Problem -1

$n \in N^+$ olmak üzere,

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\sqrt[n]{1+n} = 1 + f(n)$ olsun.

$f(n) \geq 0$ olacağı açıktır.

$\sqrt[n]{1+n} = 1 + f(n) \Rightarrow 1 + n = \left[1 + f(n)\right]^n$

sağ tarafı Binom Teoremine göre açalım:

$$1 + n = 1 + n \cdot f(n) + \frac{n(n+1)}{2!} \cdot \left[f(n)\right]^2 + ...$$

$$\Rightarrow 1 + n \geq 1 + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \left[f(n)\right]^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left[f(n)\right]^2 \leq \frac{2n}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(0) \leq \lim_{n\to\infty}\left[f(n)\right]^2 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty}\left[f(n)\right]^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[f(n)\right]^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n} = 1 \quad \text{bulunur.}$$

Bu sonucu problemimizin çözümünde kullanalım:

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{1+n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

elde edilir.

Problem -2

$x \in R^+$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

1. yol

$n \in N^+$ olmak üzere,

$n \leq x \leq n+1$ olsun.

Her n değeri için,

$\sqrt[n]{n} > 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ olması,

en azından n'nin büyük değerleri için,

$(n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq x^{\frac{1}{x}} \leq n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$

sıralamasını yapmamıza olanak verir.

$$(n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq x^{\frac{1}{x}} \leq n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \leq \lim_{n\to\infty} n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{elde edilir.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$y = x^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$$

Buradaki, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği türevle giderilir:

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = e^0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -3

$x \in R^+$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$x = \dfrac{1}{t}$ dönüşümü yapalım.

x, 0'a sağdan yaklaşırken
t, $+\infty$'a ıraksayacaktır.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\left(\frac{1}{t}\right)}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} t^{\left(\frac{1}{t}\right)}}$$

Problem-2'nin sonucunu kullanarak;

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^x = \frac{1}{1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} x^x = 1$$

elde edilir.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$y = x^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = x\cdot\ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Buradaki, $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği türevle giderilir:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = e^0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} x^x = 1 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -4

$x \in R^+$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

Burada bir belirsizlik yoktur.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = (+\infty)\cdot(-\infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = -\infty$$

olur.

Problem -5

$x \in R^+$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+x\cdot\ln x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1+\ln\left(x^x\right)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right) = \lim_{x\to 0^+}\left[1+\ln\left(x^x\right)\right]\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right) = 1\cdot+\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right) = +\infty \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+x\cdot\ln x}{x}\right)$$

Burada, L'Hospital kuralını doğrudan uygulayamayız. Çünkü; belirsizlik, $\frac{0}{0}$ ya da $\frac{\infty}{\infty}$ biçiminde değildir. Kesrin payında $0\cdot\infty$ belirsizliği vardır. Dolayısıyla; uzatmadan, çözümü "1. yol" daki gibi tamamlamak daha uygun olur.

Problem -6

$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\ln\left(x^2-1\right)$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$x-1=t$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\ln\left(x^2-1\right)\\
&=\lim_{t\to 0^+}t\cdot\ln\left(t^2+2t\right)\\
&=\lim_{x\to 0^+}\ln\left[t^t\cdot(t+2)^t\right]\\
&=\lim_{x\to 0^+}\ln t^t+\lim_{x\to 0^+}\ln(t+2)^t\\
&=\ln\left(\lim_{x\to 0^+}t^t\right)+\ln\left(\lim_{x\to 0^+}(t+2)^t\right)\\
&=0\quad \text{bulunur.}\end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\ln\left(x^2-1\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln\left(x^2-1\right)}{\frac{1}{x-1}}=L$$

Burada, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$L=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{2x}{x^2-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-2x\cdot(x-1)}{x+1}=0$$

Problem -7

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ diyelim:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2x^2};$$

$2\sin^2\frac{x}{2}=t$ dönüşümü yaparsak,

$x=2\cdot\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{t}{2}}$ olur.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2x^2}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-t)}{8\cdot\left(\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{t}{2}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow L=L=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\frac{1}{t}\cdot\ln(1-t)}{8\cdot\left(\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{t}{2}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{t}{8\cdot\left(\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{t}{2}}\right)^2}\cdot\lim_{t\to 0}\ln\left[(1-t)^{\frac{1}{t}}\right]$$

Soldaki limit için $u=\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{t}{2}}$ dönüşümü yaparsak, $t=2\sin^2 u$ olur.

$$\Rightarrow L=\lim_{u\to 0}\frac{2\sin^2 u}{8\cdot u^2}\cdot\ln\lim_{t\to 0}\left[(1-t)^{\frac{1}{t}}\right]$$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{4}\cdot\ln\left(e^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow L=-\frac{1}{4}\qquad\text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{4x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-1}{4\cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}=-\frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

Problem -8

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\cos x} \text{ değerini bulunuz.}$$

Çözüm

1. yol

$x-\frac{\pi}{2}=t$ diyelim.

$$y=t^{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)} \Rightarrow \ln y=\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cdot\ln t$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\ln y=\lim_{t\to 0^+}\left(-\sin t\cdot\ln t\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\ln y=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{-\sin t}{t}\cdot t\cdot\ln t\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\ln y=\lim_{t\to 0^+}\frac{-\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0^+}\ln t^t$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\ln y=-1\cdot 0=0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+} y=e^0=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\cos x}=1 \text{ bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$x-\frac{\pi}{2}=t$ diyelim.

$$y=t^{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}$$

$$\Rightarrow \ln y=\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cdot\ln t$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\ln y=\lim_{t\to 0^+}\left(-\sin t\cdot\ln t\right)$$

Burada, $0\cdot\infty$ belirsizliği vardır.

