$$

I ve II den $\frac{|DE|}{|BE|}=\frac{|EC|}{|AF|}$ den $|AF|=\frac{|BE||EC|}{|DE|}$ olarak bulunur.

$$A(ABC)=\frac{|BC||AF|}{2}=\frac{|EC||EB||BC|}{2|DE|}$$

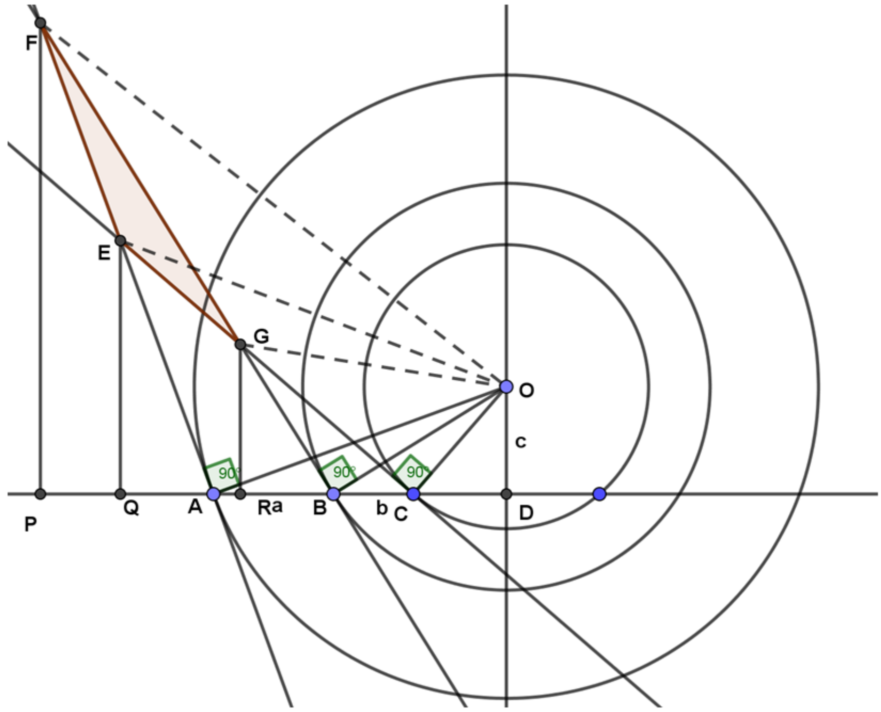
Olarak hesaplanır.

Bir uygulama



Şekilde O merkezli çemberlere üzerlerindeki A, B ve C noktalarından çizilen teğetlerin kesişme noktaları E, F ve G olsun. OD⊥AD olsun. |AB|=a, |BC|=b ve |OD|=c olmak üzere $A(EFG)=\frac{ab(a+b)}{2c}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



E, F ve G noktalarından AD doğrusuna [FP], [EQ] ve [GR] dikmeleri ile [OA], [OB] ve [OC] yaıçaplarını çizelim. |CD|=d olsun.

OAD dik üçgeninde $|OA| = \sqrt{(a+b+d)^2 + c^2}$

OBD dik üçgeninde $|OB| = \sqrt{(b+d)^2 + c^2}$

OCD dik üçgeninde $|OC| = \sqrt{c^2 + c^2}$ olarak hesaplanır. |GR|=h_1, |EQ|=h_2, ve |FP|=h_3 olsun.

1) G, B, C ve O noktaları çembersel olduklarından aynı yayı gören açılar olarak BGC ile BOC ve CGO ile CBO açılarının ölçüleri eşittir. Buradan m(BGO)=m(BGC)+m(CGO) ve m(OCD)=m(BOC)+m(CBO) olduğundan m(BGO)=m(DCO) olur. Yani GBO ile CDO üçgenleri benzerdir. GBO ile CDO üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{|BO|}{|DO|} = \frac{|GB|}{|CD|}$ den $\frac{|CD|}{|DO|} = \frac{|GB|}{|BO|}$ ve $\frac{d}{c} = \frac{|GB|}{|BO|}$ olur. Ayrıca GRB ilr BDO üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{|GR|}{|BD|} = \frac{|GB|}{|BO|}$ deb $\frac{h_1}{b+d} = \frac{|GB|}{|BO|}$ bu iki orantıda ikinci taraflar eşit olduğundan $\frac{h_1}{b+d} = \frac{d}{c}$ ve $h_1 = \frac{bd+d^2}{c}$ elde edilir.
$A(GBC) = \frac{|BC| \cdot |GR|}{2} = \frac{bh_1}{2} = \frac{b^2d + bd^2}{2c}$ olarak bulunur.

