Alıştırmalar ve Problemler – 1

1. **a.** Küme belirtmez. Neden?

b. Küme belirtir. Neden?

c. Küme belirtmez. Neden?

d. Belirttiği küme $\varnothing$'dir.

e. Hiçbir küme kendi kuvvet kümesini eleman olarak almaz. O hâlde, yazılabilecek hiçbir küme "bütün kümelerin kümesi" olamaz.

f. Küme belirtir. Neden?

2. **a.** 0 **b.** 1 **c.** 1 **d.** 3
e. 3 **f.** 3 **g.** 3 **h.** 5

3. **a.** $\subset$ **b.** $\subset$, $\in$ **c.** $\not\subset$, $\notin$
d. $\not\subset$ **e.** $\supset$ **f.** $\subset$

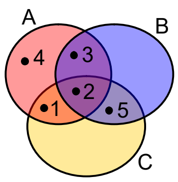
4. **a.** $\Delta \to k$; $\square \to b$ **b.** $\Delta \to 5$; $\square \to 1$
c. $\Delta \to \{3\}$; $\square \to 3$ **d.** $\Delta = \square$
e. $\Delta \to 1, 3, 4, 6$ **f.** $\Delta \to c, d$; $\square \to a$

5. $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{a\}$, $\{\{a\}\}$, $\{\varnothing, a\}$, $\{\varnothing, \{a\}\}$, $\{a\{a\}\}$, $\{\varnothing, a, \{a\}\}$

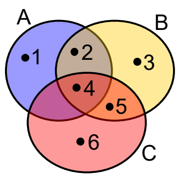
6. **a.** Yanlış **b.** Yanlış **c.** Doğru
d. Doğru **e.** Yanlış **f.** Doğru
g. Yanlış **h.** Doğru

7. $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{b,c,d,e,f\}$, $C = \{c,d,e\}$

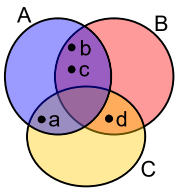
8. **a.**



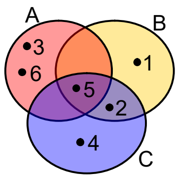
b.



c.



d.



9. **a.** Önce $A = \varnothing$ önermesinin gerekli koşul olduğunu gösterelim :

$A \subset \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$

Hipoteze göre; $A \subset \varnothing$'dir.

$\varnothing \subset A$ olduğundan $A = \varnothing$ olur.

($A \subset B$ ve $B \subset A$ ise $A = B$)

$A = \varnothing \Rightarrow A \subset \varnothing$ olduğunu gösterelim :

$A = \varnothing$ ise, $A \subset A$ olduğundan $A \subset \varnothing$ olur.

$A \subset \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$ teoremi ispatlanmıştır.

b. "$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$" ①

önermesinin **Niceleme mantığı**ndaki karşılığı,

$\forall x, \left[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)\right]$

$\Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in C)$ ②

olup **Önermeler mantığı**ndaki karşılığı,

$\left[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\right] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ③ olur.

③ önermesi yalnız $p \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ iken yanlış olabilir.

Bu durumda; ③ önermesi,

$q \equiv 1$ iken

$\left[(1 \Rightarrow 1) \wedge (1 \Rightarrow 0)\right] \Rightarrow (1 \Rightarrow 0) \equiv 0 \Rightarrow 0 \equiv 1$;

$q \equiv 0$ iken

$\left[(1 \Rightarrow 0) \wedge (0 \Rightarrow 0)\right] \Rightarrow (1 \Rightarrow 0) \equiv 0 \Rightarrow 0 \equiv 1$ olup bir totolojidir.

"$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$"

önermesi doğrudur. Teorem ispatlanmıştır.

10. **a.** $\{a,b,...\}$

Noktalı yerlere $\{c,d,e,f\}$ kümesinin $2^4 = 16$ alt kümesinden biri konulabilir. 16

b. $2^6 - 2^4 = 48$ **c.** $2^3 = 8$ **d.** $2^3 = 8$

11. **a.** 2^6 **b.** 2^6 **c.** 2^5 **d.** $2^7 - 2^5$
e. $2 \cdot 2^5$ **f.** $2^7 - 2^5$ **g.** 2^5 **h.** $2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^5$
i. $2 \cdot 2^5$ **k.** $2 \cdot 2^5$

12. $a = 4$, $b = 2$, $c = 5$, $d = 1$, $e = 3$

13. **a.** 2 **b.** 5 **c.** 6 **d.** 8

14. 2^5

15. a. 2^3 **b.** 2^2

16. $s(A)=x$ denirse, $s(B)=x-3$ olur.

$2^x=3\cdot 2^{x-3}+80$

$\Rightarrow\ 2^x=3\cdot\frac{2^x}{8}+80 \ \Rightarrow\ 8\cdot 2^x=3\cdot 2^x+8\cdot 80$

$\Rightarrow\ 5\cdot 2^x=8\cdot 80 \ \Rightarrow\ 2^x=2^3\cdot 2^4 \ \Rightarrow\ 2^x=2^7$

$\Rightarrow x=7$ bulunur.

17. a. A kümesinin iki elemanı $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ olmak üzere, 3 değişik biçimde seçilebilir. Her seçim için 2^3 değişik alt küme yazılacağından, istenen sayı $3\cdot 2^3=24$ olur.

b. B kümesinin, A kümesinin 3 elemanını da bulunduran alt kümelerinin sayısı 2^3'tür. Buna göre; B kümesinin, $2^6-2^3=56$ alt kümesinde A kümesinin en çok iki elemanı bulunur.

c. $2^6+2^3=72$. Neden?

d. $2^6-2^3=56$. Neden?

18. K kümesi A'nın ve B'nin tüm elemanlarını bulundurmalıdır. Buna göre;

$\{1,2,3,5,6,7\}\subset K\subset\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

olmalıdır.

a. Soldaki kümeye 0, 4, 8, 9, 10 elemanlarından biri eklenir. 5 değişik K kümesi vardır?

b. Soldaki kümeye 4 eklenirse, geriye 0, 8, 9, 10 elemanları kalır. Bu elemanların oluşturduğu kümenin alt kümelerinin elemanları soldaki kümeye eklenir. $2^4=16$ değişik K kümesi vardır?

c. En küçük K kümesinde 2 ve 6 vardır. 0, 4, 8, 10 sayılarından 2'si bunlara eklenmelidir.

Bu kaç değişik biçimde yapılabilir?

Örneğin; 0 ve 4 sayılarının, (0,4) sıralaması bu 4 sayının $4\cdot 3=12$ değişik ikililerinden biridir. (4,0) sıralaması bir diğeridir. Öyleyse; 2 eleman, $\{0,4\}$ kümesi olarak, $4\cdot 3:2=6$ değişik biçimde seçilebilir. 8 elemanlı 6 değişik K kümesi elde edilir

C kümesinde kalan, soldaki kümenin elemanlarından farklı 3 elemanın belirteceği alt kümeler, 8 elemanlı K kümelerine eklenir.

İstenen K kümelerinin sayısı $6\cdot 2^3=48$ bulunur.

d. Soldaki kümede 6 vardır. 9'u da eklediğimizde, C kümesinde soldaki kümede olmayan 0, 4, 8, 10 elemanları kalır. Bunlardan 3'ü 4 değişik biçimde seçilebilir.

İstenen K kümelerinin sayısı 4 olur.

e. 3 eleman 6 değişik biçimde sıralanabilir. Bir sıralı üçlü $5\cdot 4\cdot 3$ değişik biçimde seçilebilir.

Öyleyse; A kümesinin 3 elemanlı $5\cdot 4\cdot 3:6=10$ alt kümesi vardır.

f. $11\cdot 10\cdot 9:6=165$ Neden?

g. 5 eleman $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$ değişik biçimde sıralanabilir.

$11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7:120=462$ bulunur.

h. C'nin 4 elemanlı alt kümelerinin sayısından A'nın 4 elemanlı alt kümelerinin sayısı çıkarılır.

$11\cdot 10\cdot 9\cdot 8:24-5\cdot 4\cdot 3\cdot 2:24=325$

19. A kümesi n elemanlı ise B kümesi $7-n$ elemanlı olur. İstenen, $2^n+2^{(7-n)}$ toplamının en küçük ve en büyük değerleridir.

Toplamın $n=3$ için en küçük, $n=7$ için en büyük olacağı görülür.

a. $2^3+2^4=24$

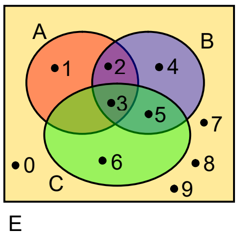
b. $2^7+2^0=129$

20. $B=E=\{1,2,3,4,5,6\}$ alınabileceğinden, B'nin en az 1 elemanlı her alt kümesi K kümesi olarak seçilebilir.

