

## Etkinlik – 1

- Aynı adları yazmış olmalısınız.
- Size sıcakkanlı gelen biri, arkadaşınıza öyle gelmeyebilir.  
Farklı adları yazmış olabilirsiniz.
- Büyük bir olasılıkla farklı adlar yazmışsınızdır.
- Bazı öğretmenleri kiminiz genç kiminiz yaşlı sayabilirsiniz.
- Bu sayının sıfır olduğu bellidir.
- Her biriniz 8 farklı sayıdan birini yazmış olabilirsiniz.

✦ Açıklamalardan da anlaşılacağı gibi, farklılıklar hangi adları yazacağınızın tam olarak belirtilmemiş olmasından kaynaklanır.

## Etkinlik – 2

Kümeleri P ve R ile adlandıralım.

Ortak özellik yöntemi ile,

$$P = \{x \mid x, \text{MATEMATİK sözcüğündeki bir harftir.}\}$$

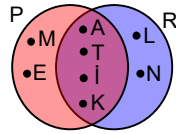
$$R = \{x \mid x, \text{ANALİTİK sözcüğündeki bir harftir.}\}$$

biçiminde yazılırlar.

Liste yöntemi ile,

$$P = \{M, A, T, E, İ, K\}; \quad R = \{A, N, L, İ, T, K\} \text{ olur.}$$

P ve R kümeleri Venn şeması ile yandaki gibi gösterilirler.



## Etkinlik – 3

- Küme ayırıcı içine yazabileceğiniz bir eleman yoktur.  
 $A = \{ \}$
- $B = \{ \}$
- $C = \{1, 3, 5, 7\}$   
C kümesi 4 elemanlıdır.
- $D = \{9, 11, 13, 15, 17, \dots\}$   
D kümesinin elemanları yazmakla bitmez.  
D kümesi sonsuz elemanlıdır.

## Etkinlik – 4

- “ $A \subset A$ ” ① önermesinin nicelme mantığındaki karşılığı “ $\forall x, (x \in A) \Rightarrow (x \in A)$ ” dir. ②  
② önermesinin, x’in herhangi bir a değeri için yorumlaması “ $(a \in A) \Rightarrow (a \in A)$ ” ③ olur.  
“ $p : a \in A$ ” denirse, yorumlama “ $p \Rightarrow p$ ” ④ önermesine dönüşür.  
② önermesinin bütün yorumlamaları “ $p \Rightarrow p$ ” biçiminde olacağından; “ $A \subset A$ ” önermesinin doğruluğu, “ $p \Rightarrow p$ ” önermesinin bir totoloji olup olmadığına bağlı olacaktır.  
“ $p \Rightarrow p$ ” önermesinin bir totoloji olduğu açıktır.  
O hâlde;  $A \subset A$  doğrudur.
- “ $\emptyset \subset A$ ” ① önermesinin nicelme mantığındaki karşılığı “ $\forall x, (x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in A)$ ” ’dir. ②  
 $x = a$  yorumlaması ile  $(a \in \emptyset) \Rightarrow (a \in A)$  ③ önermesi elde edilir. “ $a \in \emptyset \equiv 0$ ” ’dir.  
“ $p : a \in A$ ” denirse, ③ önermesi “ $0 \Rightarrow p$ ” önermesine dönüşür.  
② önermesinin bütün yorumlamaları “ $0 \Rightarrow p$ ” biçiminde olur.  
“ $0 \Rightarrow p$ ” önermesi bir totoloji olduğundan  $\emptyset \subset A$  doğrudur.

## Etkinlik – 5

- $$(A = B) \Leftrightarrow [\forall x, (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)]$$
- $$\Rightarrow (A = B) \Leftrightarrow \{ \forall x, [(x \in A) \Rightarrow (x \in B)] \wedge [(x \in B) \Rightarrow (x \in A)] \}$$
- (İki yönlü koşullu önermenin tanımından)
- $$\Rightarrow (A = B) \Leftrightarrow [(A \subset B) \wedge (B \subset A)]$$
- (Alt kümenin tanımından)
- ✦ Alt küme tanımı ile ispat tamamlanmış oldu:
- $$\{ \forall x, [(x \in A) \Rightarrow (x \in B)] \} = (A \subset B);$$
- $$\{ \forall x, [(x \in B) \Rightarrow (x \in A)] \} = (B \subset A)$$

## Etkinlik – 6

- a.  $\emptyset$  Alt küme sayısı 1'dir.
- b.  $\emptyset, \{a\}$   
Alt küme sayısı 2'dir.
- c.  $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$   
Alt küme sayısı 4'tür.
- d.  $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$   
Alt küme sayısı 8'dir.
- e.  $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$   
Alt küme sayısı 16'dır.

- f. Alt kümelerin sayılarının, 2'nin kuvvetleri olduğuna dikkat ediniz. Görünüşe göre, n elemanlı kümenin alt kümelerinin sayısı  $2^n$  olmalıdır.

Kümenin eleman sayısı	Kümenin alt kümeleri sayısı
0	$1 = 2^0$
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
4	$16 = 2^4$

## Etkinlik – 7

- a.  $2^5 = 32$       b.  $2^4 = 16$       c.  $2^6 - 1 = 63$
- d. Kuvvet kümesi  $2^6 = 64$  elemanlı olup bunun alt kümelerinin sayısı  $2^{64}$  olur.

## Etkinlik – 8

- a. A kümesinin a'yı içermeyen alt kümeleri,  $\{b, c, d, e, f\}$  kümesinin alt kümeleridir. Bunların sayısı da  $2^5 = 32$ 'dir.
- b. A kümesinin b'yi bulunduran alt kümeleri, b'nin yanına  $\{a, c, d, e, f\}$  kümesinin alt kümelerinin elemanları yazılarak elde edilir. Buna göre; A kümesinin b'yi bulunduran alt kümelerinin sayısı  $2^5 = 32$ 'dir.
- c.  $2^4 = 16$
- d. Tüm alt kümelerin sayısından a ve b'yi içermeyen alt kümelerin sayısı çıkarılırsa, geriye a veya b'yi içeren alt kümelerin sayısı kalır:  $2^6 - 2^4 = 48$

- e. a var, b var, c var  $\rightarrow 2^3 = 8$  ;  
a var, b yok, c var  $\rightarrow 2^3 = 8$  ;  
a yok, b var, c var  $\rightarrow 2^3 = 8$   
a veya b'yi bulunduran ve c'yi bulunduran alt kümelerin sayısı 24'tür.
- f. "p: Alt kümede a vardır.  
q: Alt kümede b vardır.  
r: Alt kümede c vardır." olsun.  
 $p \vee q \vee r$  önermesinin doğru olduğu durumların sayısı isteniyor.  
 $p \vee q \vee r \equiv (p' \wedge q' \wedge r)'$  denkliği dikkate alınarak, A'nın tüm alt kümelerinin sayısından a'yı ve b'yi bulundurmeyen ve c'yi bulunduran alt kümelerinin sayısı çıkarılır:  
a veya b'yi bulunduran veya c'yi bulundurmeyen alt kümelerin sayısı,  $2^6 - 2^3 = 56$  bulunur.

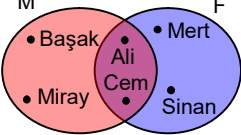
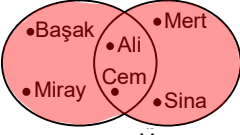
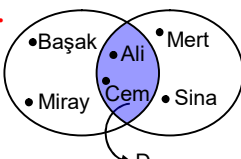
## Etkinlik – 9

- a. Koşula uyan D kümelerinin sayısı, A'nın alt kümelerinin sayısı kadardır. Bu da,  $2^3 = 8$ 'dir.
- b. Koşula uyan E kümeleri B'nin A'yı kapsayan alt kümeleridir. Bunların sayısı da  $\{d, e, f, g\}$  kümesinin alt kümelerinin sayısı olup  $2^4 = 16$ 'dır.
- c. 4 elemanlı E kümelerinin sayısı,  $\{d, e, f, g\}$ 'nin 1 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşit olup 4'tür.
- d. 5 elemanlı E kümelerinin sayısı,  $\{d, e, f, g\}$ 'nin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşittir.  $\{d, e, f, g\}$  kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısını şöyle bulabiliriz:  
Bu kümenin bir elemanını 4 değişik biçimde seçebiliriz. İkinci eleman için 3 seçenek kalır. O hâlde;  $(d, e)$  gibi sıralı ikilileri  $4 \cdot 3 = 12$  değişik biçimde seçebiliriz. 2 elemanlı bir kümenin elemanları ile 2 değişik sıralı ikili yazılabilir. Örneğin;  $\{d, e\}$  kümesinin sıralı ikilileri  $(d, e)$  ve  $(e, d)$  ikilileridir.  
Öyleyse; 12 değişik sıralı ikili, 2 elemanlı  $12 : 2 = 6$  kümeye ait olabilir.  
5 elemanlı E kümelerinin sayısı 6'dır.