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürelim:

$$\lim_{t\to 0^+}\ln y=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{-\ln t}{\frac{1}{\sin t}}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\ln y=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{-\frac{1}{t}}{\frac{-\cos t}{\sin^2 t}}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\ln y=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{\cos t}=1\cdot 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+} y=e^0=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\cos x}=1 \text{ bulunur.}$$

Problem -9

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$e^{x}=t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-\frac{1}{t}}{\ln t}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\cdot(t+1)}{t\cdot\ln t}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t+1)}{t}\cdot\lim_{t\to 1}\frac{1}{\frac{1}{t-1}\cdot\ln t}$$
$$=2\cdot\lim_{t\to 1}\frac{1}{\ln(1+t-1)^{\frac{1}{t-1}}}$$
$$=2 \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{1}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}=2 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -10

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}$$

$e^{x}=t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-\frac{1}{t}}{\ln t}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\cdot(t+1)}{t\cdot\ln t}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t+1)}{t}\cdot\lim_{t\to 1}\frac{1}{\frac{1}{t-1}\cdot\ln t}$$
$$=2\cdot\lim_{t\to 1}\frac{1}{\ln(1+t-1)^{\frac{1}{t-1}}}$$
$$=2 \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=2 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -11

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\ln\left(x^2-1\right)}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

Bir belirsizlik yoktur. $\left(\frac{0^+}{-\infty}\right)$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\ln\left(x^2-1\right)}=0$$

Problem -12

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\ln\left(x^2-1\right)}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\ln\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\ln(x-1)+\ln(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1+\frac{\ln(x+1)}{\ln(x-1)}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{\ln 2}{-\infty}}$$

$$=1$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\ln\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{2x}{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{2x}$$

$$=1$$

Problem -13

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\ln x}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$1-\sqrt{x}=t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\ln x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1-t)^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2\cdot\ln(1-t)^{\frac{1}{t}}}$$

$$=-\frac{1}{2}$$ bulunur.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}$$

$$=-\frac{1}{2}$$ bulunur.

Problem -14

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-1}{\tan x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$e^{\tan x}-1=t$ dönüşümü yapalım.

$\tan x=\ln(1+t)$ olur.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-1}{\tan x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$=1 \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-1}{\tan x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{\tan x}\cdot\left(1+\tan^2 x\right)}{\left(1+\tan^2 x\right)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(e^{\tan x}\right)$$
$$=1 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -15

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\tan x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}\cdot\frac{x}{\tan x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}}_{1}$$

$e^{2x}-1=t$ dönüşümü yapalım.

$x=\dfrac{1}{2}\cdot\ln(1+t)$ olur.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{2}\cdot\ln(1+t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{2}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$=2 \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot e^{2x}}{1+\tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=2 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -16

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{3x}}{\tan x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{4x}-e^{3x}}{x}\cdot\frac{x}{\tan x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{x}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}}_{1}$$

$e^x=t$ dönüşümü yaparsak $x=\ln t$ olur.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{\tan x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{x}\\&=\lim_{t\to 1}\frac{t^4-t^3}{\ln t}\\&=\lim_{t\to 1}\frac{t^3}{\ln t^{\left(\frac{1}{t-1}\right)}}\\&=\lim_{t\to 1}\frac{t^3}{\ln(1+t-1)^{\left(\frac{1}{t-1}\right)}}\\&=\frac{1}{\ln e}\\&=1 \quad \text{bulunur.}\end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot e^{4x}-3\cdot e^{3x}}{1+\tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{\tan x}=1 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -17

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\cos\pi x}{1-x^2}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+\cos\pi x}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1+1+\cos\pi x}{1-x^2}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x+\cos\pi x}{1-x^2}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}+\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{1-x^2}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+x}+\lim_{x\to 1}\frac{2\cos^2\frac{\pi}{2}x}{1-x^2}\\&=\frac{-1}{2}+\lim_{x\to 1}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x^2}\\&=\frac{-1}{2}+\lim_{x\to 1}\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}\cdot(1-x)\cdot(1+x)}\\&=\frac{-1}{2}+2\cdot 1\cdot\frac{0\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\\&=\frac{-1}{2} \quad \text{bulunur.}\end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+\cos\pi x}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\pi\cdot\sin\pi x}{-2x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x+\cos\pi x}{1-x^2}=\frac{-1}{2} \quad \text{bulunur.}$$

Problem -18

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{4x - \pi}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cdot \cos\frac{\pi}{4}}{4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$ bulunur.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$ bulunur.