$2^6-1=63$

Alıştırmalar ve Problemler – 2

1.



a. $A \cap B = \{2,3\}$ **b.** $A \cup C = \{1,2,3,5,6\}$

c. $B - C = \{2,4\}$ **d.** $A \Delta B = \{1,4,5\}$

e. $A' \cap B' = \{6,7,8,9\}$

f. $B' \cup C' = \{0,1,2,4,6,7,8,9\}$

g. $A' \Delta C' = \{1,2,5,6\}$

$A' \Delta C' = A \Delta C$ olduğunu görünüz.

h. $(A \cup B) \cap C = \{3,5\}$ **i.** $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,5\}$

j. $A - (B \cap C) = \{1,2\}$ **k.** $(A \cup B) - C = \{1,2,4\}$

l. $(A - B) - C = \{1\}$ **m.** $B - (A - C) = \{3,4,5\}$

n. $B' - C' = \{6\}$

$B' - C' = C - B$ olduğunu görünüz.

o. $B' - (A \cup C) = \{0,7,8,9\}$

p. $(A \cup B) - (B \cap C) = \{1,2,4\}$

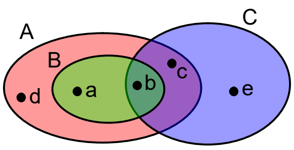
r. $(A - B) \cup (B - C) = \{1,2,4\}$

s. $(B \Delta C)' \cap (A' - C) = \{0,7,8,9\}$

t. $(A - C') \cup (B' - C) = \{0,1,3,7,8,9\}$

u. $(A' \Delta B') \cup (B - C') = \{1,3,4,5\}$

2.



a. $A \cap C = \{b,c\}$ **b.** $B \cup C = \{a,b,c,e\}$

c. $A - C = \{a,d\}$ **d.** $B \Delta C = \{a,c,e\}$

e. $A \cap (B \cup C) = \{a,b,c\}$ **f.** $(A \cap C) \cup B = \{a,b,c\}$

g. $C - (A \cap B) = \{c,e\}$ **h.** $(B \cup C) - A' = \{a,b,c\}$

i. $A - (B \cup C)' = \{a,b,c\}$ **j.** $(A - B) - C = \{d\}$

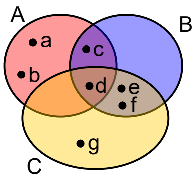
k. $B - (A \Delta C) = \{b\}$ **l.** $(A - C) \cup (A \cap B) = \{d\}$

m. $(A - B) \cup (C - B) = \{c,d,e\}$

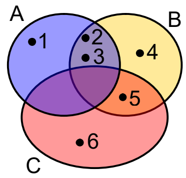
n. $B' \cap (A - C') = \{c\}$

o. $A - (B - C) = \{b,c,d\}$ **p.** $(A \Delta B) - (A \Delta C) = \{c\}$

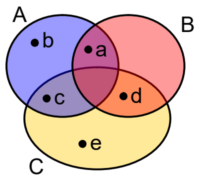
3. a.



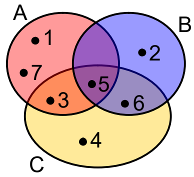
b.



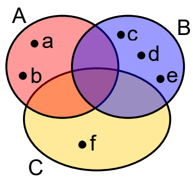
c.



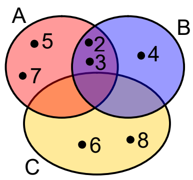
d.



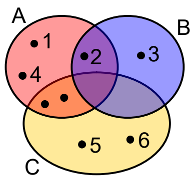
e.



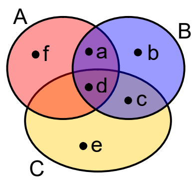
f.



g.

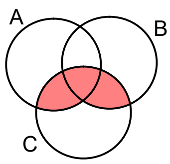


h.

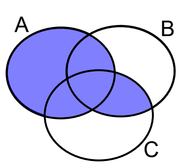


1 veya 4, isimsiz noktalara taşınabilir.

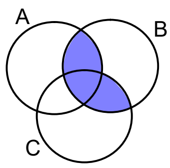
4. **a.** $(A \cup B) \cap C$



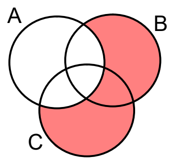
b. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$



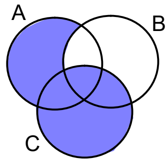
c. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$



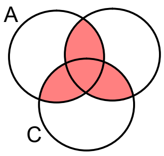
d. $(B \cup C) - A$



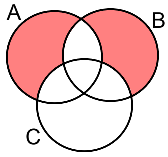
e. $(A\cup C)-(B-C)$



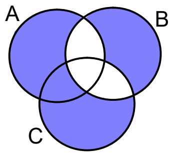
f. $[A\cap(B\cup C)]\cup(B\cap C)$



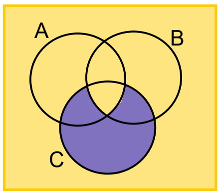
g. $(A\Delta B)-C$



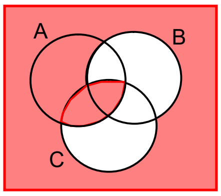
h. $(A\cup C)\Delta B$



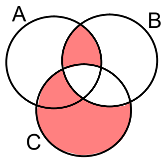
i. $(A\cap B)'-C'$



j. $(B\cup C)'\cup A$

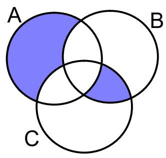


k.



$[(A\cap B)-C]\cup(C-B)$

l.



$[A-(B\cup C)]\cup[(B\cap C)-A]$

5. a. $\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\right]-(A\cap B\cap C)$

b. $\left[A-(B\cup C)\right]\cup\left[B-(A\cup C)\right]\cup\left[C-(A\cup B)\right]$

veya $\left[(A\Delta B)-C\right]\cup\left[C-(A\cup B)\right]$

c. $\left[(A\Delta B)-C\right]\cup(A\cap B\cap C)$

d. $\left[(A\cup C)-B\right]\cup(A\cap C)$

e. $\left[(A\cap B)-C\right]\cup(C-A)$

f. $(A\cap C)\cup B$

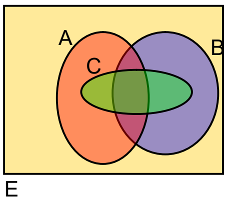
g. $\left[A-(B\cup C)\right]\cup(C-A)$

h. $(B\cap C)\cup(C-A)$

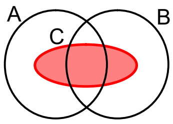
i. $(A\cap B)\cup(C-B)$

j. $\left[(C-B)\cap A\right]\cup\left[(B\cap C)-A\right]$

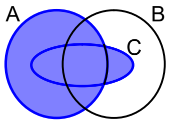
6. A, B, C kümeleri şemadaki gibi verilmiştir.
4. alıştırmada verilen kümelere karşılık gelen bölgeler aşağıda gösterilmiştir.



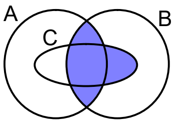
a.



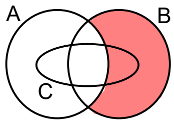
b.



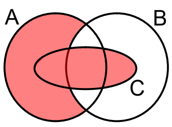
c.



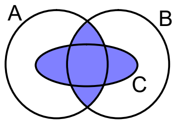
d.



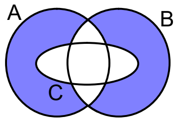
e.



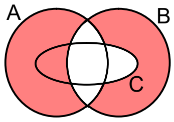
f.



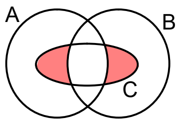
g.



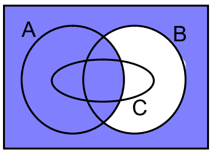
h.



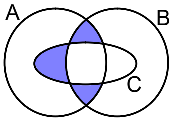
i.



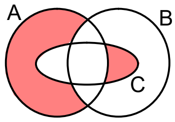
j.



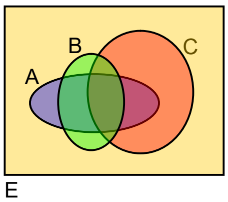
k.



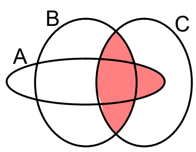
l.



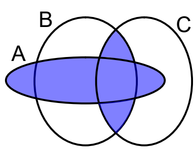
7. A, B, C kümeleri şemadaki gibi verilmiştir.
4. alıştırmada verilen kümelere karşılık gelen bölgeler aşağıda gösterilmiştir.