2) E, A, C ve O noktaları çembersel olduklarından aynı yayı gören açılar oldukları için AEC ile AOC ve CEO ile CAO açılarının ölçüleri eşittir. $m(AEO) = m(AEC) + m(CEO)$ ve $m(DCO) = m(AOC) + m(CAO)$ olduklarından $m(AEO) = m(DCO)$ olur. Bu nedenle EAO ile CDO üçgenleri benzerdir. Bu benzerlikten

$$\frac{|AO|}{|DO|} = \frac{|EA|}{|CD|} \ den \ \frac{|CD|}{|DO|} = \frac{|EA|}{|AO|} \ \ ve \ \frac{d}{c} = \frac{|EA|}{|AO|}$$

EQA ile ADO üçgenlerinin bezzerliğinden $\frac{|EQ|}{|AD|} = \frac{|EA|}{|AO|} \ ve \ \frac{h_2}{a+b+d} = \frac{|EA|}{|AO|}$ bu iki orantının

ikinci tarafları eşit olduğundan $\frac{h_2}{a+b+d} = \frac{d}{c} \ den \ h_2 = \frac{ad+bd+d^2}{c}$ olarak bulunur.

$$A(EAC) = \frac{|AC|\cdot|EQ|}{2} = \frac{(a+b)h_2}{2} = \frac{a^2d + 2abd + ad^2 + b^2d + bd^2}{2c}$$ olarak bulunur.

$$A(EABG) = A(EAC) - A(GBC) = \frac{a^2d + 2abd + ad^2 + b^2d + bd^2}{2c} - \frac{b^2d + bd^2}{2c} = \frac{a^2d + 2abd + ad^2}{2c}$$

3) F, A, B ve O çembersel olduklarından aynı yayı gören açılar olarak AFB ile AOB ve BFO ile OAB açılarının ölçüleri eşittir. $m(AFO) = m(AFB) + m(BFO)$ ve $m(OBD) = m(OAB) + m(AOB)$ olduğundan $m(AFO) = m(OBD) olur$. Bu nedenle FAO ile BDO üçgenleri benzerdir.

Bu benzerlikten $\frac{|FA|}{|BD|} = \frac{|AO|}{|DO|} \ den \ \frac{|FA|}{|AO|} = \frac{|BD|}{|DO|} \ ve \ \frac{b+d}{c} = \frac{|FA|}{|AO|}$ olur.

FPA ile ADO üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{|FP|}{|AD|} = \frac{|FA|}{|AO|} \ den \ \frac{h_3}{a+b+d} = \frac{|FA|}{|AO|}$ olur. Bu iki

orantının ikinci yanları eşit olduğundan $\frac{h_3}{a+b+d} = \frac{b+d}{c} \ den \ h_3 = \frac{ab+ad+b^2+2bd+d^2}{c}$

olarak bulunur.

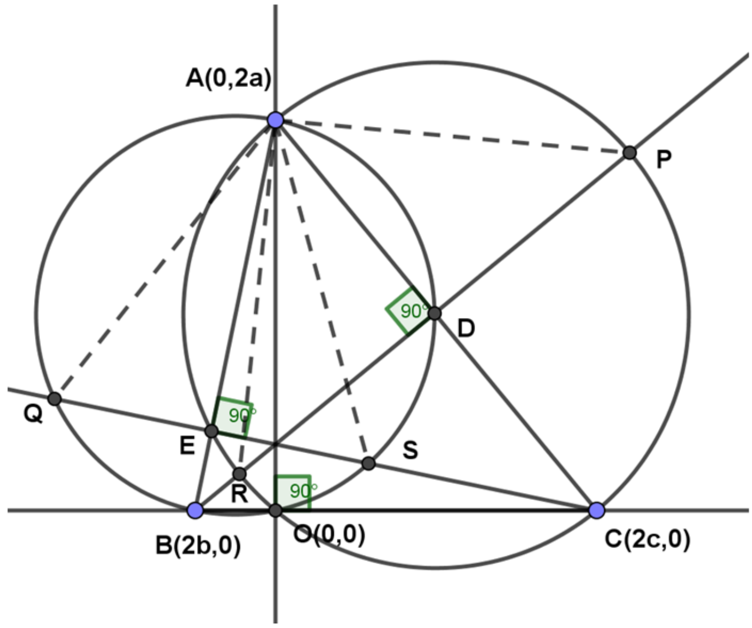
$$A(FAB) = \frac{|AB|\cdot|AB|}{2} = \frac{ah_3}{2} = \frac{a\left(\frac{ab+ad+b^2+2bd+d^2}{c}\right)}{2} = \frac{a^2b + a^2d + ab^2 + 2abd + ad^2}{2c}$$