## Etkinlik -10

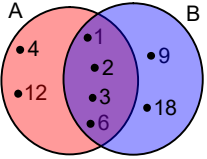
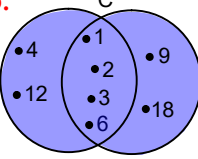
- a. B kümesinin, örneğin; yalnız a'nın bulunduğu alt kümelerini bulmak için, a'nın yanına  $\{d,e,f\}$ 'nin alt kümeleri birer birer konular.  $2^3$  değişik alt küme elde edilir. a, b, c'den biri 3 değişik biçimde seçilebileceğinden, istenen alt kümelerin sayısı  $3 \cdot 2^3 = 24$  olur.
- b. B kümesinin, örneğin; a ve b'yi bulunduran alt kümelerinin sayısı  $2^3 = 8$  dir.  
A kümesinin herhangi iki elemanı 3 değişik biçimde seçilebilir. O hâlde, istenen alt kümelerin sayısı  $3 \cdot 8 = 24$  olur.
- c.  $2^3 = 8$
- d. B kümesinin a, b, c'den hiç birinin bulunmadığı alt kümelerinin sayısı  $2^3 = 8$  'dir.  
Buna göre; B'nin a, b, c'den en az birinin bulunduğu alt kümelerinin sayısı,  $2^6 - 2^3 = 56$  olur.

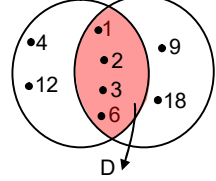
## Etkinlik -11

- a. 
- b. 
- c. 
- d.  $Y = \{x | (x \in M) \vee (x \in F)\}$   
 $D = \{x | (x \in M) \wedge (x \in F)\}$

## Etkinlik - 12

$A = \{1,2,3,4,6,12\}$  ve  $B = \{1,2,3,6,9,18\}$  olur.

- a. 
- b.   
 $C = A \cup B$  olur.

- c.   
 $D = A \cap B = \{1,2,3,6\}$  olur.

## Etkinlik - 13

- a.  $A \cup A = \{x | (x \in A) \vee (x \in A)\}$  ( $\cup$ 'nin tanımı)  
 $\Rightarrow A \cup A = \{x | x \in A\}$  ( $\vee$ 'nin tek kuvvet öz.)  
 $\Rightarrow A \cup A = A$
- b.  $A \cap A = \{x | (x \in A) \wedge (x \in A)\}$  ( $\cap$ 'nin tanımı)  
 $\Rightarrow A \cap A = \{x | x \in A\}$  ( $\wedge$ 'nin tek kuvvet öz.)  
 $\Rightarrow A \cap A = A$

## Etkinlik - 14

- a.  $A \cup \emptyset = \{x | (x \in A) \vee (x \in \emptyset)\}$  ( $\cup$ 'nin tanımı)  
 $\Rightarrow A \cup \emptyset = \{x | (x \in A) \vee 0\}$  ( $\emptyset$ 'nin tanımı)  
 $\Rightarrow A \cup \emptyset = \{x | x \in A\}$  ( $p \vee 0 \equiv p$ )  
 $\Rightarrow A \cup \emptyset = A$
- b.  $A \cap \emptyset = \{x | (x \in A) \wedge (x \in \emptyset)\}$   
 $\Rightarrow A \cap \emptyset = \{x | [(x \in A) \wedge (x \in \emptyset)] \vee (x \in \emptyset)\}$   
( $x \in \emptyset \equiv 0$  olduğundan bir önermeye  $\vee$  işlemini ile bağlanabilir.)  
 $\Rightarrow A \cap \emptyset = \{x | [(x \in A) \wedge 0] \vee (x \in \emptyset)\}$  ( $x \in \emptyset \equiv 0$ )  
 $\Rightarrow A \cap \emptyset = \{x | 0 \vee (x \in \emptyset)\}$  ( $p \wedge 0 \equiv 0$ )  
 $\Rightarrow A \cap \emptyset = \{x | x \in \emptyset\}$  ( $0 \vee q \equiv q$ )  
 $\Rightarrow A \cap \emptyset = \emptyset$

## Etkinlik - 15

- a.  $A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$  ( $\cup$ 'nin tanımı)  
 $\Rightarrow A \cup B = \{x | (x \in B) \vee (x \in A)\}$  (Değişme öz.)  
 $\Rightarrow A \cup B = B \cup A$  ( $\cup$ 'nin tanımı)
- b. a'daki gibi ispatlayınız.

## Etkinlik – 16

a. Birleşim kümesinin tanımını kullanalım:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= \{x | (x \in A) \vee [x \in (B \cup C)]\} \\ \Rightarrow A \cup (B \cup C) &= \{x | (x \in A) \vee [(x \in B) \vee (x \in C)]\} \\ \Rightarrow A \cup (B \cup C) &= \{x | [(x \in A) \vee (x \in B)] \vee (x \in C)\} \\ &\quad (\vee \text{'nin birleşme öz.}) \\ \Rightarrow A \cup (B \cup C) &= \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\} \cup C \\ \Rightarrow A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \end{aligned}$$

b. a'daki gibi ispatlayınız.

## Etkinlik – 17

a.  $A \cup (B \cap C) = \{x | (x \in A) \vee [x \in (B \cap C)]\}$   
(Birleşim kümesinin tanımı)

$$\Rightarrow A \cup (B \cap C) = \{x | (x \in A) \vee [(x \in B) \wedge (x \in C)]\}$$

(Kesişim kümesinin tanımı)

$$\Rightarrow A \cup (B \cap C) = \{x | [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge [(x \in A) \vee (x \in C)]\}$$

( $\vee$ 'nin  $\wedge$  üzerine dağılıma özelliği.)

$$\Rightarrow A \cup (B \cap C) = \{x | [x \in (A \cup B)] \wedge x \in (A \cup C)\}$$

(Birleşim kümesinin tanımı)

$$\Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\cap \text{'nin tanımı})$$

b. a'daki gibi ispatlayınız.

c. a'daki gibi ispatlayınız.

d. a'daki gibi ispatlayınız.

## Etkinlik – 18

a.  $A \cap B = \{0, 1, 2, 3\}$  ve  $A \cap C = \{1, 2, 3, 4\}$  verilmiştir.

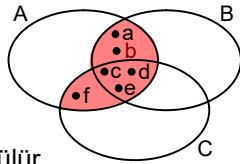
$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ \Rightarrow A \cap (B \cup C) &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

b.  $A \cap B = \{a, b, c, d, e\}$

ve  $A \cap C = \{c, d, e, f\}$

kümeleri Venn şemasında gösterilirse, C kümesinde en azından c, d, e, f elemanlarının bulunduğu görülür.

C kümesi en az 4 elemanlıdır.

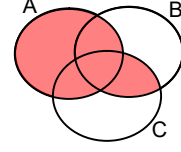


c.  $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

ve  $A \cup C = \{c, d, e, f\}$  dir.

Boyalı bölgeye karşılık gelen küme  $A \cup B$  ve  $A \cup C$  kümelerinin kesişimidir.

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{c, d, e\}$  olur.



