Örnek Problem – 1

$f:(0,2)\to(0,4);\ f(x)=x^2$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre; $\int_0^2 x^2dx$ değeri kaçtır?

Çözüm – 1

Bir f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise, bu aralıkta "integrallenebilir"dir.

$\int f(x)dx = F(x)+C$ ise,

$\int_a^b f(x)dx$ integral değeri,

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ olarak vardır.

$[a,b]$ aralığında, f fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar olduğunda $\int_a^b f(x)dx$ integrali, "Uygunsuz integral" anlamına gelen, "İmproper integral" diye adlandırılır. Daha bilimsel bir Türkçe ile; bu tür integrallere "Genelleştirilmiş integraller" denir.

(a,b) aralığında tanımlı f fonksiyonu, a ve b apsisli noktalarında süreksiz olur.

Bu durumda; $\int_a^b f(x)dx$ integrali, genelleştirilmiş integral olarak ele alınır.

Bu durumda; $\varepsilon>0$ olmak üzere,

$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ limiti varsa,

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ olur.

Buna göre;

$$\int_0^2 x^2dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^{2-\varepsilon} x^2dx = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_{0+\varepsilon}^{2-\varepsilon}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{(2-\varepsilon)^3}{3}-\frac{\varepsilon^3}{3}\right)=\frac{8}{3} \text{ bulunur.}$$

Çözüm – 2

$f:(0,2)\to(0,4);\ f(x)=x^2$

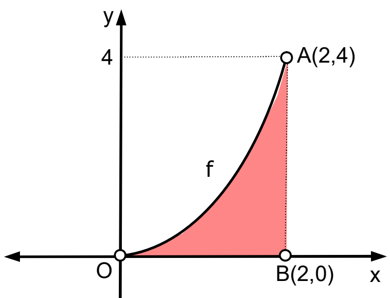
fonksiyonunun tanım kümesi, fonksiyonun kuralının gerektirdiği bir tanım kümesi değildir. Fonksiyonun kuralı her tanım kümesine açıktır.

Bu durumda; f fonksiyonu ile,

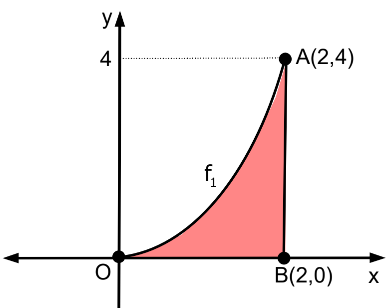
$f_1:[0,2]\to[0,4];\ f_1(x)=x^2$

fonksiyonuna karşılık gelen $\int_0^2 x^2dx$

Riemann integrallerini karşılaştıralım:



Şekil – 1



Şekil – 2

$f(x) > 0$ ve $f_1(x) \geq 0$ olduğundan,

$\int_0^2 x^2dx$ integrali, $(0,2)$ aralığında f ile x ekseni arasındaki; $[0,2]$ aralığında f_1 ile x ekseni arasındaki alana karşılık gelir.

Şekil-1 ve Şekil-2'de gösterilen bölgelerin alanları arasındaki tek fark, $O(0,0)$ noktası ile $[AB]$ doğru parçasının alanıdır. Bu alanlar "0" olduğuna göre, boyalı alanlar birbirine eşittir.
Aralık uçlarının açık ya da kapalı olması $\int_0^2 x^2dx$ integralinin değerini etkilemez:

$$\int_0^2 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$ bulunur.

Örnek Problem – 2

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ değeri kaçtır?

Çözüm

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu, $x > 0$ kümesinde süreklidir. Bu durumda; $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integrali genelleştirilmiş integral olarak ele alınır:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^1\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$$ bulunur.

Örnek Problem – 3

Gerçel sayılarda,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \text{ ise} \\ -1 & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

$\int_{-3}^2 f(x)dx$ değeri kaçtır?

Çözüm

$$\int_{-3}^2 f(x)dx = \int_{-3}^1 (1)dx + \int_1^2 (-1)dx$$

$$= (x)\Big]_{-3}^1 + (-x)\Big]_1^2$$

$$= 1 - (-3) + (-2) - (-1)$$

$= 3$ bulunur.

Örnek Problem – 4

Gerçel sayılarda,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \text{ ise} \\ -1 & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

$F(x) = \int f(x)dx$ varsa, bulunuz.

Çözüm

$F(x) = \int f(x)dx$ fonksiyonu var olsun.

$F'(x) = f(x)$ olur.