olarak bulunur.

$$A(FEG) = A(FAB(-(A(EABG) = \frac{a^2b + a^2d + ab^2 + 2abd + ad^2}{2c} - \frac{a^2d + 2abd + ad^2}{2c}$$
$$= \frac{a^2b + ab^2}{2c} = \frac{ab(a+b)}{2c}$$

Olarak bulunur.

Teorem::



ABC üçgeninde [AC] kenarına ait yükseklik [AC] çaplı çemberi R ve P noktalarında, [AB] kenarına ait yükseklik [AB] çaplı çemberi S vw Q noktalarında kesmiş olsun. P, Q, S ve R noktaları A merkezli çember üzerindedir.

İspat:

Analitik olarak ABC üçgeninin [AB] kenarına ait yüksekliği y eksenine ve [BC] kenarı x ekseni üzerine gelecek şekilde koordinat sisitemine yerleştirilsin. A(0, 2a), B(2b, 0) ve C(2c, 0) olsun. [BD, [AC] kenarıana ait yükseklik olsun. Çap kirişi ortalıyacağından |RD|=|DP| ve |AR|=|AP| olur.

Benzer şekilde |AQ|=|AS| olur.

Eğer |AR|=|AQ| olduğu ispatlanırsa P, Q, S ve R noktalar merkezi çember üzerine urlar

|AC| çaplı çemberin denklemiş $(\boldsymbol{x-c})^2+(\boldsymbol{y-a})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{c}^2$ ve düzenlenirse $\boldsymbol{x^2+y^2-2cx-2ay=0}$ şeklindedir. AC doğrusunun eğimi $-\frac{a}{c}$ olduğundan B den AC na çizilen dikmenin denklemi $y=\frac{c}{a}(x-2b)$ dir. Çemberle doğrunun ortak çözüm denklemi

$$\boldsymbol{x^2+\left(\frac{c}{a}(x-2b)\right)^2-2cx-2a\left(\frac{c}{a}(x-2b)\right)=0}$$

düzenlenirse

$$\boldsymbol{(a^2+c^2)x^2-4c(bc+a^2)x+4bc(bc+a^2)=0}$$

Şeklinde olur.

İşlemlerde sadelik açısından $bc+a^2=t$ ile gösterilirse

$$(a^2+c^2)x^2-4ctx+4bct=0$$

Ve bu denklemde

$$\Delta = 16c^2t^2-16(a^2+c^2)bct=16ct\left(ct-b(a^2+c^2)\right)$$

$$\Delta = 16ct(c^2b+a^2c-a^2b-c^2b)=16a^2ct(c-b)$$

Olur. Ortak çözüm denkleminin bir kökü

$x=\dfrac{4ct-4a\sqrt{ct(c-b)}}{2(a^2+c^2)}$ olur. Burada $\sqrt{ct(c-b)}=u$ dersek $x=\dfrac{2(ct-au)}{a^2+c^2}$ olur. Buna karşılık $y=\dfrac{c}{a}\left(\dfrac{2(ct-au)}{a^2+c^2}-2b\right)=\dfrac{2}{a}\left[\dfrac{c(ct-au)}{(a^2+c^2)}-bc\right]$ olur. Yani

$$R\left(\frac{2(ct-au)}{a^2+c^2},\frac{2}{a}\left[\frac{c(ct-au)}{(a^2+c^2)}-bc\right]\right)$$

Noktasıdır.