## Etkinlik – 19

a. " $A \subset (A \cup B)$ " ① önermesinin

niceleme mantığındaki karşılığı,

" $\forall x, (x \in A) \Rightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)]$ " dir. ②

② önermesinin  $x = a$  için yorumlaması

" $(a \in A) \Rightarrow [(a \in A) \vee (a \in B)]$ " olur. ③

$p$ :  $a \in A$  ve  $q$ :  $a \in B$  denirse, ③ önermesi

" $p \Rightarrow p \vee q$ " önermesine dönüşür.

② önermesinin tüm yorumlamaları " $p \Rightarrow p \vee q$ " biçiminde olacaktır.

$p \Rightarrow p \vee q \equiv p' \vee p \vee q \equiv 1$  olup toloji olduğundan

" $A \subset (A \cup B)$ " önermesi doğrudur.

b. a'daki gibi ispatlayınız.

c. a'daki gibi düşünerek,

" $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$ " ① önermesine

önermeler mantığında karşılık gelen önermenin,

" $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$ " ② olduğunu ve

bunun da toloji olduğunu gösterebilirsiniz.

Böylece;  $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$  önermesinin

doğru olduğunu göstermiş olursunuz.

d. c'deki gibi ispatlayınız.

## Etkinlik – 20

a.  $(A \cup C = B \cup C) \Rightarrow (A = B)$  ① önermesinin bir gerektirme olmadığını göstereceğiz.

① önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının  $[(p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$  ② olduğunu gösteriniz.

Bu durumda problem, ② önermesinin bir toloji olmadığını göstermeye dönüşür.

Bunu da gösterebilirsiniz.

O hâlde;  $(A \cup C = B \cup C)$  olması  $A = B$  olmasını gerektirmez.

Örneğin;  $A = \{1, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$  ve  $C = \{1, 4, 5\}$  iken

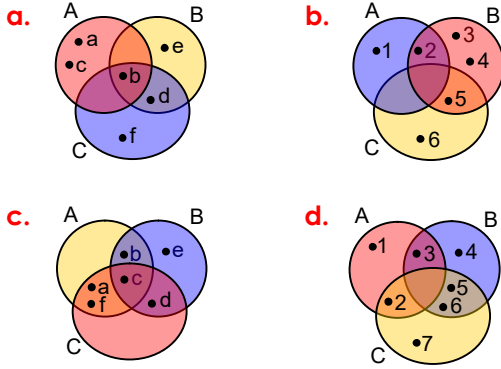
$A \cup C = B \cup C$  olduğu hâlde  $A \neq B$ 'dir.

**b.** “ $(A \cup C) \subset (B \cup C)$  önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının “ $(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)$ ”; “ $A \subset B$ ” ‘nin karşılığının “ $p \Rightarrow q$ ” olduğunu ve “ $[(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ ” önermesinin bir gerektirme olmadığını göstereceksiniz.  
Örneğin;  $A = \{2,3,4\}$ ,  $B = \{1,2,3\}$  ve  $C = \{4,5\}$  iken  $(A \cup C) \subset (B \cup C)$  olduğu halde,  $A \subset B$  ‘dir.

- c.** a’daki gibi yapınız.  
**d.** b’deki gibi yapınız.

### Etkinlik – 21

Üç kümeyi birlikte Venn şeması ile göstermek için önce üç kümenin kesişiminin elemanları, sonra ikişer ikişer kesişimlerinin elemanları yerleştirilmelidir.



### Etkinlik – 22

**a.** K ve K’ kümelerini liste yöntemi ile yazabilirsiniz. Ortak özellik yöntemi ile;

$$K = \{x \mid x \text{ sınıfınızdaki kız öğrencidir.}\},$$

$$K' = \{x \mid x \text{ sınıfınızdaki erkek öğrencidir.}\},$$

$$K \cup K' = \{x \mid x \text{ sınıfınızdaki öğrencidir.}\} \text{ olur.}$$

**b.** K’ ve  $K \cup K'$  kümelerini liste yöntemi ile yazmak çok zaman alır.

$$K' = \{x \mid x \text{ okulunuzda kız öğrencidir;} \\ x \text{ sizin sınıfınızda değildir.}\}$$

$$K \cup K' = \{x \mid x \text{ okulunuzdaki kız öğrencidir.}\}$$

- c.** b ile aynı biçimde yazılabilir.  
**d.** b ile aynı biçimde yazılabilir.

**e.** Bir T kümesi yazıp soyut ve somut tüm nesnelere bu kümeye aldığınızı düşününüz. Bu T kümesinde T’nin kuvvet kümesi olamayacaktır. O hâlde; böyle bir küme yoktur.

**f.** “Tüm nesnelere kümesi.” ya da “Kümelerin kümesi.” ifadeleri bir küme belirtmediğine göre; bir A kümesinin dışındaki nesnelere kümesinden söz edebilmek için, A’yı kapsayan bir kümenin belirtilmesi gerekir. bu kümeye **evrensel küme** diyeceğiz.

**Evrensel küme**, incelenen konu ile ilgili tüm nesnelere içerecek kadar geniş, ilgisiz nesnelere içermeyecek kadar dar seçilmelidir.

### Etkinlik – 23

$$\begin{aligned} \text{a. } (2x+3)(x+2)(x-3) &= 0 \\ \Rightarrow (2x+3=0) \vee (x+2=0) \vee (x-3=0) \\ &\quad \text{p(x)} \quad \quad \text{q(x)} \quad \quad \text{r(x)} \end{aligned}$$

Çift doğal sayılardan hiç biri **p(x)**, **q(x)** veya **r(x)** **açık önermelerinden** herhangi birini doğru yapmaz.

$$\Ç = \emptyset \text{ olur.}$$

**b.**  $x = 3$  için  
 $p(3) \equiv 0$ ,  $q(3) \equiv 0$ ,  $r(3) \equiv 1$  olduğundan  
 $p(3) \vee q(3) \vee r(3) \equiv 1$  dir.

$$\Ç = \{3\} \text{ olur.}$$

$$\text{c. } \Ç = \{-2,3\} \quad \text{d. } \Ç = \left\{-\frac{3}{2}, -2,3\right\} \quad \text{e. } \Ç = \left\{-\frac{3}{2}, -2,3\right\}$$

### Etkinlik – 24

**a.** “ $A \subset E$ ” ① önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı “ $\forall x, (x \in A) \Rightarrow (x \in E)$ ” dir. ②

② önermesinin “ $(a \in A) \Rightarrow (a \in E)$ ” ③

yorumunda  $p: a \in A$ ,  $a \in E \equiv 1$  sembolleştirmesi yapılırsa; bunun önermeler mantığındaki “ $p \Rightarrow 1$ ” ④ karşılığı elde edilir.

“ $p \Rightarrow 1$ ” önermesi bir toloji olduğundan “ $A \subset E$ ” önermesi doğrudur.

**b. I. yol**

" $A \cap E = A$ " önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı  $\forall x, [(x \in A) \wedge (x \in E)] \Leftrightarrow (x \in A)$  ;

önermeler mantığındaki karşılığı " $(p \wedge 1) \Leftrightarrow p$ " veya " $p \Leftrightarrow p$ " 'dir.

" $p \Leftrightarrow p$ " bir totoloji olduğundan " $A \cap E = A$ " 'dır.

**II. yol**

" $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ " teoremini ispatlamıştınız.

Buna göre;  $A \subset E$  olduğundan,  $A \cap E = A$  olur.