$F'(1^-) = 1$ ve $F'(1^+) = -1$ olup $F'(1)$ yoktur. Hâlbuki; $F'(1) = f(1) = -1$ verilmiştir. O halde; türevi f olan bir F fonksiyonu yoktur.

Dikkat ediniz:

f fonksiyonunun Riemann anlamında integrali alınabilirken, belirsiz integrali alınamamaktadır.

Örnek Problem – 5

Gerçel sayılarda,

$x^2 < f(x) < 4x - x^2$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının en geniş tanım aralığının sınırları, $a < b$ olmak üzere, a ve b gerçel sayılarıdır.

Buna göre,

$$\int_a^b f(x)dx$$

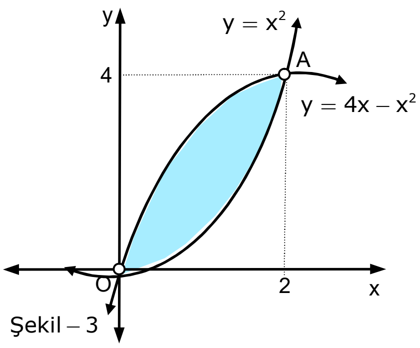
integralinin alabileceği değerlerin kümesini bulunuz.

Çözüm

$$x^2 < f(x) < 4x - x^2 \Rightarrow x^2 < 4x - x^2$$
$$\Rightarrow 0 < x < 2$$

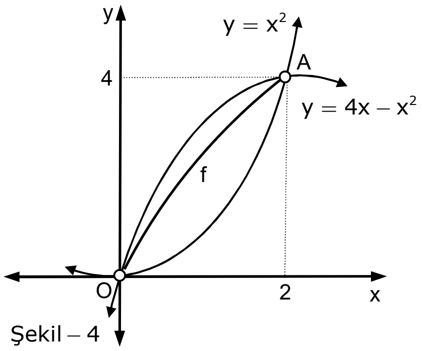
Eşitsizlik sisteminin en geniş çözüm kümesi, $(0,2)$ aralığıdır. Buna göre; f fonksiyonlarının en geniş tanım kümesi de $(a,b) = (0,2)$ aralığı olabilir.

$x^2 < f(x) < 4x - x^2$ koşulunu sağlayan f fonksiyonlarına karşılık gelen grafikler, Şekil-3'te gösterilen mavi boyalı bölgede bulunurlar.



Şekil – 3

$y = x^2$, $y = f(x)$ ve $y = 4x - x^2$ fonksiyonlarının birlikte grafikleri Şekil-4'teki gibidir.



Şekil – 4

Grafikten de görüleceği gibi;

$x^2 < f(x) < 4x - x^2$ eşitsizlik sistemi,

$$\int_0^2 x^2dx < \int_0^2 f(x)dx < \int_0^2 (4x - x^2)dx$$

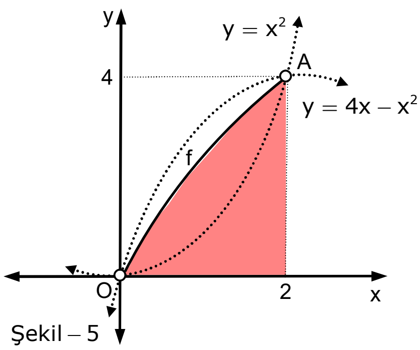
eşitsizlik sistemini gerektirir.

$$\int_0^2 x^2dx < \int_0^2 f(x)dx < \int_0^2 (4x - x^2)dx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^2 < \int_0^2 f(x)dx < \left.\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3} < \int_0^2 f(x)dx < \frac{16}{3} \quad \text{bulunur.}$$

$\int_0^2 f(x)dx$ integraline karşılık gelen alan, Şekil-5'te gösterilmiştir.



Şekil – 5

Örnek Problem – 6

Gerçel sayılarda,

$x^2 < f(x) < 4x - x^2$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının en geniş tanım aralığının sınırları, $a < b$ olmak üzere, a ve b gerçel sayılarıdır.

Buna göre,

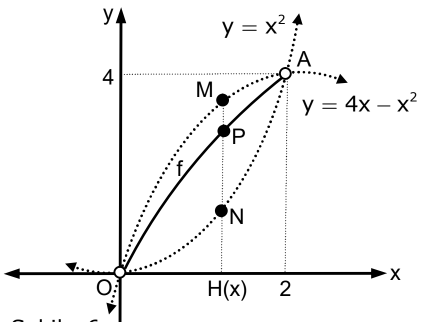
$$\int_a^b f(x)dx$$

integralinin alabileceği değerleri veren f fonksiyonları bulunuz.