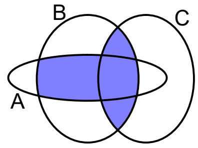
a.



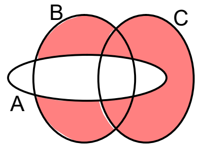
b.



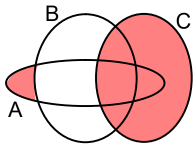
c.



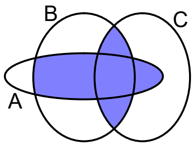
d.



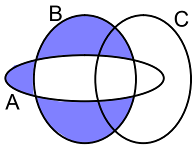
e.



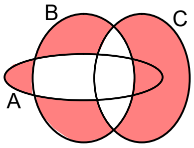
f.



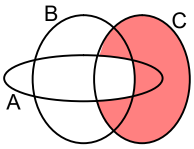
g.



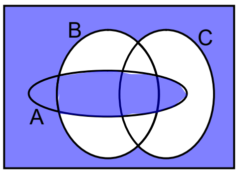
h.



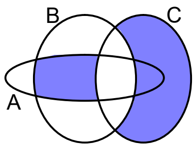
i.



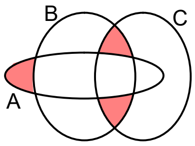
j.



k.



l.

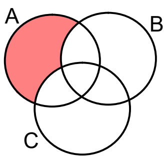


8. **a.** $\{a,b,c,d,e\}$ **b.** $\{1,2,3,4\}$

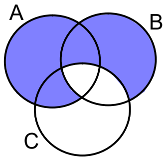
c. $\{4,5\}$ **d.** $\{b,d,f\}$

9. **a.** $\{b,c\}$ **b.** $\{1,2,3,4,5,6\}$

10. $(A\cup B)-(B\cup C)$ kümesinin $A-(B\cup C)$ kümesine eşit olduğunu görünüz. $\{1,2\}$



11. $(A-B)\cup(B-C)$ kümesinin $(A\cup B)-(B\cap C)$ kümesine eşit olduğunu görünüz. $\{a,b,c,d,e\}$



12. **a.** $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$\Rightarrow A-(B\cup C)=\{b,c\}$

b. $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$\Rightarrow A-(B\cap C)=\{a,b,c,d\}$

c. Venn şemasından $(A\cap B)\Delta(A\cap C)=(A-B)\Delta(A-C)=\{a,d\}$ olduğunu görünüz.

13. **a.** $(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)=A\cap(A\cup B)$

$=A \qquad [A\subset(A\cup B)]$

b. $(A\cap B')\cup(A\cap E)=(A\cap B')\cup A$

$=A \qquad [(A\cap B')\subset A]$

c. $(A\cup\varnothing)\cup(A'\cap E)=A\cup A'=E$

d. $(A\cup E)\cap(A\cup B)\cap(B\cup\varnothing)$

$=\underbrace{A\cap(A\cup B)}_{A}\cap B=A\cap B$

e. $A\cap(A\cup B)=A$ **f.** $(A\cup B)\cup B=B$

14. Verilen ifadeleri, önce küme işlemlerinden yararlanarak sadeleştirelim :

a. $(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap(B'\cup B)=A\cap E=A$

b. $(A\cup B)\cap(A\cup B')\cap(A'\cup B)$

$=[A\cup(B\cap B')]\cap(A'\cup B)=A\cap(A'\cup B)$

$=(A\cap A')\cup(A\cap B)=A\cap B$

c. $(A\cap B)\cap(B\cup C)=A\cap B \qquad (A\cap B)\subset(B\cup C)$

d. $A-(B-A)=A\cap(B\cap A')'=A\cap(A\cup B')=A$

e. $A-(A-B)=A\cap(A\cap B')'=A\cap(A'\cup B)$

$=(A\cap A')\cup(A\cap B)=(A\cap B)$

f. $(A-B)\cap(A-B')=A\cap B'\cap A\cap B=\varnothing$

g. $(A-B)\cup(A'\cup B)=(A\cap B')\cup A'\cup B$

$=[(A\cup A')\cap(A'\cup B')]\cup B=A'\cup B'\cup B=E$

h. $[A\cup(B-A)]\cap B'=[A\cup(B\cap A')]\cap B'$

$=(A\cup A')\cap(A\cup B)\cap B'=(A\cup B)\cap B'$

$=(A\cap B')\cup(B\cap B')=(A\cap B')\cup\varnothing$

$=A\cap B'=A-B$

i. $(A'\cup B)\cap(A\cup B)\cap A'=\left[(A\cap A')\cup B\right]\cap A'$

$=(\varnothing\cup B)\cap A'=B\cap A'=B-A$

j. $\left[A\cap(A\cup B)'\right]\cup(A\cap B)$

$=(A\cap A'\cap B')\cup(A\cap B)=(A\cap B)$

k. $\left[A'\cap(A\cup B)\right]\cup\left[A\cap(A\cup B)'\right]$

$=(A'\cap A)\cup(A'\cup B)\cup(A\cap A'\cap B')$

$=\varnothing\cup A'\cup B\cup\varnothing=A'\cup B$

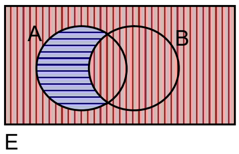
...

Venn şemasından yararlanarak sadeleştirmeyi, yalnız **g**'deki küme üzerinde yapacağız.

Diğerlerini, "**Etkinlik-34**" ten de yararlanarak siz yapınız.

g. $A-B\rightarrow$ 

$A'\cup B\rightarrow$ 



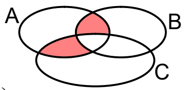
$(A-B)\cup(A'\cup B)=E$

Ayrık kümelerin birleşiminin **Evrensel Küme** olduğu Venn şemasından görülmektedir.

15. Boyalı bölgenin,

$\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\right]-\left[(A\cap B)\cap(A\cap C)\right]$

olduğunu görünüz.

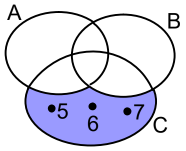


$\{1,2,3,4,5,6\}-\{2,3,4\}=\{1,5,6\}$

16. **a.** $(A\cup C)-(A\cup B)$

kümesinin elemanları, yalnız C kümesinin elemanlarıdır.

O hâlde; en dar C kümesi, $C=\{5,6,7\}$ olabilir.



b. En dar B kümesi, $B=\{1,2\}$;

en geniş B kümesi, $B=\{1,2,3,4\}$ olur.

17. $(A\cup B)\cup(A\cup B')=E$ ve

$(A\cup B)\cap(A\cup B')=A$ olduğunu görünüz.

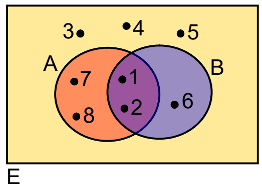
Buna göre;

$E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{1,3,5,7,9\}$

ve $A'=\{2,4,6,8\}$ olur.

18. Venn şemasından yararlanacağız :

$A\cap B$ ve $A'-B$ kümeleri yazılır.



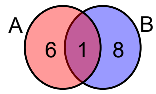
$(A-B)'$ kümesinden yararlanarak $B-A$ kümesi,

B' kümesinden yararlanarak $A-B$ kümesi yazılır.

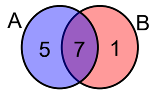
$A\cup B=\{1,2,6,7,8\}$ bulunur.

19.

a. $s(A\cup B)$ en çok 15 olabilir.



b. $s(A\cup B)$ en az 13 olabilir.



c. $s(A\cup B)=s(A-B)+s(B-A)+s(A\cap B)$ ①

ve $s(A\cup B)=s(A)+s(B)-s(A\cap B)$'dir. ②

① ve ②'den

$s(A-B)+s(B-A)+s(A\cap B)$

$=s(A)+s(B)-s(A\cap B)$

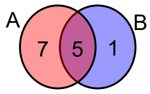
$\Rightarrow 10+s(A\cap B)=16-s(A\cap B)$

$\Rightarrow s(A\cap B)=3$ bulunur.

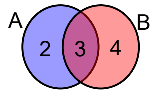
Bu değer ②'de yerine konulursa,

$s(A\cup B)=16-3\Rightarrow s(A\cup B)=13$ olur.

d. $s(A)$ en çok 12 olabilir.