**III. yol**

$A \cap E = \{x | (x \in A) \wedge (x \in E)\}$  ( $\cap$  'nin tanımı)

$\Rightarrow A \cap E = \{x | (x \in A) \wedge 1\}$  ( $x \in E \equiv 1$ )

$\Rightarrow A \cap E = \{x | x \in A\}$  ( $p \wedge 1 \equiv p$ )

$\Rightarrow A \cap E = A$

**c.** Siz, **b**'deki I. ve II. yolları bu teoremin ispatına uygulayınız.

III. yolu biz uygulayalım:

$A \cup E = \{x | (x \in A) \vee (x \in E)\}$  ( $\cup$  'nin tanımı)

$\Rightarrow A \cup E = \{x | [(x \in A) \vee (x \in E)] \wedge (x \in E)\}$

$\Rightarrow A \cup E = \{x | [(x \in A) \vee 1] \wedge (x \in E)\}$  ( $x \in E \equiv 1$ )

$\Rightarrow A \cup E = \{x | 1 \wedge (x \in E)\}$  ( $p \vee 1 \equiv 1$ )

$\Rightarrow A \cup E = \{x | x \in E\}$  ( $1 \wedge p \equiv p$ )

$\Rightarrow A \cup E = E$

**Etkinlik – 25****a. I. yol**

$A \cup A' = \{x | (x \in A) \vee (x \in A')\}$  ( $\cup$  'nin tanımı)

$\Rightarrow A \cup A' = \{x | (x \in A) \vee (x \notin A)\}$  ( $A'$  'nin tanımı)

$\Rightarrow A \cup A' = \{x | [(x \in A) \vee (x \notin A)] \wedge (x \in E)\}$

$\Rightarrow A \cup A' = \{x | 1 \wedge (x \in E)\}$  ( $p \vee p' \equiv 1$ )

$\Rightarrow A \cup A' = \{x | x \in E\}$  ( $1 \wedge p \equiv p$ )

$\Rightarrow A \cup A' = E$

**II. yol**

" $A \cup A' = E$ " önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının " $(p \vee p' \equiv 1)$ " olduğunu göstererek ispatlayınız.

**b.** **a**'daki gibi ispatlayınız.

**c.**  $(A')' = \{x | (x \notin A)'\}$

$\Rightarrow (A')' = \{x | [(x \in A)']'\}$

$\Rightarrow (A')' = \{x | x \in A\}$

$\Rightarrow (A')' = A$

**d.**  $\emptyset' = \{x | (x \in E) \wedge (x \notin \emptyset)\}$

$\Rightarrow \emptyset' = \{x | (x \in E) \wedge (x \in \emptyset)'\}$

$\Rightarrow \emptyset' = \{x | (x \in E) \wedge 0'\}$

$\Rightarrow \emptyset' = \{x | (x \in E) \wedge 1\}$

$\Rightarrow \emptyset' = \{x | x \in E\}$

$\Rightarrow \emptyset' = E$

**e.** " $(A')' = A$ " ve " $\emptyset' = E$ " teoremlerini ispatladık.


Buna göre;  $E = \emptyset' \Rightarrow E' = (\emptyset')' \Rightarrow E' = \emptyset$  bulunur.


**f.** " $(A \subset B) \Leftrightarrow (B' \subset A')$ " ① önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının " $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p')$ " ② olduğunu gösteriniz.

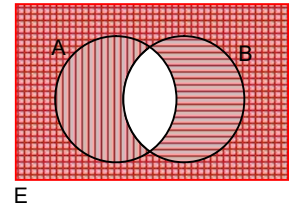
$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$  olduğundan ② önermesi totolojidir.

O hâlde; " $(A \subset B) \Leftrightarrow (B' \subset A')$ " çift gerektirmezdir.

**Etkinlik – 26**

$A' \rightarrow$  

$B' \rightarrow$  



**a.**  $(A \cup B)'$  kümesine karşılık gelen bölgenin hem yatay hem düşey çizgilerle taranmış olduğuna dikkat ediniz.

Buna göre;  $(A \cup B)' = A' \cap B'$  olmalıdır.

**b.**  $(A \cap B)'$  kümesine karşılık gelen bölgenin yatay **veya** düşey çizgilerle taranmış olduğuna dikkat ediniz.

Buna göre;  $(A \cap B)' = A' \cup B'$  olmalıdır.

## Etkinlik – 27

$$\begin{aligned} \text{a. } (A \cup B)' &= \{x | [x \in (A \cup B)]'\} \\ &\Rightarrow (A \cup B)' = \{x | [(x \in A) \vee (x \in B)]'\} \\ &\Rightarrow (A \cup B)' = \{x | (x \in A)' \wedge (x \in B)'\} \\ &\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B' \end{aligned}$$

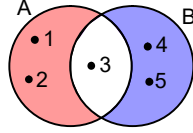
b. a'daki gibi ispatlayınız.

## Etkinlik – 28

$$\begin{aligned} \text{a. } A' \cap B' &= (A \cup B)' = \{1,2,3,5,7\}' = \{4,6\} \\ \text{b. } A' \cup B' &= (A \cap B)' = \{3,7\}' = \{1,2,4,5,6\} \end{aligned}$$

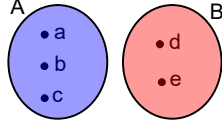
## Etkinlik – 29

$$\begin{aligned} \text{a. } A - B &= \{1,2\}; \\ B - A &= \{4,5\} \text{ olur.} \end{aligned}$$



$A \neq B$  iken  $A - B \neq B - A$  olduğu bu örnekte de görülmektedir.

$$\begin{aligned} \text{b. } A - B &= \{a,b,c\}; \\ B - A &= \{d,e\} \text{ olur.} \end{aligned}$$



$A \cap B = \emptyset$  ise  $A - B = A$  ve  $B - A = B$  olduğu açıktır.

c. Siz yapınız.

d. Siz yapınız.

## Etkinlik – 30

$$\begin{aligned} \text{a. } A - B &= \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\} && \text{(Fark tanımı)} \\ &\Rightarrow A - B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)'\} && \text{(Tümlenme tanımı)} \\ &\Rightarrow A - B = A \cap B' && \text{(\cap' nin tanımı)} \\ \text{b. } A - A &= A \cap A' \Rightarrow A - A = \emptyset \\ \text{c. } A - \emptyset &= A \cap \emptyset' \\ &\Rightarrow A - \emptyset = A \cap E && (\emptyset' = E) \\ &\Rightarrow A - \emptyset = A && (A \subset E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \emptyset - A &= \emptyset \cap A' \\ &\Rightarrow \emptyset - A = \emptyset && (\emptyset \subset A') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } E - A &= E \cap A' \\ &\Rightarrow E - A = A' && (A' \subset E) \end{aligned}$$

f. “ $(A \subset B) \Leftrightarrow (A - B = \emptyset)$ ” ① önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının “ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q') \Leftrightarrow 0]$ ” ② olduğunu ve ② önermesinin bir totoloji olduğunu gösteriniz.

## Etkinlik – 31

## a. I. yol

“ $(A \cup B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B)$ ” ① önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının “ $[(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ ” ② olduğunu ve ② önermesinin bir totoloji olduğunu gösteriniz.

## II. yol

Önce  $A = B$  'nin gerekli koşul olduğunu gösterelim:

$$A \cup B = A \cap B \text{ ise } A \subset (A \cap B) \text{ ① olur.}$$

Her A ve B kümesi için  $(A \cap B) \subset A$  dir. ②

① ve ②'den  $A \cap B = A$  ③ olur.

Aynı şekilde;  $A \cup B = A \cap B$  ise  $B \subset (A \cap B)$  ve

$(A \cap B) \subset B$  olduğundan  $A \cap B = B$  ④ olur.

③ ve ④'ten  $A = B$  bulunur.

$(A \cup B = A \cap B) \Rightarrow (A = B)$  bir gerektirmedi.

Şimdi de  $A = B$  'nin yeterli koşul olduğunu gösterelim:

$$A = B \text{ ise } A \cup B = A \text{ ve } A \cap B = A \text{ olup}$$

$$A \cup B = A \cap B \text{ bulunur.}$$

$(A = B) \Rightarrow (A \cup B = A \cap B)$  de gerektirmedi.

