Soru

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\sqrt[n]{x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots}-\sqrt[n]{x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\dots}\right)=?$$

Çözüm

n tek ise;
Burada $\infty - \infty$ belirsizliği söz konusudur. İfadeyi eşleniği ile çarpıp bölelim:

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\sqrt[n]{x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots}-\sqrt[n]{x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\dots}\right)$$

$$=\lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{\left(x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots\right)-\left(x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\dots\right)}{\sqrt[n]{\left(x^n+\dots\right)^{n-1}}+\sqrt[n]{\left(x^n+\dots\right)^{n-2}\cdot\left(x^n+..\right)}+\sqrt[n]{\left(x^n+\dots\right)^{n-3}\cdot\left(x^n+\dots\right)^2}+\dots}\right]$$

$$=\lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{(a_1-b_1)x^{n-1}+(a_2-b_2)x^{n-2}+\dots}{n\cdot x^{n-1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{(a_1-b_1)x^{n-1}}{n\cdot x^{n-1}}+\frac{(a_2-b_2)x^{n-2}}{n\cdot x^{n-1}}+\dots\right]$$

$$=\frac{a_1-b_1}{n}$$

n çift ise;
$x\to+\infty$ için sonuç aynı olur.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[n]{x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots}-\sqrt[n]{x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\dots}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\left(x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots\right)-\left(x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\dots\right)}{\sqrt[n]{\left(x^n+\dots\right)^{n-1}}+\sqrt[n]{\left(x^n+\dots\right)^{n-2}\cdot\left(x^n+..\right)}+\sqrt[n]{\left(x^n+\dots\right)^{n-3}\cdot\left(x^n+\dots\right)^2}+\dots}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(a_1-b_1)x^{n-1}+(a_2-b_2)x^{n-2}+\dots}{n\cdot\left|x^{n-1}\right|}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(a_1-b_1)x^{n-1}}{-n\cdot x^{n-1}}+\frac{(a_2-b_2)x^{n-2}}{-n\cdot x^{n-1}}+\dots\right]$$

$$=-\frac{a_1-b_1}{n}$$ olur.

Bu tür limit problemlerinde, kök içinde kökün derecesine eşit olan en büyük dereceli terimden en az 2 eksik dereceli terimlerin sonucu etkilemediği görülmektedir.
Yine bu tür limit problemlerinde,

n tek ise; $$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\sqrt[n]{x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\dots}\right)=\lim_{x\to\mp\infty}\left(x+\frac{a}{n}\right)$$

n çift ise; $$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\sqrt[n]{x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\dots}\right)=\lim_{x\to\mp\infty}\left|x+\frac{a}{n}\right|$$

eşitliklerinden de yararlanılabilir. Bu eşitliklerin ispatını “asimptot” başlığı altında vereceğim.

Aşağıdaki örnek problemler, yukarıda verdiğim sonucu kullanmadan eşlenik yöntemi veya asimptot eşitliği ile çözülebilir. Bence; öğrenciye o yollar önerilmelidir. Ancak, nereden geldiğini tam olarak algıladığında, formülün öğrenciye kullandırılması uygun olur.

Örnekler

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}-\sqrt{x^2+x+4}\right)=\dfrac{3-1}{2}=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}-\sqrt{x^2+x+4}\right)=-\dfrac{3-1}{2}=-1$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+6}-\sqrt{x^2+4}\right)=\dfrac{4-0}{2}=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+6}-\sqrt{x^2+4}\right)=-\dfrac{4-0}{2}=-2$

3. $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2-4x+1}-\sqrt[3]{x^3+2x}\right)=?$

Bunu üç yol ile de çözelim:

I. Eşlenik yolu ile;

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2-4x+1}-\sqrt[3]{x^3+2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^3+6x^2-4x+1-\left(x^3+2x\right)}{\sqrt[3]{(x^3+6x^2-\ldots)^2}+\sqrt[3]{(x^3+6x^2\ldots)\cdot(x^3+2x)}+\sqrt[3]{(x^3+2x)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{6x^2-6x+1}{3x^2}=2$$

II. Asimptot eşitliği yolu ile;

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2-4x+1}-\sqrt[3]{x^3+2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\mp\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2-4x+1}\right)-\lim_{x\to\mp\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\mp\infty}\left(x+\frac{6}{3}\right)-\lim_{x\to\mp\infty}\left(x+\frac{0}{3}\right)=\lim_{x\to\mp\infty}\left(x+2-x-0\right)=2$$

III. Bulduğumuz formül ile;

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2-4x+1}-\sqrt[3]{x^3+2x}\right)=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{6-0}{3}=2$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+5x^3-6x+1}-\sqrt[4]{x^4-x^3}\right)=\dfrac{5-(-1)}{4}=\dfrac{3}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+6x^4-6x+1}-\sqrt[6]{x^6-3x^5}\right)=-\dfrac{0-(-3)}{6}=-\dfrac{1}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\left(\sqrt[8]{x^6+3x^5}-\sqrt[8]{x^6-3x^5}\right)=\dfrac{0-0}{8}=0$

7. $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\left(\sqrt[7]{x^7+4x^6-x^2+3}-x\right)=\dfrac{4-0}{7}=\dfrac{4}{7}$; $(x=\sqrt[7]{x^7+0\cdot x^6})$

8. $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+3x^4-x^2+4}-x+2\right)$

$$=\lim_{x\to\mp\infty}\left(x+\frac{3}{5}\right)+\lim_{x\to\mp\infty}\left(-x+2\right)=\lim_{x\to\mp\infty}\left(x+\frac{3}{5}-x+2\right)=\frac{13}{5}$$