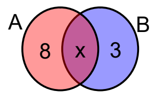
e. $s(A'\cap B)=4$ olur.



f. $s(A)=3s(A\cap B)$

$\Rightarrow\ 8+x=3x\ \Rightarrow\ x=4$

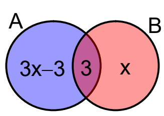
$\Rightarrow\ s(A\cup B)=15$ olur.



g. $s(A\cup B)=16$

$\Rightarrow\ 4x=16\ \Rightarrow\ x=4$

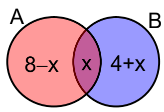
$\Rightarrow\ s(B)=7$ olur.



h. s(B)'nin en az olması için

$s(A\cap B)=1$ seçilmelidir.

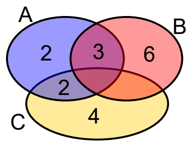
s(B) en az 6 olabilir.



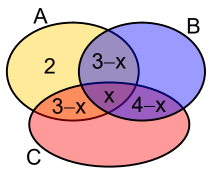
20.

a. Önce, $s(B \cap C)$ konulur.

$s(A \cup B \cup C) = 17$ bulunur.



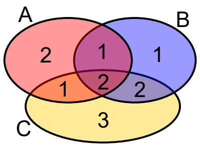
b. $s(A \cap B \cap C) = x$ deyip $A \cap B,\ A \cap C,\ B \cap C$ kümelerinin eleman sayıları dikkate alınarak, bunların alt kümelerinin eleman sayıları x türünden yazılabilir.



$s(A \cap B' \cap C') = 2$ ve $s(A) = 6$ olduğundan,

$2 + 3 - x + 3 - x + x = 6 \Rightarrow x = 2$ bulunur.

Verilen bilgilerle her alt kümenin eleman sayısı bulunur. Buna göre; $s(A \cup B \cup C) = 12$ olur.



21. a. Boyalı bölgeye karşılık gelen küme,

$[C - (A \cup B)] \cup [(A \cap B) - C] = \{3,4,7\}$ olur.

b. Boyalı bölgeye karşılık gelen küme,

$[(A \cup B) - C] - (A \cap B) = \{1,2\}$ olur.

22. a. $C = \{x,y,z\}$ olsun.

$\{2,3\} \cup \{x,y,z\} = \{1,3,5\} \cup \{x,y,z\}$ eşitliğinde x, y, z den biri 1, biri 2, biri 5 olmalıdır.

Buna göre, istenen C kümesi $C = \{1,2,5\}$ olur.

b. $C = \{x,y,z\}$ olsun.

$\{2,3\} \cap \{x,y,z\} = \{1,3,5\} \cap \{x,y,z\}$ eşitliğinde;

I. x, y, z nesneleri 1, 2, 3, 5'ten farklı nesneler olarak seçilebilir.

Örneğin, $C = \{4,6,8\}$ olabilir.

Bu durumda kesişim kümesi $\varnothing$ olur.

II. x, y, z'den biri 3, diğerleri 1, 2 ve 5'ten farklı olarak seçilebilir.

Örneğin, $C = \{3,4,6\}$ olabilir.

Bu durumda kesişim kümesi {3} olur.

c. $C = \{x,y,z\}$ olsun.

$\{2,3\} \cup \{x,y,z\} \subset \{1,3,5\} \cup \{x,y,z\}$ önermesinde x, y, z'den biri 2 olmalıdır. Diğerleri rastgele yazılabilir.

Örneğin; $C = \{2,3,7\}$ olabilir.

d. $C = \{x,y,z\}$ olsun.

$\{2,3\} \cap \{x,y,z\} \subset \{1,3,5\} \cap \{x,y,z\}$ önermesinde;

I. x, y, z nesneleri 1, 2, 3, 5'ten farklı seçilebilir.

Örneğin, $C = \{4,7,9\}$ olabilir. Bu durumda, önerme $\varnothing \subset \varnothing$ biçiminde sağlanmış olur.

II. x, y, z den biri 1 ya da 5 olarak veya ikisi 1 ve 5 olarak seçilebilir.

Örneğin;

$C_1 = \{1,4,8\},\ C_2 = \{5,7,9\},\ C_3 = \{1,5,9\}$ olabilir.

Bu durumda, önerme $\varnothing \subset K$ biçiminde sağlanmış olur.

III. x, y, z'den biri 3, diğerleri 2'den farklı her nesne olarak seçilebilir.

Örneğin, $C = \{3,4,5\}$ olabilir.

Bu durumda, önerme $\{3\} \subset \{3,5\}$ biçiminde sağlanmış olur.

23. $s(A' \cup B') - s(A' \cap B') = s(A \Delta B)$ olduğu görülür. Buna göre;

$s(A \Delta B) = s(A - B) + s(B - A) = 30 - 10 = 20$ 'dir.

$3 \cdot s(A - B) = 4 \cdot s(A \cap B) = 2 \cdot s(B - A)$

eşitliğinde $s(A - B) = 4k$ denirse,

$s(B - A) = 6k$ ve $s(A \cap B) = 3k$ olur.

$4k + 6k = 20 \Rightarrow k = 2$ olup $s(A - B) = 8$ ve

$s(A \cap B) = 6$ bulunur.

Buna göre; $s(A) = 8 + 6 = 14$ 'tür.

24. a. $A \cap B = \{x \mid x < 400 \text{ ve } x = 12k,\ k \in Z^{+}\}$

olur. (Neden?)

$s(A \cap B) = 33$ tür.

$$\begin{array}{r|l} 400 & 12 \\ \hline - & 33 \\ 4 & \end{array}$$

b. $A - B$ kümesi, 4'e bölünen ancak 6'ya bölünemeyen 400'den küçük doğal sayıların kümesidir.

4 ile bölünebilen, 400'den küçük doğal sayıların sayısından, hem 4'e hem 6'ya -12'ye- bölünebilen doğal sayıların sayısını çıkaracağız.

Buna göre;

$s(A - B) = (100 - 1) - 33 = 66$

olur.

$$\begin{array}{r|l} 400 & 4 \\ \hline - & 100 \\ 0 & \end{array}$$

c. $B-A$ kümesi, 6'ya bölünen ancak 4 ile bölünemeyen 400'den küçük doğal sayıların kümesi ile
$400 \le x \le 600$ aralığında olup 6 ile bölünebilen doğal sayıların kümesinin birleşimidir.

$s(B-A)=66-33+(100-66)$

$\Rightarrow s(B-A)=67$ bulunur. (Açıklayınız.)

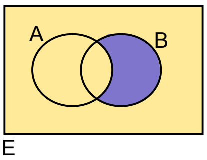
d. $s(A\cup B)=s(A-B)+s(A\cap B)+s(B-A)$

$\Rightarrow s(A\cup B)=66+33+67$

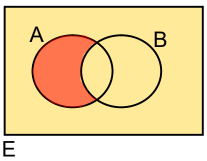
$\Rightarrow s(A\cup B)=166$ olur.

25. $(A'\cup B)\cup(A\cup B')=(A'\cup A)\cup(B\cup B')=E$ olduğundan; $E=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ olur.

a. $A\cup B'=\{1,2,3,5,6,7\}$ olduğuna göre;
$B-A=E-(A\cup B')$
$\Rightarrow B-A=\{4\}$ olur.



b. $A'\cup B=\{3,4,5,6,7\}$ olduğuna göre;
$A-B=E-(A'\cup B)$
$\Rightarrow A-B=\{1,2\}$ olup
$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$
$\Rightarrow A\Delta B=\{1,2,4\}$ bulunur.



26. a. $A\cap(B-A)=A\cap(B\cap A')$
$=A\cap A'\cap B=\varnothing\cap B$
$=\varnothing$

b. $A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A')$
$=(A\cup B)\cap(A\cup A')=(A\cup B)\cap E$
$=A\cup B$

c. $(A-B)\cap(A\cap B)=(A\cap B')\cap(A\cap B)$
$=(A\cap A)\cap(B'\cap B)=A\cap\varnothing$
$=\varnothing$

d. $(A\Delta B)\cap A=[(A\cup B)-(A\cap B)]\cap A$
$=(A\cup B)\cap(A\cap B)'\cap A$
$=A\cap(A\cup B)\cap(A'\cup B')$
$=A\cap(A'\cup B')$
$=(A\cap A')\cup(A\cap B')$
$=A-B$

e. "$(A\subset B)\Rightarrow(A\cup C)\subset(B\cup C)$" ①

önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı,
"$\forall x,(x\in A\Rightarrow x\in B)$
$\Rightarrow[(x\in A\vee x\in C)\Rightarrow(x\in B\vee x\in C)]$" ②
önermesidir.

② önermesinin herhangi bir a değeri için yorumlaması,
"$(a\in A\Rightarrow a\in B)$
$\Rightarrow[(a\in A\vee a\in C)\Rightarrow a\in B\vee a\in C]$" ③ olur.