$(A \cup B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B)$  çift gerektirme olur.

$$\begin{aligned} \text{b. } A - (B \cup C) &= A \cap (B \cup C)' \\ &\Rightarrow A - (B \cup C) = A \cap (B' \cap C') \\ &\Rightarrow A - (B \cup C) = A \cap A \cap B' \cap C' \\ &\Rightarrow A - (B \cup C) = (A \cap B') \cap (A \cap C') \\ &\Rightarrow A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) \end{aligned}$$

c. b'deki gibi ispatlayınız.

$$d. A - B = A \cap B'$$

$$\Rightarrow A - B = B' \cap (A')' \quad [A = (A')']$$

$$\Rightarrow A - B = B' - A'$$

$$e. (A \cap B) - C = A \cap B \cap C' \quad (A - B = A \cap B')$$

$$\Rightarrow (A \cap B) - C = A \cap B \cap C' \cap C' \quad (\text{Tek kuvvet öz.})$$

$$\Rightarrow (A \cap B) - C = A \cap B \cap C' \cap C' \quad (\text{Değiş. ve bir. öz.})$$

$$\Rightarrow (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C) \quad (A \cap B' = A - B)$$

### f. I. yol

$$A \cap (B - C) = A \cap B \cap C' \quad (A - B = A \cap B')$$

$$\Rightarrow A \cap (B - C) = (A \cap B) - C \quad (A \cap B' = A - B)$$

C kümesinin  $A \cap B$  kümesinde bulunan elemanları

$A \cap B \cap C$ ,  $A \cap C$ ,  $B \cap C$   
kümelerinin de elemanlarıdır.

$A \cap B$  kümesinden C kümesini çıkarmak demek

$A \cap B \cap C$ ,  $A \cap C$  ya da  $B \cap C$  kümesini  
çıkarmak demektir.

Buna göre;

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap B \cap C),$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (B \cap C),$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

eşitlikleri geçerlidir.

### II. yol

$(A \cap B) - (A \cap C)$  kümesinin  $A \cap (B - C)$  kümesine  
eşit olduğunu gösterelim:

$$(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap B \cap (A \cap C)'$$

$$\Rightarrow (A \cap B) - (A \cap C) = A \cap B \cap (A' \cup C')$$

$$\Rightarrow (A \cap B) - (A \cap C) = B \cap [A \cap (A' \cup C')]$$

$$\Rightarrow (A \cap B) - (A \cap C) = B \cap [(A \cap A') \cup (A \cap C')]$$

$$\Rightarrow (A \cap B) - (A \cap C) = B \cap [\emptyset \cup (A \cap C')]$$

$$\Rightarrow (A \cap B) - (A \cap C) = B \cap A \cap C'$$

$$\Rightarrow (A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B \cap C')$$

$$\Rightarrow (A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$$

İşlemlerin dayandırıldığı kuralları siz gösteriniz.

### Etkinlik – 32

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$\Rightarrow A \Delta B = (A \cap B') \cup (B \cap A')$$

$$\Rightarrow A \Delta B = [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A']$$

$$\Rightarrow A \Delta B$$

$$= [(A \cup B) \cap (B' \cup B)] \cap [(A \cup A') \cap (B' \cup A')]$$

$$\Rightarrow A \Delta B = [(A \cup B) \cap E] \cap [E \cap (A' \cup B')]$$

$$\Rightarrow A \Delta B = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$$

$$\Rightarrow A \Delta B = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$$

$$\Rightarrow A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

İşlemlerin dayandırıldığı kuralları siz gösteriniz.

### Etkinlik – 33

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) \text{ ① ve}$$

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C) \text{ ②}$$

önermelerinin doğru olduğu gösterilecektir.

② önermesini size bırakıyoruz.

① önermesinin doğruluğunu biz gösterelim:

### I. yol

$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$  ① önermesinin  
önermeler mantığındaki karşılığının

$$[p \wedge (q' \Leftrightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q)' \Leftrightarrow (p \wedge r)] \text{ ②}$$

olduğu ve bunun bir totoloji olduğu gösterilebilir.

O hâlde;  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

eşitliği geçerlidir.

### II. yol

$(A \cap B) \Delta (A \cap C)$  kümesinin  $A \cap (B \Delta C)$  kümesine  
eşit olduğunu gösterelim :

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

$$= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] - [(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$

$$= [A \cap (B \cup C)] \cap (A \cap B \cap C)'$$

$$= A \cap (B \cup C) \cap [A' \cup (B \cap C)']$$

$$= (B \cup C) \cap A \cap [A' \cup (B \cap C)']$$

$$= (B \cup C) \cap \left\{ (A \cap A') \cup [A \cap (B \cap C)'] \right\}$$



$$\begin{aligned}
&= (B \cup C) \cap A \cap (B \cap C)' \\
&= A \cap [(B \cup C) - (B \cap C)] \\
&= A \cap (B \Delta C)
\end{aligned}$$

İşlemlerin dayandırıldığı kuralları siz gösteriniz.

### Etkinlik – 34

- a.  $A \cap (B \cup C)$                       b.  $B - (A \cup C)$   
c.  $[A - (B \cup C)] \cup [(B \cap C) - A]$   
d.  $(A \cap B \cap C) \cup [C - (A \cup B)]$   
e.  $(A - B) \cap C$                       f.  $C - (A \cup B)$   
g.  $[(A \cap C) - B] \cup (B - C)$                       h.  $(A \cup B) \Delta C$

### Etkinlik – 35

Belirtilen kümeleri, önce küme işlemlerinden yararlanarak sadeleştirilim :

- a.  $(A \cap B) \cup (A - B)$   
 $= (A \cap B) \cup (A \cap B')$  (Neden?)  
 $= A \cap (B \cup B')$  (Neden?)  
 $= A \cap E$  (Neden?)  
 $= A$  (Neden?)
- b.  $(A \cup B) \cap B'$   
 $= (A \cap B') \cup (B \cap B')$  (Neden?)  
 $= (A \cap B') \cup \emptyset$  (Neden?)  
 $= A \cap B'$  (Neden?)
- c.  $(A \cup B) \cap (A \cup B')$   
 $= A \cup (B \cap B')$  (Neden?)  
 $= A \cup \emptyset$  (Neden?)  
 $= A$  (Neden?)
- d.  $[(A \cup B') \cap (A \cap C)] - [(A \cap C) - B]$   
 $= (A \cap C) - (A \cap C \cap B')$  (Neden?)  
 $= (A \cap C) \cap (A \cap C \cap B)'$  (Neden?)  
 $= (A \cap C) \cap (A' \cup C' \cup B)$  (Neden?)  
 $= [(A \cap C) \cap (A' \cup C')] \cup [A \cap C \cap B]$  (Neden?)  
 $= [(A \cap C) \cap (A \cap C)'] \cup (A \cap B \cap C)$  (Neden?)  
 $= \emptyset \cup (A \cap B \cap C)$  (Neden?)  
 $= A \cap B \cap C$

- e.  $(A \cap B) \cup [B \cap (C - A)]$   
 $= (A \cap B) \cup (A' \cap B \cap C)$  (Neden?)  
 $= [(A \cap B) \cup (A' \cap B)] \cap [(A \cap B) \cup C]$  (Neden?)  
 $= (A \cup A') \cap B \cap [(A \cap B) \cup C]$  (Neden?)  
 $= [B \cap (A \cap B)] \cup (B \cap C)$  (Neden?)  
 $= (A \cap B) \cup (B \cap C)$  (Neden?)  
 $= (A \cup C) \cap B$  (Neden?)

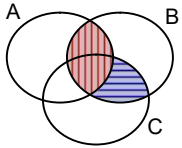
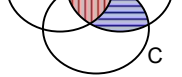
- f.  $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C')$   
 $= (A \cap B') \cup (A \cap C') \cup (B \cap C)$  (Neden?)  
 $= [A \cap (B' \cup C')] \cup (B \cap C)$  (Neden?)  
 $= [A \cup (B \cap C)] \cap [(B' \cup C') \cup (B \cap C)]$  (Neden?)  
 $= [A \cup (B \cap C)] \cap [(B \cap C)' \cup (B \cap C)]$  (Neden?)  
 $= A \cup (B \cap C)$  (Neden?)

- g.  $[A \cap (A' \cup B)] \cup [(A \cup B') \cap B]$   
 $= (A \cap A') \cup (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (B' \cap B)$   
 $= (A \cap B)$

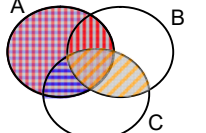


- h.  $[(A' \cup B) \cap (B \cup C)] \cup (B' \cap C)$   
 $= B \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C)$   
 $= B \cup [(A' \cup B') \cap C]$   
 $= (B \cup A' \cup B') \cap (B \cup C)$   
 $= (B \cup C)$  (Neden?)

