Bir Noktanın Bir Şekle Uzaklığı

Başımızın etrafında dönen bir arının bize uzaklığından söz ederken, arının ayağımıza uzaklığını vermeyeceğimiz gibi; ayağımızın dibine kadar gelmiş bir köpeğin bize uzaklığını da başımıza olan uzaklığıyla belirtmeyiz.
Bir şeklin her noktası, o şeklin bir temsilcisidir.
Buna göre; **bir noktanın bir şekle uzaklığı** denilince, **o noktayı merkez sayan ve yarıçapı sürekli büyüyen bir küre** akla getirilebilir. **Bu kürenin şekle değdiği ilk noktanın verilen noktaya uzaklığı, o noktanın o şekle uzaklığı** olarak tanımlanabilir.
Düzlemsel şekiller söz konusu olduğunda, küre yerine çember düşünülür.

İki Şeklin Birbirine Uzaklığı

İki şeklin birbirine uzaklığı terimi, bu **iki şeklin birbirine en yakın iki noktasının birbirine uzaklığı** anlamına gelir.

Bu uzaklık, bu şekiller arasındaki uzay parçasının en dar yerinden geçebilecek en büyük kürenin çapının uzunluğu kadardır.

Düzlemsel iki şeklin birbirinden uzaklığı da, bu iki şeklin arasındaki bölgenin en dar yerinden geçebilecek en büyük çemberin çapının uzunluğu kadar olacaktır.

Düzlemsel iki eğri, türevlenebilir iki fonksiyonun grafikleri ise, bunların arasındaki bölgenin en dar yerinde bu iki eğriye de teğet olan çemberin çapı, bu iki eğrinin ortak normali olur.

Örnek Problem

$y=f(x)=x^2$ ve $y=g(x)=-(x-4)^2+1$ eğrilerinin birbirine uzaklığını bulunuz.

Çözüm

$y=f(x)=x^2$ eğrisinin $A\left(a,a^2\right)$ noktası ile $y=g(x)=-(x-4)^2+1$ eğrisinin $B\left[b,1-(b-4)^2\right]$ noktası bu iki eğrinin birbirine en yakın iki noktası ise, AB doğrusu bu eğrilerin ortak normalleri olur.

$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$ olup A noktasındaki teğetin eğimi $m_{t_A}=2a$ ve normalin eğimi $m_{n_A}=-\dfrac{1}{2a}$'dır. Buna göre; f eğrisinin A'daki normalinin denklemi,

$$n_1: y-a^2=-\frac{1}{2a}\cdot(x-a)$$

$$\Rightarrow n_1: x+2ay-2a^3-a \quad \text{olur.}$$

Aynı şekilde;

$g(x)=-(x-4)^2+1 \Rightarrow f'(x)=-2(x-4)$ olup B noktasındaki teğetin eğimi $m_{t_B}=-2(b-4)$ ve normalin eğimi $m_{n_B}=\dfrac{1}{2(b-4)}$'tür. Buna göre; g eğrisinin B'deki normalinin denklemi,

$$n_2: y-1+(b-4)^2=\frac{1}{2(b-4)}\cdot(x-b)$$

$$\Rightarrow n_2: x-2(b-4)y-2(b-4)^3+b-8=0 \text{ bulunur.}$$

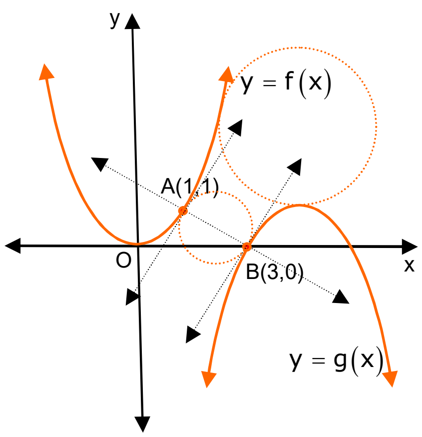
n_1 ve n_2 normalleri aynı AB doğrusuna karşılık geldiğinden, karşılıklı kat sayılar orantılı olur.

$$\frac{1}{1}=\frac{2a}{-2(b-4)}=\frac{-2a^3-a}{-2(b-4)^3+b-8}$$

sisteminin çözümünden $a=1$ ve $b=3$ gelir.

$A(1,1)$, $B(3,0)$ ve $|AB|=\sqrt{5}$ bulunur.

f ve g eğrileri arasındaki uzaklık $\sqrt{5}$ birimdir.



Uygulama - 1

$y = f(x) = x^2 + 1$ ve $y = g(x) = -(x-2)^2$ eğrileri arasındaki uzaklığı bulunuz.

Not: Burada elde edilecek denklem sistemi 3. dereceden olup çözümü Cardan Formüllerini gerektirecektir.

Ya da; bu sistem yaklaşık kök bulma yöntemleri ile çözülür.

Uygulama - 2

$y = f(x) = x^3$ ve $y = g(x) = (x+1)^3 + 1$ eğrileri arasındaki uzaklığı bulunuz.

Uygulama - 3

$y = f(x) = x^3$ ve $y = g(x) = (x+1)^4$ eğrileri arasındaki uzaklığı bulunuz.

Uygulama - 4

$y = f(x) = 4x - 4$ doğrusunun $y = g(x) = (x+1)^2$ eğrisine en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

Not: Burada, verilen eğrinin verilen doğruya paralel olan teğetinden yararlanılır.