$p:\ a\in A$, $q:\ a\in B$, $r:\ a\in C$ diyerek
③ önermesini önermeler mantığında
"$(p\Rightarrow q)\Rightarrow[(p\vee r)\Rightarrow(q\vee r)]$" biçiminde sembolleştirebiliriz.

② önermesinin bütün yorumlamaları
$(p\Rightarrow q)\Rightarrow[(p\vee r)\Rightarrow(q\vee r)]$ ④ biçiminde olur.

④ önermesi, yalnız $q\equiv 0$ ve $r\equiv 0$ iken yanlış olabilir. Bu durumda da, önerme
$(p\Rightarrow 0)\Rightarrow(p\Rightarrow 0)\equiv 1$ olur.

Öyleyse, ④ önermesi bir totolojidir.
O hâlde;
$(A\subset B)\Rightarrow(A\cup C)\subset(B\cup C)$ önermesi doğrudur.

f. "$A\subset B\Rightarrow(A\cap C)\subset(B\cap C)$" ① önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının
"$(p\Rightarrow q)\Rightarrow[(p\wedge r)\Rightarrow(q\wedge r)]$" ② olduğunu ve
② önermesinin totoloji olduğunu gösteriniz.
Bu durumda, ① önermesi doğru olur.

g. f'deki gibi yapınız.

h. I. yol

"$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset B'$" ① önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının
"$[(p\wedge q)\Leftrightarrow 0]\Leftrightarrow(p\Rightarrow q')$" ② olduğunu ve
② önermesinin bir totoloji olduğunu gösteriniz.

II. yol

Önce "$A\subset B'$" önermesinin **gerekli koşul** olduğunu gösterelim :

$A\cap B=\varnothing\Rightarrow(A\cap B)\cup B'=\varnothing\cup B'$
$\Rightarrow A\cap B=\varnothing\Rightarrow(A\cup B')\cap(B\cup B')=B'$
$\Rightarrow A\cap B=\varnothing\Rightarrow A\cup B'=B'$
$\Rightarrow A\cap B=\varnothing\Rightarrow A\subset B'$

Şimdi de "$A \subset B'$" önermesinin **yeterli koşul** olduğunu gösterelim :

$A \subset B' \Rightarrow A \cap B \subset B' \cap B$
$\Rightarrow A \subset B' \Rightarrow A \cap B \subset \varnothing$
$\Rightarrow A \subset B' \Rightarrow (A \cap B \subset \varnothing) \wedge (\varnothing \subset A \cap B)$
$\Rightarrow A \subset B' \Rightarrow A \cap B = \varnothing$

O hâlde;

$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B'$ önermesi doğrudur.

i. $A \cup B = C$ ise; "$A \subset (A \cup B)$ ve $B \subset (A \cup B)$" önermesinde $A \cup B$ yerine C konulursa, "$A \subset C$ ve $B \subset C$" elde edilir.

O hâlde;

$(A \cup B = C) \Rightarrow (A \subset C) \wedge (B \subset C)$

önermesi doğrudur.

j. $A \cap B = C$ ise;

"$(A \cap B) \subset A$ ve $(A \cap B) \subset B$" önermesinde $A \cap B$ yerine C konulursa, "$C \subset A$ ve $C \subset B$" elde edilir.

O hâlde;

$(A \cap B = C) \Rightarrow (C \subset A) \wedge (C \subset B)$

önermesi doğrudur.

k. I. yol

"$(C \subset A) \wedge (C \subset B) \Leftrightarrow C \subset (A \cap B)$" ①

önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının

"$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow](q \wedge r)$" ②

olduğunu ve ② önermesinin bir totoloji olduğunu gösteriniz.

II. yol

"$(A \subset B) \Rightarrow (A \cap B = A)$" ve

"$(A \cap B = C) \Rightarrow (C \subset A) \wedge (B \subset A)$"

teoremlerinden yararlanacağız.

Önce "$C \subset (A \cap B)$" önermesinin,

"$(C \subset A) \wedge (C \subset B)$" önermesinin **gerekli koşulu** olduğunu gösterelim :

$C \subset A$ ise $A \cap C = C$ ① ve
$C \subset B$ ise $B \cap C = C$ ② dir.

①'de eşitliğin solundaki C yerine $B \cap C$ konulursa, $A \cap B \cap C = C$ ③ elde edilir.

③ önermesine göre, $C \subset (A \cap B)$'dir.

Böylece,

$(C \subset A) \wedge (C \subset B) \Rightarrow C \subset (A \cap B)$ ④ olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi de ; "$C \subset (A \cap B)$" önermesinin,

"$(C \subset A) \wedge (C \subset B)$" önermesinin **yeterli koşulu** olduğunu gösterelim :

$C \subset (A \cap B) \Rightarrow A \cap B \cap C = C$
$\Rightarrow (C \subset A) \wedge (C \subset B)$ ⑤

④ ve ⑤'ten

$(C \subset A) \wedge (C \subset B) \Leftrightarrow C \subset (A \cap B)$ elde edilir.

l. "$(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B)$" ve

"$(A \cup B = C) \Rightarrow (A \subset C) \wedge (B \subset C)$"

teoremlerinden yararlanarak, **k**'daki gibi ispatlayınız.

m. $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$'dir. ①

"$A \cup (B - A) = A \cup B$" olduğunu **b**'de ispatlamıştık.

①'de $A \cup B$ yerine $A \cup (B - A)$ konulursa,

$A \subset B \Rightarrow A \cup (B - A) = B$ bulunur.

n. I. yol

Önermeler mantığından yararlanınız.

II. yol

"$(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B)$" ve

"$(A \cup B = C) \Rightarrow (A \subset C) \wedge (B \subset C)$"

teoremlerinden yararlanacağız.

$(A \subset C) \Rightarrow (A \cup C = C)$ ① ve

$(B \subset C) \Rightarrow (B \cup C = C)$'dir. ②

①'de eşitliğin solundaki C yerine $B \cup C$ konulursa, $A \cup B \cup C = C$ ③ elde edilir.

③ önermesine göre,

$A \cup B \subset C$'dir.

Böylece;

$(A \subset C) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \cup B) \subset C$

olduğu ispatlanmış olur.

o. I. yol

Önermeler mantığından yararlanınız.

II. yol

$(A \subset C) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \cup B) \subset C$ olduğunu **n**'de ispatladık. $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ olduğundan

$(A \subset C) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \cap B) \subset C$ olur.

p. "$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$" ve
"$(A \cap B = C) \Rightarrow (C \subset A) \wedge (C \subset B)$"
teoremlerinden yararlanacağız.

$$(A \subset B) \wedge (C \subset D)$$
$$\Rightarrow [(A \cap B = A) \wedge (C \cap D = C)]$$
$$\Rightarrow A \cap C = A \cap B \cap C \cap D$$
$$\Rightarrow A \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap D)$$
$$\Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap D)$$

r. **p**'deki gibi ispatlayınız.

Alıştırmalar ve Problemler – 3

1. c. (12, 7, 5) $\rightarrow$ "7 numaralı öğrenci, 5 numaralı dersin ilk sınavından 12 almıştır."
veya "12 numaralı öğrenci, 5 numaralı dersin ilk sınavından 7 almıştır."
veya "12 numaralı öğrenci, 7 numaralı dersin ilk sınavından 5 almıştır."
veya "5 numaralı öğrenci, 7 numaralı dersin ilk sınavından 12 almıştır."

h. (48, 36, 9) $\rightarrow$ "Bu üçlünün verilenlerle bir ilgisi yoktur."
Diğerlerini siz yanıtlayınız.

2. a. $(2x-3,\ x+5) = (x+4,\ x+y+3) = (11,12)$

b. $(3x-4,\ 2y+5) = (x-y,\ y+3) = (5,1)$

c. $(2x-z,\ z+3,\ y+z) = (z-x,\ 2z-3,\ 3y-z)$

$$\Rightarrow \begin{cases} z+3 = 2z-3 \\ 2x-z = z-x \\ y+z = 3y-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 6 \\ x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$$

Belirtilen üçlü (2,9,12) olur.

d. $(x-y,\ y-2,\ 2x-5) = (2x-5z,\ x-y,\ x+1)$
$= (2,2,7)$ İşlemleri siz yapınız.

3. İstenen küme K olsun:
$K = \{(\text{Ali,Bolu}),(\text{Can,İzmir}),(\text{Ali,İzmir}),\ldots\}$
Kümeyi tamamlayınız. Küme kaç elemanlıdır?