Şimdi de Venn şemasından yararlanarak sadeleştirme yapalım :



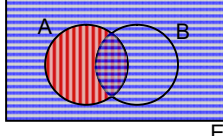
a, b, c, d'yi size bırakıyoruz.



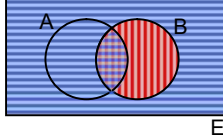
- e.  $A \cap B \rightarrow$    
 $B \cap (C - A) \rightarrow$  

Taralı bölgelerin birleşimi  $(A \cup C) \cap B$ 'dir.

- f.  $A - B \rightarrow$    
 $A - C \rightarrow$    
 $B - C' \rightarrow$  

Taralı bölgelerin birleşimi  $A \cup (B \cap C)$ 'dir.

g.  $A \rightarrow$    
 $A' \cup B \rightarrow$    
 $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$  olur. 

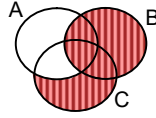
$A \cup B' \rightarrow$    
 $B \rightarrow$    
 $(A \cup B') \cap B = A \cap B$  olur. 

Birleştirirsek,

$$[A \cap (A' \cup B)] \cup [(A \cup B') \cap B] = (A \cap B) \text{ bulunur.}$$

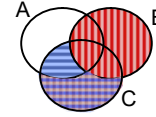
h.  $A' \cup B \rightarrow$    


$A' \cup B$  kümesinin  
 $B \cup C$  ile kesişimi  
yandaki taralı  
bölge olur.



Taralı bölgeye  
 $B' \cap C$  eklenirse,

$$[(A' \cup B) \cap (B \cup C)] \cup (B' \cap C) = B \cup C \text{ elde edilir.}$$

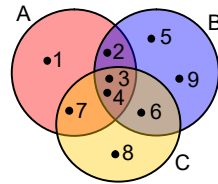


### Etkinlik – 36

$$(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$$

$$\Rightarrow A \cap B \cap C = \{3,4\} \text{ olur.}$$

Buna göre,  $A \cap B$ ,  $A \cap C$ ,  
 $B \cap C$  kümeleri  
şemaya yerleştirilir.



$(A \cup C) - (B \cup C) = \{1\}$  olduğundan, 1 yalnız A'nın  
elemanıdır.

$A \cup C$  kümesinden yararlanarak, yalnız C'nin  
elemanı;

$B \cup C$  kümesinden yararlanarak, yalnız B'nin  
elemanları yerleştirilir.

### Etkinlik – 37

a.  $A = \{a,b,c\}$  ve  $B = \{d,e\}$  ise

$$A \cup B = \{a,b,c,d,e\} \text{ ve } A \cap B = \emptyset \text{ olur.}$$

Bu durumda;

$$s(A \cup B) = 5, s(A) = 3, s(B) = 2 \text{ ve}$$

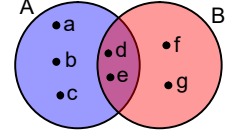
$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) \text{ olur.}$$

b.  $A = \{a,b,c,d,e\}$  ve

$B = \{d,e,f,g\}$  ise

$$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g\} \text{ ve}$$

$$A \cap B = \{d,e\} \text{ olur.}$$



$s(A \cup B)$  sayısını bulmak için, işe  $s(A) + s(B)$   
toplamı ile başlanabilir.  $s(A \cap B)$  sayısı - $s(A)$ 'nın  
ve  $s(B)$ 'nin içinde olmak üzere- iki kere sayılmış  
olacağından birini çıkarmak gerekir.

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \text{ olmalıdır.}$$

Gerçekten; verilen A ve B kümeleri için  $s(A) = 5$ ,

$$s(B) = 4, s(A \cup B) = 7, s(A \cap B) = 2 \text{ olup}$$

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \text{ eşitliği doğrulanır.}$$

### Etkinlik – 38

$$s(A \cup B)$$

$$= \underbrace{s(A - B) + s(A \cap B)}_{s(A)} + \underbrace{s(B - A) + s(A \cap B)}_{s(B)} - s(A \cap B)$$

$$\Rightarrow s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \text{ olur.}$$

### Etkinlik – 39

A, B ve C ayrık kümeler olsaydı,

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) \text{ olurdu.}$$

Genel durumda;

bu toplamda  $s(A \cap B)$

hem  $s(A)$ 'nin hem  $s(B)$ 'nin,

$s(A \cap C)$

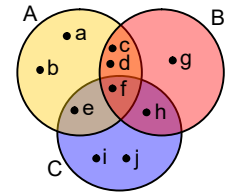
hem  $s(A)$ 'nin hem  $s(C)$ 'nin,

$s(B \cap C)$

hem  $s(B)$ 'nin hem  $s(C)$ 'nin içinde

olmak üzere ikişer kere sayılmış olurlar.

Birer kere çıkarmak gerekir:



$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + ?$$

$s(A \cap B \cap C)$  sayısı  $s(A)$ ,  $s(B)$ ,  $s(C)$ 'nin içinde olmak üzere üç kere sayılmış;  
 $s(A \cap B)$ ,  $s(A \cap C)$ ,  $s(B \cap C)$ 'nin içinde olmak üzere üç kere çıkarılmış olup toplamda bulunmamaktadır.

Bunu eklememiz gerekir:

Buna göre;

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

bulunur.

#### Etkinlik – 40

$s(A \cup B \cup C)$  sayısını bulmak için

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

eşitliğinden yararlanacağız:

$$\begin{aligned} s(A \cup B \cup C) &= s(A) + s(B \cup C) - s[A \cap (B \cup C)] \\ \Rightarrow s(A \cup B \cup C) &= s(A) + s(B) + s(C) - s(B \cap C) - s[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\ \Rightarrow s(A \cup B \cup C) &= s(A) + s(B) + s(C) - s(B \cap C) - s[(A \cap B) + s(A \cap C) - s(A \cap B \cap C)] \\ \Rightarrow s(A \cup B \cup C) &= s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

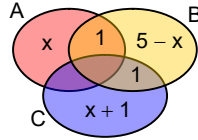
#### Etkinlik – 41

$A \cap C = \emptyset$  olduğundan,

$$s(A \cap B) = 1 \text{ ve}$$

$$s(B \cap C) = 1$$

değerleri yerlerine yazılmıştır.



$s(A - B) = x$  denirse;

$$s(A \cup B) = 7 \text{ olduğundan } s[B - (A \cup C)] = 5 - x \text{ ve}$$

$$s(B \cup C) = 8 \text{ olduğundan } s[C - (A \cup B)] = x + 1$$

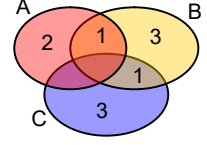
olur.

$s(A \cup C) = 7$  olduğundan,

$$x + 1 + x + 1 + 1 = 7 \Rightarrow x = 2$$

bulunur.

$$s(A \cup B \cup C) = 10 \text{ olur.}$$



#### Etkinlik – 42

a. Burada; (Ad, Soyadı) ifadesindeki “(..., ...)” sıralamaya özel bir anlam yüklenmiştir.

Ayrıca içine soldan sağa doğru önce ad, sonra soyadı yazılacaktır.

Küme ayırıcının içinde sıra gözetilmediğinden, (İnci, Erol) ifadesi {İnci, Erol} biçiminde yazılırsa; hangisinin ad, hangisinin soyadı olduğu anlaşılmaz.

b. (2,4) ifadesi, 2 numaralı yarışmacının 4. olduğunu;

(4,2) ifadesi, 4 numaralı yarışmacının 2. olduğunu belirtir.

c. (5,7,3) ifadesi, 5 numaralı sokaktaki 7 numaralı apartmanın 5 numaralı dairesi anlamına gelir.

Ayrıca içindeki ilk yer için 3 seçenek, ikinci yer için 2 seçenek, üçüncü yer için 1 seçenek olacağından, bu sayılar  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  değişik sıra ile yazılabilir.

Öyleyse; zarf hatalı sıralama sonucu 6 değişik adrese gidebilir.