Çözüm

$$x^2 < f(x) < 4x - x^2 \Rightarrow x^2 < 4x - x^2$$
$$\Rightarrow 0 < x < 2$$

Eşitsizlik sisteminin en geniş çözüm kümesi, $(0,2)$ aralığıdır. Buna göre; f fonksiyonlarının en geniş tanım kümesi de $(a,b) = (0,2)$ aralığı olabilir.



Şekil – 6

Şekil-6'da $|NH| = x^2$, $|MH| = 4x - x^2$ ve $|MN| = 4x - 2x^2$ olduğu görülür.

n bir gerçel sayı ve $n > 1$ olmak üzere,

$$|PN| = \frac{4x - 2x^2}{n} \quad \text{ve}$$

$$|PH| = x^2 + \frac{4x - 2x^2}{n} \quad \text{olarak alınabilir.}$$

Bu durumda;

$$f(x) = x^2 + \frac{4x - 2x^2}{n}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4}{n}x + \frac{n-2}{n}x^2 \quad \text{olur.}$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \left(\frac{4}{n}x + \frac{n-2}{n}x^2\right)dx$$
$$= \left(\frac{2}{n}x^2 + \frac{n-2}{3n}x^3\right)\Bigg|_0^2$$
$$= \frac{8n+8}{3n} \quad \text{bulunur.}$$

$n > 1$ için, $\frac{8}{3} < \frac{8n+8}{3n} < \frac{16}{3}$ olur.

$f(x) = \frac{4}{n}x + \frac{n-2}{n}x^2$ fonksiyonlarında n parametresine, $n > 1$ değerleri verilerek, $\int_0^2 f(x)dx$ integralinin $\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}\right)$ aralığındaki her değeri elde edilebilir.

Örnek Problem – 7 (Endemik Y.)

Gerçel sayılarda,

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x \le 2 \text{ ise} \\ -x + 7 & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

$$\int_{-3}^{7} [f'(x) + f''(x) + 1]dx \quad \text{değeri kaçtır?}$$

Çözüm

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \text{ ise} \\ -1 & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \text{ ise} \\ 0 & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{7}\left[f'(x)+f''(x)+1\right]dx$$
$$=\int_{-3}^{7}f'(x)\,dx+\int_{-3}^{7}f''(x)\,dx+\int_{-3}^{7}(1)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{2}(0)\,dx+\int_{2}^{7}(-1)\,dx+\int_{-3}^{7}(0)\,dx+\int_{-3}^{7}(1)\,dx$$
$$=0+(-5)+0+10$$
$$=5$$

Örnek Problem – 8

$$f:R-\{2\}\to R,\ f(x)=\begin{cases}1 & x<2 \text{ ise}\\ 2x & x>2 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

R'de tanımlı,

$$F(x)=\int f(x)dx$$

fonksiyonlar ailelerinden en genişinin kuralını bulunuz.

Çözüm

$(-\infty,2)$ ve $(2,\infty)$ aralıklarında ters türevler alınır.

F fonksiyonlarının $x=2$ için de tanımlı olması istendiğinden, $F(2)$ değeri de tanımlanır:

$$F(x)=\begin{cases}x+C_1 & x<2 \text{ ise}\\ C_2 & x=2 \text{ ise}\\ x^2+C_3 & x>2 \text{ ise}\end{cases}$$

C_1, C_2, C_3 sabitlerinin, tanımlanacak her değeri için F fonksiyonları ailesinin değişik bir ögesi elde edilir. F ailesinin her ögesinin türevi,

$$f:R-\{2\}\to R,\ f(x)=\begin{cases}1 & x<2 \text{ ise}\\ 2x & x>2 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu olarak seçilebilir.

$x=2$ için,

$2+C_1=C_2=4+C_3$ alınırsa,

$C_1=C,\ C_2=2+C,\ C_3=-2+C$ olur.

$$F_1(x)=\begin{cases}x+C & x<2 \text{ ise}\\ 2+C & x=2 \text{ ise}\\ x^2-2+C & x>2 \text{ ise}\end{cases}$$

F_1 ailesinin f türevleri R 'de tanımlıdır.

$F-F_1$ ailesinin f türevleri ise yalnız

$R-\{2\}$ kümesinde tanımlı olurlar.