$$|AR|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+c^2)^2}(c^2t^2-2actu+a^2u^2)+\left[\frac{2}{a}\left(\frac{c(ct-au)}{a^2+c^2}-bc\right)-2a\right]^2}$$

$$|AR|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+c^2)^2}(c^2t^2-2actu+a^2u^2)+\left[\frac{2}{a}\left(\frac{c(ct-au)}{a^2+c^2}-bc-a^2\right)\right]^2}$$

$$|AR|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+c^2)}(c^2t^2-2actu+a^2u^2)+\left[\frac{2}{a}\left(\frac{c(ct-au)}{a^2+c^2}-(bc+a^2\right)\right]^2}$$

$$|AR|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+c^2)^2}(c^2t^2-2actu+a^2u^2)+\left[\frac{2}{a}\left(\frac{c(ct-au)}{a^2+c^2}-t\right)\right]^2}$$

$$|AR|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+c^2)^2}(c^2t^2-2actu+a^2u^2)+\left[\frac{2}{a}\left(\frac{c^2t-acu-a^2t-c^2t}{a^2+c^2}\right)\right]^2}$$

$$|AR|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+c^2)^2}(c^2t^2-2actu+a^2u^2)+\left[\frac{2}{a}\left(\frac{-a(at+cu)}{a^2+c^2}\right)\right]^2}$$

$$|AR|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+c^2)^2}(c^2t^2-2actu+a^2u^2)+\frac{4}{(a^2+c^2)^2}(a^2t^2+2actu+c^2u^2)}$$

$$|AR| = \sqrt{\frac{4}{(a^2+c^2)^2}(c^2t^2 + a^2u^2 + a^2t^2 + c^2u^2)}$$

$$|AR| = \sqrt{\frac{4}{(a^2+c^2)^2}\left(t^2(a^2+c^2) + u^2(a^2+c^2)\right)} = \sqrt{\frac{4}{(a^2+c^2)^2}(a^2+c^2)(u^2+t^2)}$$

$$|AR| = 2\sqrt{\frac{u^2+t^2}{a^2+c^2}} = 2\sqrt{\frac{c^2t - bct + t^2}{a^2+c^2}} = 2\sqrt{\frac{t(c^2 - bc + t)}{a^2+c^2}}$$

$$|AR| = 2\sqrt{\frac{t(c^2 - bc + bc + a^2)}{a^2+c^2}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{a^2+bc}$$

Olarak bulunur.

|AB| çaplı çemberin denklemiş $(x-b)^2 + (y-a)^2 = a^2 + b^2$ ve düzenlenirse $x^2 + y^2 - 2bx - 2ay = 0$ şeklindedir. AB doğrusunun eğimi $-\dfrac{a}{b}$ olduğundan C den AB na çizilen dikmenin denklemi $y = \dfrac{b}{a}(x-2c)$ dir. Çemberle doğrunun ortak çözüm denklemi

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}(x-2c)\right)^2 - 2bx - 2a\left(\frac{b}{a}(x-2c)\right) = 0$$

düzenlenirse

$$(a^2+b^2)x^2 - 4b(bc+a^2)x + 4bc(bc+a^2) = 0$$

Şeklinde olur.

İşlemlerde sadelik açısından $bc+a^2=t$ ile gösterilirse

$$(a^2+b^2)x^2 - 4btx + 4bct = 0$$

Ve bu denklemde

$$\Delta = 16b^2t^2 - 16(a^2+b^2)bct = 16bt\left(bt - c(a^2+b^2)\right)$$

$$\Delta = 16bt(b^2c + a^2b - a^2c - b^2c) = 16a^2bt(b-c)$$

Olur. Ortak çözüm denkleminin bir kökü

$x = \dfrac{4bt - 4a\sqrt{bt(b-c)}}{2(a^2+b^2)}$ olur. Burada $\sqrt{bt(b-c)} = v$ dersek $x = \dfrac{2(bt-av)}{a^2+b^2}$ olur. Buna karşılık $y = \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{2(bt-av)}{a^2+b^2} - 2c\right) = \dfrac{2}{a}\left[\dfrac{b(bt-av)}{(a^2+b^2)} - bc\right]$ olur. Yani

$$Q\left(\frac{2(bt-av)}{a^2+b^2},\frac{2}{a}\left[\frac{b(bt-av)}{(a^2+b^2)}-bc\right]\right)$$

Noktasıdır.