#### Etkinlik – 43

$$a. K = \{(13, A), (13, B), (13, C), (27, A), (27, B), (27, C), (44, A), (44, B), (44, C)\}$$

$$b. K = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{O}, y \in \mathbb{N}\}$$

#### Etkinlik – 44

$$a. A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

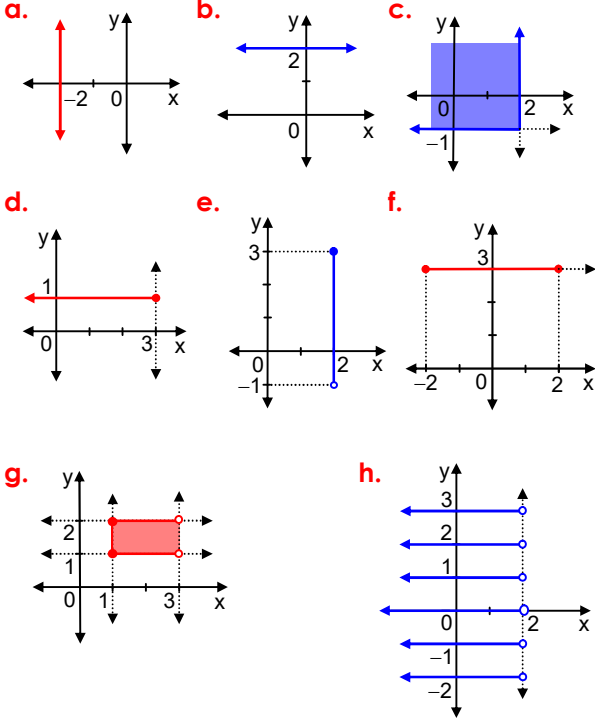
$$B \times A = \{(b, a), (b, b), (c, a), (c, b), (d, a), (d, b), (e, a), (e, b)\}$$

Örneğin;  $(a, b) \neq (b, a)$  olduğundan

$A \times B \neq B \times A$  olur.

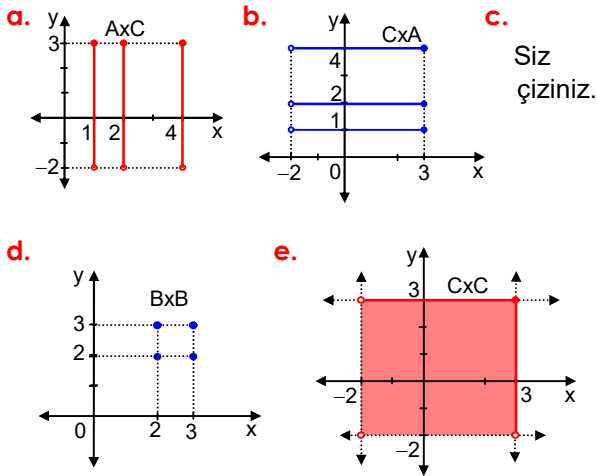
b.  $s(A)=2$ ,  $s(B)=4$  ve  $s(A \times B)=8$  görülür.  
 $s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$  olduğu doğrulanır.

## Etkinlik – 45



## Etkinlik – 46

Grafiklere göre;  $A = \{1,2,4\}$ ,  $B = \{2,3\}$  ve  $C = \{x | -2 < x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$  kümeleridir.



## Etkinlik – 47

a.  $A \times B = \{(-2,-1), (-2,2), (1,-1), (1,2), (3,-1), (3,2)\}$   
 $(A \times B) \times C = \{(-2,-1,2), (-2,-1,3), (-2,2,2), (-2,2,3),$   
 $(1,-1,2), (1,-1,3), (1,2,2), (1,2,3),$   
 $(3,-1,2), (3,-1,3), (3,2,2), (3,2,3)\}$

b.  $B \times C = \{(-1,2), (-1,3), (2,2), (2,3)\}$   
 $A \times (B \times C) = \{(-2,-1,2), (-2,-1,3), (-2,2,2), (-2,2,3),$   
 $(1,-1,2), (1,-1,3), (1,2,2), (1,2,3),$   
 $(3,-1,2), (3,-1,3), (3,2,2), (3,2,3)\}$

$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$  olduğuna dikkat ediniz.

Kartezyen çarpım işleminin birleşme özelliği olduğunu kanıtlayacağız.

c.  $B \cup C = \{-1,2,3\}$   
 $A \times (B \cup C) = \{(-2,-1), (-2,2), (-2,3), (1,-1),$   
 $(1,2), (1,3), (3,-1), (3,2), (3,3)\}$

$A \times B = \{(-2,-1), (-2,2), (1,-1), (1,2), (3,-1), (3,2)\}$

$A \times C = \{(-2,2), (-2,3), (1,2), (1,3), (3,2), (3,3)\}$

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

olduğuna dikkat ediniz.

Kartezyen çarpım işleminin birleşim işlemi üzerine dağılıma özelliği olduğunu kanıtlayacağız.

d.  $B \cap C = \{2\}$  olur.  
 $(B \cap C) \times A$ ,  $B \times A$ ,  $C \times A$ ,  $(B \times A) \cap (C \times A)$   
kümeleri yazılırsa;  
 $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$  olduğu görülür.

e.  $C - B = \{3\}$  olur.  
 $A \times (C - B)$ ,  $A \times C$ ,  $A \times B$ ,  $(A \times C) - (A \times B)$   
kümeleri yazılırsa;  
 $A \times (C - B) = (A \times C) - (A \times B)$  olduğu görülür.

f.  $A \Delta B = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$  olur.  
 $(A \Delta B) \times C$  ve  $(A \times C) \Delta (B \times C)$  kümeleri yazılırsa;  
 $(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$  olduğu görülür.

Kartezyen çarpım işleminin kesişim işlemi, fark işlemi ve simetrik fark işlemi üzerine dağılıma özelliği olduğunu kanıtlayacağız.

**Etkinlik – 48**

Yapacağımız ispatlarda, bir önermeden ardışığına geçişteki gerekçeleri belirtmeyeceğiz.

Bu gerekçeleri siz belirtmelisiniz.

**a.**  $A \times (B \cup C)$ 

$$\begin{aligned} &= \{(x, y) \mid (x \in A) \wedge [(y \in B) \vee (y \in C)]\} \\ &= \{(x, y) \mid [(x \in A) \wedge (y \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (y \in C)]\} \\ &= \{(x, y) \mid [(x, y) \in (A \times B)] \vee [(x, y) \in (A \times C)]\} \\ &= (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$  önermesi teoremdir.

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$  olduğunu da siz gösteriniz.

Kartezyen çarpım işleminin birleşim işlemi üzerine sağdan ve soldan **dağılıma özelliği** vardır.

**b.**  $(A \cap B) \times C$ 

$$\begin{aligned} &= \{(x, y) \mid (x \in A) \wedge [(x \in B) \wedge (y \in C)]\} \\ &= \{(x, y) \mid [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(y \in C) \wedge (y \in C)]\} \\ &= \{(x, y) \mid [(x \in A) \wedge (y \in C)] \wedge [(x \in B) \wedge (y \in C)]\} \\ &= \{(x, y) \mid [(x, y) \in (A \times C)] \wedge [(x, y) \in (B \times C)]\} \\ &= (A \times C) \cap (B \times C) \end{aligned}$$

$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$  önermesi teoremdir.

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$  olduğunu da siz gösteriniz.

Kartezyen çarpım işleminin kesişim işlemi üzerine sağdan ve soldan **dağılıma özelliği** vardır.

**c.**  $A \times (B - C) = A \times (B \cap C')$ 

$$\begin{aligned} &= \{(x, y) \mid (x \in A) \wedge [(y \in B) \wedge (y \in C')]\} \\ &= \{(x, y) \mid [(x \in A) \wedge (x \in A)] \wedge [(y \in B) \wedge (y \in C')]\} \\ &= \{(x, y) \mid [(x \in A) \wedge (y \in B)] \wedge [(x \in A) \wedge (y \in C')]\} \\ &= \{(x, y) \mid [(x, y) \in (A \times B)] \wedge [(x, y) \in (A \times C')]\} \\ &= \{(x, y) \mid [(x, y) \in (A \times B)] \wedge [(x, y) \notin (A \times C)]\} \\ &= \{(x, y) \mid [(x, y) \in (A \times B)] \wedge [(x, y) \in (A \times C)']\} \\ &= (A \times B) \cap (A \times C)' \\ &= (A \times B) - (A \times C) \end{aligned}$$

$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$  önermesi teoremdir.