4. $A - B = \{1,2,3\} - \{3,4,5\} = \{1,2\}$

5. a. $(A \times B) \cup (B \times C)$
$= \{(1,2),(1,5),(2,2),(2,5),(2,1),(2,3),(5,1),(5,3)\}$

b. $B \times C \times A = \{(5,1,1),(2,3,1),(2,1,2),(2,3,2),(2,1,1),(5,1,2),(5,3,1),(5,3,2)\}$

6. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$, $C = \{3,5\}$ olduğuna göre;

a. $A \times B = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$ olur.
$B \times C$ ve $C \times A$ kümelerini siz yazınız.

b. $B \times (A \cap C) = \{(2,1),(4,1)\}$
$(A \cup B) \times C$ kümesini siz yazınız.

c. $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$ Siz yazınız.

d. $(B \times A) \cap (B \times C) = B \times (A \cap C) = \{(2,1),(4,1)\}$

e. $(C \times A) - (C \times B) = C \times (A - B) = \{3,5\} \times \{1,3\}$
$= \{(3,1),(3,3),(5,1),(5,3)\}$

f. $(B \times A) \Delta (B \times C) = B \times (A \Delta C) = \{2,4\} \times \{1,2,5\}$
$= \{(2,1),(2,2),(2,5),(4,1),(4,2),(4,5)\}$

7. $s(A \times B) = 24$ olduğuna göre,

a. $s(A \cup B)$ en az 6 olabilir. (Neden?)

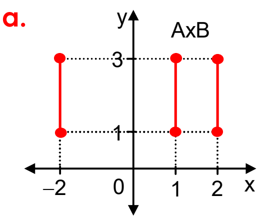
b. $s(A \cup B)$ en çok 25 olabilir. (Neden?)

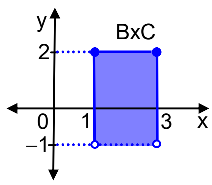
c. $s(A \cap B)$ en çok 4 olabilir. (Neden?)

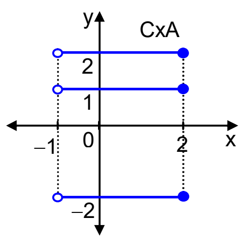
d. $s(A \cap B)$ en az 0 olabilir. (Neden?)

8. $A = \{-2,1,2\}$, $B = \{x \mid 1 \le x \le 3,\ x \in R\}$ ve
$C = \{x \mid -1 < x \le 2,\ x \in R\}$ olduğuna göre;

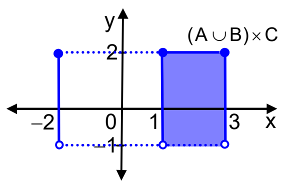
a.



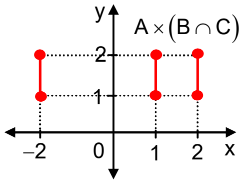




b.

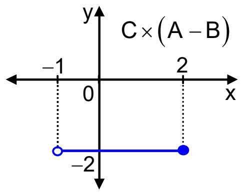


c.



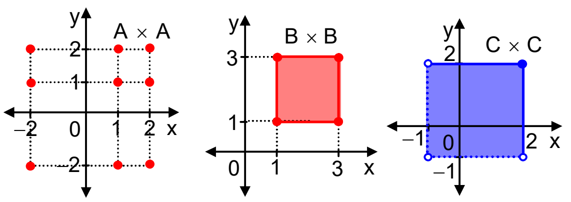
$$(A\times B)\cap(A\times C)$$
$$=A\times(B\cap C)$$

d.

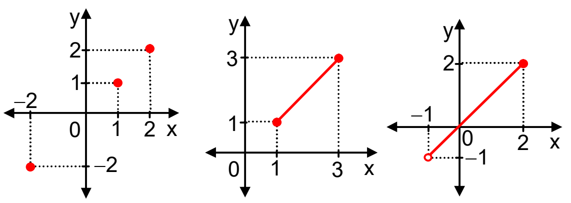


$$(C\times A)-(C\times B)$$
$$=C\times(A-B)$$

e.



f.



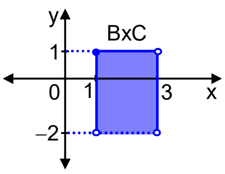
$A\times A$, $B\times B$, $C\times C$ kümelerinin köşegenleri.

9.

$B=[1,3)$ ve

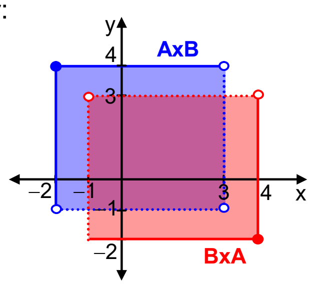
$C=(-2,1]$ olduğu

görülür.



10. $A=[-2,3)$ ve $B=(-1,4]$ olduğu verilmiştir.

$A\times B$ ve $B\times A$ kümelerinin grafikleri aynı koordinat sisteminde çizilirse, çok kolay görülür:



a. 16 birimkare. **b.** 34 birimkare.

Çizimsiz nasıl bulabileceğimizi bulunuz.

11. "$(A\times B)\cap(B\times A)\subset(A\times A)$" ①

önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı,

"$\forall(x,y),\ [(x\in A \text{ ve } y\in B) \text{ ve } (x\in B \text{ ve } y\in A)]$
$\Rightarrow(x\in A \text{ ve } y\in A)$" ②

önermesidir.

② önermesinin $(x,y)=(a,b)$ yorumlaması,

"$[(a\in A \text{ ve } b\in B) \text{ ve } (a\in B \text{ ve } b\in A)]$
$\Rightarrow(a\in A \text{ ve } a\in B)$" ③ olur.

$p:\ a\in A$, $q:\ b\in B$, $r:\ a\in B$, $s:\ a\in B$ denirse,

③ önermesi önermeler mantığında

"$[(p\wedge q)\wedge(r\wedge s)]\Rightarrow(p\wedge s)$"④ biçimine dönüşür.

④ önermesinin bir totoloji olduğu görülür.

O hâlde;

$(A\times B)\cap(B\times A)\subset(A\times A)$ önermesi doğrudur.

12. $(A\times A)\subset(A\times B)\cup(B\times A)$

önermesinin önermeler mantığındaki karşılığı

$(p\wedge q)\Rightarrow[(p\wedge r)\vee(s\wedge q)]$ olur. (Neden?)

Bu önerme bir totoloji değildir. (Neden?)

13. a. $(A=B\cap C)\Rightarrow[(A\times A)=(B\times B)\cap(C\times C)]$

önermesinin önermeler mantığındaki karşılığı

$[p\Leftrightarrow(q\wedge r)]\Rightarrow\{(p\wedge s)\Leftrightarrow[(q\wedge t)\wedge(r\wedge u)]\}$

olur. (Neden?)

Bu önerme bir totolojidir. (Neden?)

b. $(A=B\cup C)\Rightarrow[(A\times A)=(B\times B)\cup(C\times C)]$

önermesinin önermeler mantığındaki karşılığı

$[p\Leftrightarrow(q\vee r)]\Rightarrow\{(p\wedge s)\Leftrightarrow[(q\wedge t)\vee(r\wedge u)]\}$

olur. (Neden?)

Bu önerme bir totoloji değildir. (Neden?)

14. $(A\cup B)\times(A\cup B)$

$$=[(A\cup B)\times A]\cup[(A\cup B)\times B]$$
$$=(A\times A)\cup(B\times A)\cup(A\times B)\cup(B\times B)$$

15. "$[(A\times B)=(A\times C)]\Rightarrow(B=C)$" ①

önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı,

"$\forall(x,y),\ [(x\in A \text{ ve } y\in B)\Leftrightarrow(x\in A \text{ ve } y\in C)]$
$\Rightarrow(y\in B \text{ ve } y\in C)$" ②

önermesidir.

② önermesinin $(x,y)=(a,b)$ yorumlaması,

"$\forall(x,y),\ [(x\in A \text{ ve } y\in B)\Leftrightarrow(x\in A \text{ ve } y\in C)]$

$\Rightarrow(y\in B \text{ ve } y\in C)$" ②

"$[(a\in A \text{ ve } b\in B)\Leftrightarrow(a\in A \text{ ve } b\in C)]$

$\Rightarrow(b\in B \text{ ve } b\in C)$" ③ olur.

$p:\ a\in A$, $q:\ b\in B$, $r:\ b\in C$ denirse,

③ önermesi önermeler mantığında

"$[(p\wedge q)\Leftrightarrow(p\wedge r)]\Rightarrow(q\Leftrightarrow r)$"④

biçimine dönüşür.

$A\neq\varnothing$ olması, $p\equiv 1$ olması demektir. Bu koşul ile ④ önermesinin bir totoloji olduğu görülür.