$$|AQ|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+b^2)^2}(b^2t^2-2abtv+a^2v^2)+\left[\frac{2}{a}\left(\frac{b(bt-av)}{a^2+b^2}-bc\right)-2a\right]^2}$$

$$|AQ|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+b^2)^2}(b^2t^2-2abtv+a^2v^2)+\left[\frac{2}{a}\left(\frac{b(bt-av)}{a^2+b^2}-bc-a^2\right)\right]^2}$$

$$|AQ|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+b^2)}(b^2t^2-2abtv+a^2v^2)+\left[\frac{2}{a}\left(\frac{b(bt-av)}{a^2+b^2}-(bc+a^2\right)\right]^2}$$

$$|AQ|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+b^2)^2}(b^2t^2-2abtv+a^2u^2)+\left[\frac{2}{a}\left(\frac{b(bt-av)}{a^2+b^2}-t\right)\right]^2}$$

$$|AQ|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+b^2)^2}(b^2t^2-2abtv+a^2v^2)+\left[\frac{2}{a}\left(\frac{b^2t-abv-a^2t-b^2t}{a^2+b^2}\right)\right]^2}$$

$$|AQ|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+b^2)^2}(b^2t^2-2abtv+a^2v^2)+\left[\frac{2}{a}\left(\frac{-a(at+bv)}{a^2+b^2}\right)\right]^2}$$

$$|AQ|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+b^2)^2}(b^2t^2-2abtv+a^2v^2)+\frac{4}{(a^2+b^2)^2}(a^2t^2+2abtv+b^2v^2)}$$

$$|AQ|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+b^2)^2}(b^2t^2+a^2v^2+a^2t^2+b^2v^2)}$$

$$|AQ|=\sqrt{\frac{4}{(a^2+b^2)^2}\left(t^2(a^2+b^2)+v^2(a^2+b^2)\right)}=\sqrt{\frac{4}{(a^2+b^2)^2}(a^2+b)(v^2+t^2)}$$

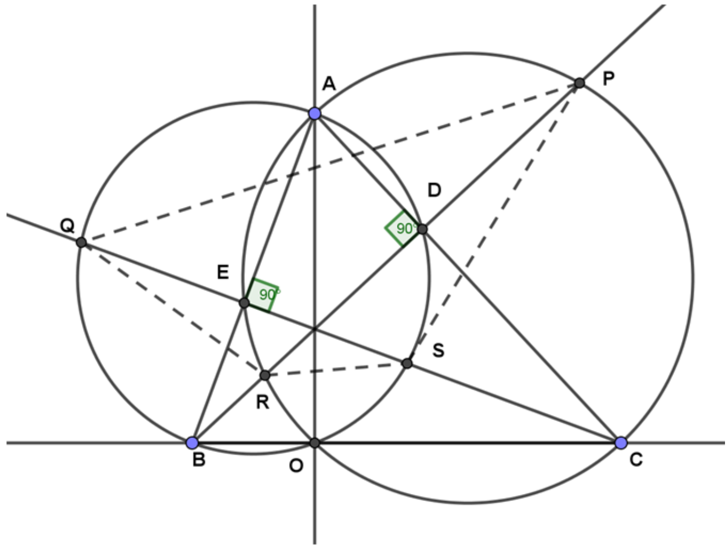
$$|AQ|=2\sqrt{\frac{v^2+t^2}{a^2+b^2}}=2\sqrt{\frac{b^2t-bct+t^2}{a^2+b^2}}=2\sqrt{\frac{t(b^2-bc+t)}{a^2+b^2}}$$

$$|AQ|=2\sqrt{\frac{t(b^2-bc+bc+a^2)}{a^2+b^2}}=2\sqrt{t}=2\sqrt{a^2+bc}$$

Olarak bulunur.

Görüldüğü gibi |AS|=|AQ|=|AR|=|AP| olup Q, R, S ve P noktaları A noktasından eşi uzaklıktadır. Yani bu dört not A merkezi çember üzerindedir.

Bu ispat bize aynı zamanda



PQRS dörtgeni bir kirişler dörtgrnidir.

Bir uygulama:

Bir ABC üçgeninde [AB] kenarına ait yükseklik [AB] çaplı çemberi S ve Q noktalarında kesiyor. [AC] kenarına ait yükseklik [AC] çaplı çemberi R ve P noktalarında kesiyor. $\boldsymbol{m(PQR) = 75}$ ise PSR açısının ölçüsü kaç derecedir.