$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$  olduğunu da siz gösteriniz.

**d.** a ve c'de ispatladığımız teoremleri kullanacağız:

$$\begin{aligned} A \times (B \Delta C) &= A \times [(B - C) \cup (C - B)] \\ &= [A \times (B - C)] \cup [A \times (C - B)] \\ &= [(A \times B) - (A \times C)] \cup [(A \times C) - (A \times B)] \\ &= (A \times B) \Delta (A \times C) \end{aligned}$$

$A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$  'dir.

$(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$  olduğunu da siz gösteriniz.

**Etkinlik – 49****a.**  $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$ 

$$\begin{aligned} &= \{1, 2, 3, 4\} \times \{3, 4, 5\} \\ &= \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), \\ &\quad (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5)\} \end{aligned}$$

**b.**  $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$ 

$$\begin{aligned} &= \{1, 2, 3\} \times \{3, 4\} \\ &= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\} \end{aligned}$$

**c.**  $(A \times C) - (B \times C) = (A - B) \times C$ 

$$= \{1\} \times \{3, 4, 5\} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$$

**d.**  $(A \times B) \Delta (A \times C) = A \times (B \Delta C)$ 

$$\begin{aligned} &= \{1, 2, 3\} \times \{2, 5\} \\ &= \{(1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\} \end{aligned}$$

**Etkinlik – 50**

**a.**  $A \subset B \Rightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$  ve **I**  
 $C \subset D \Rightarrow \forall y, y \in C \Rightarrow y \in D$  olur. **II**

**I** ve **II** önermelerine göre;

$$\begin{aligned} \forall (x, y), (x, y) \in A \times C &\Rightarrow (x \in A) \wedge (y \in C) \\ &\Rightarrow (x \in B) \wedge (y \in D) \\ &\Rightarrow (x, y) \in B \times D \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$(A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \times C \subset B \times D)$$

önermesi bir teoremdir.

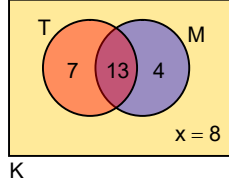
**b.**  $(A \subset B) \Rightarrow (A \times C \subset B \times C)$  önermesi  
 $(A \subset B \wedge C \subset C) \Rightarrow (A \times C \subset B \times C)$  olarak yazılırsa;  
 önerme **a'**'daki teoreme dönüşür.

**c.**  $(A \subset B) \Rightarrow (A \times A \subset A \times B)$  önermesi  
 $(A \subset A \wedge A \subset B) \Rightarrow (A \times A \subset A \times B)$  olarak yazılırsa;  
 önerme **a'**'daki teoreme dönüşür.

**d.**  $(A \subset B) \Rightarrow (A \times B \subset B \times B)$  önermesi  
 $(A \subset B \wedge B \subset B) \Rightarrow (A \times B \subset B \times B)$  olarak yazılırsa;  
 önerme **a'**'daki teoreme dönüşür.

## Etkinlik – 51

$s(K) = 32$ ,  $s(T) = 20$ ,  
 $s(M') = 15$ ,  $s(T \cap M)' = 19$   
 olarak verilmiştir.



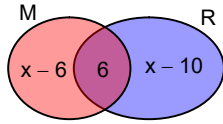
**a.**  $s(M) = s(K) - s(M')$   
 $\Rightarrow s(M) = 32 - 15$   
 $\Rightarrow s(M) = 17$  olur.

$s(T \cap M) = s(K) - s(T \cap M)' = 32 - 19 = 13$ ;  
 $s(T - M) = s(T) - s(T \cap M) = 20 - 13 = 7$ ;  
 $s(M - T) = s(M) - s(T \cap M) = 17 - 13 = 4$  olur.

**b.** Bu değerler şemadaki yerlerine yazılırsa,  
 $s(K) = 7 + 13 + 4 + x = 32$   
 $\Rightarrow x = 8$  bulunur.  
 İki dersten de kalan öğrenci sayısı 8'dir.

## Etkinlik – 52

$s(M \cup R) = 30$ ,  
 $s(M) = s(R) + 4$ ,  
 $s(M \cap R) = 6$   
 olarak verilmiştir.



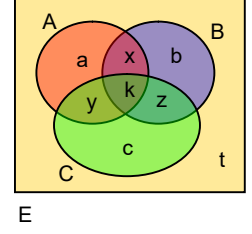
**a.**  $s(M) = x$  denirse,  $s(R) = x - 4$  ve  
 $s(R - M) = x - 10$  olur.

**b.**  $s(M \cup R) = s(M) + s(R - m)$   
 $\Rightarrow 30 = x + x - 10$   
 $\Rightarrow x = 20$  bulunur.

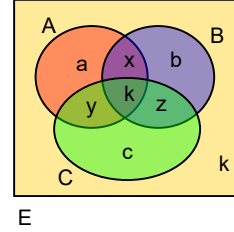
Müzik kursuna katılan öğrenci sayısı 20'dir.

## Etkinlik – 53

- a.**  $a + b + c$   
**b.**  $a + b + c + t$   
**c.**  $a + b + c + x + y + z + k$   
**d.**  $x + y + z$   
**e.**  $x + y + z + a + b + c + t$   
**f.**  $x + y + z + k$   
**g.**  $k$   
**h.**  $a + b + c + x + y + z + k + t$



## Etkinlik – 54



- a.** Satılan gazetelerin toplam sayısı,  
 $a + b + c + 2(x + y + z) + 3k$  olur. (Neden?)  
**b.** Toplam daire sayısı,  
 $a + b + c + x + y + z + 2k$  olur. (Neden?)  
**c.** En az iki gazete alan daire sayısı,  
 $x + y + z + k$  olur. (Neden?)

$$a + b + c + 2(x + y + z) + 3k = 70 \text{ ve}$$

$$a + b + c + x + y + z + 2k = 40 \text{ olduğu verilmiştir.}$$

Bu bilgileri değerlendirerek, en az iki gazete alan daire sayısının 30 olduğu bulunur.  
 Bunu açıklayınız.

## Etkinlik – 55

a. Şema dört ayrık kümenin birleşimini göstermektedir.

	Türk öğ.	Alman öğ.
Kız öğ.	I	II
Erkek öğ.	III	IV

$$I = \{x \mid x \text{ Türk'tür ve kızdır.}\}$$

$$II = \{x \mid x \text{ Alman'dır ve kızdır.}\}$$

$$III = \{x \mid x \text{ Türk'tür ve erkektir.}\}$$

$$IV = \{x \mid x \text{ Alman'dır ve erkektir.}\}$$

b. Gruptaki öğrencilerin sayısına  $10 \cdot x$  denirse,

$$\text{Alman öğrenci sayısı } 10 \cdot x \cdot \frac{30}{100} = 3x ;$$

$$\text{kız öğrenci sayısı } 10 \cdot x \cdot \frac{40}{100} = 4x \text{ olur.}$$

Türk kızlarının sayısına da  $y$  denirse, alt kümelerdeki öğrenci sayıları şemada gösterildiği gibi olur.

	Türk öğ.	Alman öğ.
Kız öğ.	$y$	$4x - y$
Erkek öğ.	$7x - y$	$y - x$

c. Alman erkeklerinin sayısı Türk kızlarının sayısından 3 eksiktir.

$$\text{Buna göre, } y - x + 3 = y \Rightarrow x = 3 \text{ olur.}$$

Gruptaki öğrenci sayısı da,

$$10 \cdot x = 10 \cdot 3 = 30 \text{ bulunur.}$$

d. Türk erkekleri ile Alman kızlarının sayılarının toplamı 19'dur.

$$x = 3 \text{ bulunduğundan}$$

$$(7x - y) + (4x - y) = 19 \Rightarrow y = 7 \text{ olur.}$$