O hâlde; $A\neq\varnothing$ koşulu ile,

$[(A\times B)=(A\times C)]\Rightarrow(B=C)$

önermesi doğrudur.

16. $(A\times B)'=(A\times B')\cup(A'\times B)\cup(A'\times B')$ olduğunu açıklayınız.

Alıştırmalar ve Problemler – 4

1. Gülü olanların kümesi G, karanfili olanların kümesi K olsun.

$s(K\cup M)=12,\ s(G)=9,\ s(K)=7$ olduğundan

$s(K\cup M)=s(G)+s(K)-s(G\cap K)$

$\Rightarrow 12=9+7-s(G\cap K)$

$\Rightarrow s(G\cap K)=4$ olur.

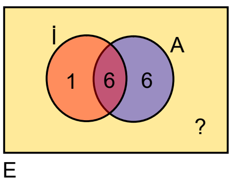
2. A gazetesini alanların kümesi A, B gazetesini alanların kümesi B olsun.

$s(A\cup B)=23,\ s(A)+s(B)=32$ olduğundan

$s(A\cap B)=32-23=9$ olur.

Yalnız bir gazete alanlar, $23-9=14$ kişidir.

3. İngilizce bilenlerin kümesi İ, Almanca bilenlerin kümesi A olursa Venn şeması yandaki gibi olur.



Gruptakilerin sayısı en az 13'tür.

4. $s(\dot{I})=s(M)+7$ ve $s(\dot{I}')=12$'dir.

$s(\dot{I})+s(\dot{I}')=s(M)+s(M')=E$

$\Rightarrow s(M)+7+12=s(M)+s(M')\Rightarrow s(M')=19$ olur.

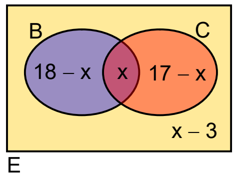
5. $s(R\cup M)=s(R)+s(M)-s(R\cup M)$

$\Rightarrow s(R\cup M)=13+16-8\Rightarrow s(R\cup M)=21$ olur.

Kurslara gitmeyen öğrenci sayısı,

$30-21=9$'dur.

6. Bisikleti olanların kümesi B, bilgisayarı olanların kümesi C olsun.



$s(B\cap C)=x$ denirse,

$s(B\cup C)=18-x+x+17-x=35-x$

ve bunlardan birine sahip olmayanların sayısı,

$s(B\cup C)'=32-(35-x)=x-3$ olur.

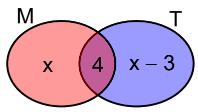
Şemadaki harfli ifadelere dikkat edilirse,

$3\le x\le 17$ olacağı görülür.

a. En az 3'ünün;

b. En çok 17'sinin hem bisikleti hem bilgisayarı olabilir.

7. Verilen bilgiler yandaki Venn şemasına yüklenmiştir.

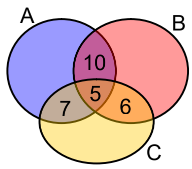


$s(M\cup T)=17$

$\Rightarrow x+4+x-3=17\Rightarrow x=8$ bulunur.

Yalnız matematikten kalan öğrenci sayısı 8'dir.

8. Verilen bilgiler Venn şemasına yüklenmiştir.



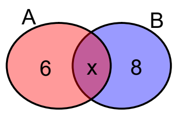
Buna göre; yalnız iki dersten kalan öğrenci sayısı

$10+7+6=23$ olur.

9. $s(A\cup B)=3s(A\cap B)$

$\Rightarrow 6+x+8=3x$

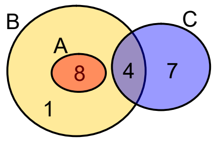
$\Rightarrow x=7$ olur.



Grupta,

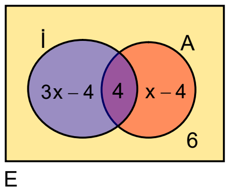
$6+7+8=21$ kişi vardır.

10. Verilenlere göre;
Venn şeması yandaki gibidir.



Grup 20 kişidir.

11. Almanca bilenlerin sayısına x denirse, alt küme sayıları şemadaki gibi olur.



$s(E)=30$

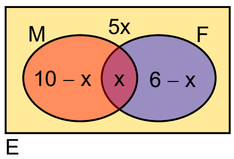
$\Rightarrow 3x-4+4+x-4+6=30 \Rightarrow x=7$ olur.

Yalnız İngilizce bilenler 17 kişidir.

12. $A' \cap B \cap G' \cap E$ veya $(B \cap E)-(A \cup G)$

13. $M' \cap A \cap E$ veya $(A \cap E)-M$

14. İki dersten de kalan öğrenci sayısına x denirse, alt küme sayıları şemadaki gibi olur.

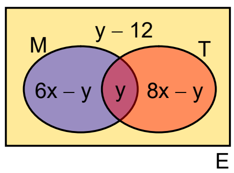


$s(E)=32$

$\Rightarrow 10-x+x+6-x+5x=32 \Rightarrow x=4$ olur.

Yalnız matematikten kalan öğrenci sayısı 6 bulunur.

15. Sınıftaki öğrenci sayısına 10x denirse; Matematikten başarılı olanların sayısı 6x, Türkçeden başarılı olanların sayısı 8x olur.
İki dersten de başarılı olan öğrenci sayısı y olsun.



Diğer alt kümelerin sayıları şemadaki gibidir.

$s(E)=10x$

$\Rightarrow 6x-y+y+8x-y+y-12=10x$

$\Rightarrow x=3$ olur.

Sınıftaki öğrenci sayısı 30 bulunur.

$y-12 \geq 0$ ve $6x-y \geq 0$ olacağı dikkate alınırsa, $12 \leq y \leq 18$ olmalıdır.

İki dersten de başarılı olan öğrencilerin sayısı en az 12; en çok 18 olabilir.

16.

	Gözlüklü	Gözlüksüz
Kız öğ.	$3x-y$	$y+3$
Erkek öğ.	y	$6x-y$

Sınıftaki öğrenci sayısına 10x denirse, kızların sayısı 4x, erkeklerin sayısı 6x, gözlüklü öğrenci sayısı 3x olur.
Gözlüklü erkek öğrenci sayısına y denilerek, verilen bilgiler yukarıdaki gibi bir şemaya yerleştirilebilir.

a. Sınıftaki öğrenci sayısı 10x olduğundan,

$10x=3x-y+y+3+y+6x-y$

$\Rightarrow x=3$ olur.

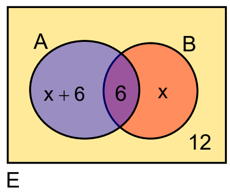
Sınıftaki öğrenci sayısı 30 bulunur.

b. $y \geq 0$ ve $3x-y \geq 0$ olması gerektiğinden

$0 \leq y \leq 9$ olur.

Sınıftaki gözlüklü erkek öğrenci sayısı en çok 9 olabilir.

17. A gazetesini alanların kümesi A, B gazetesini alanların kümesi B, dairelerin kümesi E olsun.



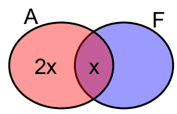
Yalnız B gazetesini alanların sayısına x diyerek, şema görüldüğü gibi düzenlenir.

$s(E)=40$

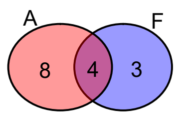
$\Rightarrow x+6+6+x+12=40 \Rightarrow x=8$ olur.

A gazetesini alanların sayısı 20 bulunur.

18. İki dili de bilenlerin sayısına x denirse; Almanca bilenlerin sayısı 3x, yalnız Almanca bilenlerin sayısı 2x olur.



Fransızca bilenlerin sayısı da $\frac{3x+2}{2}$ bulunur.

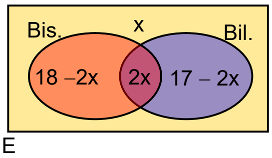


Grup 15 kişidir:

$2x+\frac{3x+2}{2}=15 \Rightarrow x=4$ olur.

Yalnız Fransızca bilenlerin sayısı 3'tür.

19. Verilen bilgiler Venn şemasına yüklenmiştir.



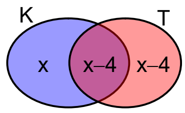
$s(E) = 32$ verilmiştir.

$18 + 17 - 2x + x = 32$

$\Rightarrow x = 3$

$\Rightarrow 2x = 6$ bulunur.

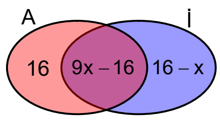
20. Verilen bilgiler Venn şemasına yüklenmiştir.



$x + x - 4 + x - 4 = 28$

$\Rightarrow x = 12$ bulunur.

21. Kesirlerin paydaları eşitlenir.



$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$; $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

Gruptaki kişi sayısı 12x ile gösterilerek, verilen bilgiler şemaya yüklenir.

$16 + 9x - 16 + 16 - x = 12x$

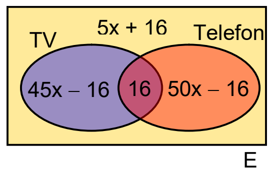
$\Rightarrow x = 4 \Rightarrow 16 - x = 12$ bulunur.

22. Alman erkeklerin sayısı x ile gösterilerek, verilen bilgiler şemaya yüklenir.

	Türk	Alman
Erkek		x
Kız	x + 1	8 - x

Türk kadınların sayısı, Alman erkeklerin sayısından 1 fazladır.

23. Ev sayısı 100x ile gösterilerek, verilen bilgiler şemaya yüklenir.



$50x - 45x = 4$

$\Rightarrow 5x = 4$ bulunur.

bulunur.

a. $100x = 80$ olur. **b.** $5x + 16 = 20$ olur.

24. I. yol

Kalan öğrencilerin sayısı $40 - 2 = 38$ olur.
Verilenler **birleşim kümesinin eleman sayısı** formülünde yerlerine konulursa,

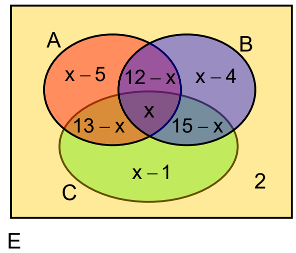
$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow 38 = 20 + 23 + 27 - 12 - 13 - 15 + s(A \cap B \cap C)$$

$\Rightarrow s(A \cap B \cap C) = 8$ bulunur.

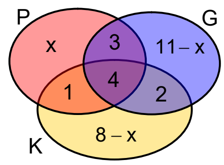
II. yol

Üç dersten de kalan öğrenci sayısına x denilerek, altkümelerin eleman sayıları Venn şemasına yüklenmiştir.



$s(E) = 27 + 7 + x - 4 + 2 = 40 \Rightarrow x = 8$ bulunur.

25. Yalnız piyano çalanların sayısına x denirse, yalnız gitar çalanların sayısı $11 - x$; yalnız keman çalanların sayısı $8 - x$ olur.

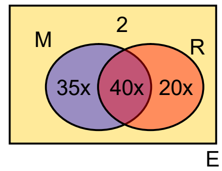


Gitar veya keman çalanların sayısı 19 olduğuna göre;

$8 - x + 1 + 4 + 2 + 3 + 11 - x = 19 \Rightarrow x = 5$ bulunur.

O hâlde, toplulukta 24 kişi vardır.

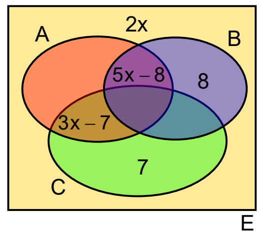
26. Sınıftaki öğrenci sayısı 100x ile gösterilerek, verilen bilgiler şemaya yüklenir.



$35x + 40x + 20x + 2 = 100x$

$\Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow 35x = 14$ bulunur.

27. Sınıftaki öğrenci sayısı 10x ile gösterilirse; B dersinden kalanların sayısı 5x, üç dersten geçenlerin sayısı 2x, C dersinden kalanların sayısı 3x olur. Verilen bilgilerle, alt kümelerin eleman sayıları şemadaki gibi düzenlenir.



B dersinden kalanların sayısı, C dersinden kalanların sayısından 6 fazla olduğuna göre;

$5x - 3x = 6 \Rightarrow x = 3$ olur.

A dersinden kalanların sayısı, 9 bulunur.

28. Kesirlerin paydaları 60'ta eşitlenir.

Yazarların 30/60'ı roman, 40/60'ı öykü, 45/60'ı şiir, 48/60'ı deneme yazmaktadır.

Yazarların sayısı 60 sayılırsa; 30'u roman, 40'ı öykü, 45'i şiir, 48'i deneme yazmaktadır.

a. Yalnız üç dalda yazanların sayısının en az olması için, dördünü de yazanların sayısının en çok seçilmesi gerekir.

30 yazar dört dalda da yazabilir. Geriye 10 öykü, 15 şiir, 18 deneme yazarlığı kalır. Bu yazarlıkları, kalan 30 yazar üstleneceklerdir. Kalanların içinde üç dalda yazan 10 yazar olsaydı; geriye 5 şiir yazarı, 8 deneme yazarı kalacaktı. 30 olması gereken toplam 23 olacaktı. 10 yazarın x tanesi üç dalda yazmasın. Bu x yazar, diğer yazar sayılarını 5+x ve 8+x yapar. Bunlar birli ya da ikili olabilir.

$10-x+5+x+8+x=30$ olmalıdır. $x=7$ olur.

Üç dalda yazanların sayısı en az 3 bulunur.

Bulunanlar üzerinde, verilenlerle birlikte düşünülürse;

30 yazarın dört dalda ($\{r,ö,ş,d\}$),

3 yazarın üç dalda ($\{ö,ş,d\}$),

2 yazarın iki dalda ($\{ö,ş\}$),

25 yazarın birer dalda (10 $\{ş\}$, 15 $\{d\}$)

yazdığı görülecektir.

b. Gruptaki yazar sayısı 60k olmalıdır.

Yazar sayısı 100'den az olduğuna göre; yazar sayısı 60 olur.

60 yazar yan yana dizilir.

60 yazara 30 roman, 40 öykü, 45 şiir ve 48 deneme kitabını birer birer verdiğimizi düşünelim:

30 roman + 30 öykü ilk sırayı,

10 öykü + 45 şiir + 5 deneme ikinci sırayı oluşturur. Kalan 43 deneme, üçüncü yayın olarak dağıtılır.

Buna göre; üç dalda yazan yazar sayısı, en çok 43 olur.

29. $2^4+2^4-2^3$ veya $2^3+2^3+2^3$. Açıklayınız.

30. $2^4+2^4-2^2$ veya $7\cdot 2^2$. Açıklayınız.

31. "2 ve 3 bulunmaz." önermesinin "2 bulunmaz ve 3 bulunmaz." anlamına geleceğine dikkat etmeliyiz.

Bu önerme "(2 ve 3 bulunur) değildir." anlamına gelmez.

Dilimizdeki önermeleri, dilimizin kuralları ile anlamlandırabiliriz.

$p:\ 1\in A$, $q:\ 2\in A$ ve $r:\ 3\in A$ denirse;

istenen kümeler, $(p\wedge q)\vee(q'\wedge r')$ önermesini doğru yapan elemanların kümesi olur.

Buna göre; istenen sayı 2^4+2^4 bulunur.

Açıklayınız.

32. $p:\ 1\in A$, $q:\ 2\in A$ ve $r:\ 3\in A$ denirse;

istenen kümeler, $(p\vee q)\wedge(q'\vee r')$ önermesini doğru yapan elemanların kümesi olur.

Doğruluk tablosundan;

$(p\vee q)\wedge(q'\vee r')\equiv 1$ denkliğini sağlayan durumlar sayılarak, istenen sayı $4\cdot 2^3$ bulunur.

Açıklayınız.

33. $p:\ 1\in A$, $q:\ 2\in A$ ve $r:\ 3\in A$ denirse;

istenen kümeler, $(p\vee q)\veebar(q\vee r)$ önermesini doğru yapan elemanların kümesi olur.

$p\equiv 1$, $q\equiv r\equiv 0$ ve $p\equiv q\equiv 0$, $r\equiv 1$ olduğunda önerme doğru olur.

İstenen sayı $2\cdot 2^3$ bulunur.

Açıklayınız.

34. $p:\ 1\in A$, $q:\ 2\in A$ ve $r:\ 3\in A$ denirse;

istenen kümeler, $(p\wedge q)\veebar(q\wedge r)$ önermesini doğru yapan elemanların kümesi olur.

İstenen sayı $2\cdot 2^3$ bulunur.

Açıklayınız.

35. $p:\ 1\in A$, $q:\ 2\in A$ ve $r:\ 3\in A$ denirse;

istenen kümeler, $(p\vee q)\Rightarrow(q\vee r)$ önermesini doğru yapan elemanların kümesi olur.

İstenen sayı $7\cdot 2^3$ bulunur.

Açıklayınız.

36. $p:\ 1\in A$, $q:\ 2\in A$, $r:\ 3\in A$, $s:\ 4\in A$ denirse; istenen kümeler, $(p\wedge q)\Rightarrow(r\vee s)$ önermesini doğru yapan elemanların kümesi olur.

İstenen sayı $15\cdot 2^2$ bulunur.

Açıklayınız.