Problem -19

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{6x^2}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ eşitliğini kullanalım:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{6x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{6x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{6x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}{6x^2\cdot\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{6x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{6x^2}\cdot 1\cdot 4\cdot 1\cdot \frac{x^4}{16}$$

$$= 0$$ bulunur.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{6x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(1 - \cos x)\cdot \sin x}{12\cdot x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{12}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 0$$ bulunur.

Problem -20

$\lim\limits_{x\to y}\dfrac{\cos x-\cos y}{x-y}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to y}\frac{\cos x-\cos y}{x-y}$$
$$=\lim_{x\to y}\frac{-2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$
$$=-\sin y \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

x'e göre türev alınır:

$$\lim_{x\to y}\frac{\cos x-\cos y}{x-y}=\lim_{x\to y}\frac{-\sin y}{1}$$
$$=-\sin y \quad \text{bulunur.}$$

Problem -21

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}+2x}{x+\sin x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2x}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{x}+2}{1+\frac{\sin x}{x}}$$
$$=\frac{\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}}^{L_1}+\overbrace{\lim_{x\to 0}(2)}^{2}}{\underbrace{\lim_{x\to 0}(1)}_{1}+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{1}}$$

L_1 için, $e^x=t$ dönüşümü yapalım:

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-\frac{1}{t}}{\ln t}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\cdot(t+1)}{t\cdot\ln t}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t+1)}{t}\cdot\lim_{t\to 1}\frac{1}{\frac{1}{t-1}\cdot\ln t}$$
$$=2\cdot\lim_{t\to 1}\frac{1}{\ln(1+t-1)^{\frac{1}{t-1}}}$$
$$=2 \quad \text{olur.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2x}{x+\sin x}=\frac{2+2}{1+1}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2x}{x+\sin x}=2 \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2x}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+2}{1+\cos x}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2x}{x+\sin x}=2 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -22

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}\cdot\sqrt{1+\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1+\cos x}}{-\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} (-\sqrt{1+\cos x})$$

$$= -\sqrt{2}$$

Problem -23

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin x}}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin x}} = \lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x \cdot \sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x \cdot \sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x \cdot \sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x \cdot \sqrt{1+\sin x}}{|\cos x|}$$

$$= \lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{2\cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \sqrt{1+\sin x}}{-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} (-2\cdot \sin x \cdot \sqrt{1+\sin x})$$

$$= -2\sqrt{2}$$

Problem -24

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\cdot 2\sin x\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left\{1-\left[1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\right\}\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\cdot 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\cdot 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)}{4\cdot x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)}{\left(\frac{x}{2}\right)\cdot 4\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos x}$$

$$=\frac{3}{4}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\cdot\sin x}{\sin 2x+x\cdot 2\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x}{2\cos x+\frac{x}{\sin x}\cdot 2\cos 2x}$$

$$=\frac{3}{4}$$ bulunur.

Problem -25

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+a}-\cos\sqrt{x}\right)$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+a}-\cos\sqrt{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(-2\sin\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[-2\sin\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[-2\sin\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{a}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[-2\sin\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\right]\cdot\lim_{x\to\infty}\sin\frac{a}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}$$

$$=\ell\cdot 0$$

$$=0$$

Problem -26

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos x-\sin x}{x^3\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2\cdot\cos x}$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\frac{x}{2}\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\cos x}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

bulunur.

Problem -27

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos\left(x^2\right)}}{1-\cos x}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos\left(x^2\right)}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2\cdot\sin^2\left(\frac{x^2}{2}\right)}}{2\cdot\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\cdot\left|\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right|}{2\cdot\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{2}$$

bulunur.

Problem -28

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$e^x=t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}=\lim_{t\to 1}\frac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(\ln t)^3}=L$$

Bir de $\sqrt{t}=u$ dönüşümü yapalım:

$$L=\lim_{t\to 1}\frac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(\ln t)^3}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{u\to 1}\frac{u^2-\frac{1}{u^2}-4\ln u}{8\cdot(\ln u)^3}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{u\to 1}\frac{u^2-\frac{1}{u^2}-2u+\frac{2}{u}+2u-\frac{2}{u}-4\ln u}{8\cdot(\ln u)^3}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{u\to 1}\frac{\left(u-\frac{1}{u}\right)\left(u+\frac{1}{u}-2\right)}{8\cdot(\ln u)^3}+\frac{1}{4}\cdot\lim_{u\to 1}\frac{u-\frac{1}{u}-2\ln u}{(\ln u)^3}$$

$$\Rightarrow L=\frac{(u+1)\cdot(u-1)^3}{8\cdot u^2\cdot(\ln u)^3}+\frac{1}{4}\cdot L$$

$$\Rightarrow L=\frac{u+1}{8\cdot u^2\cdot\left[\ln\left(1+u-1\right)^{\frac{1}{u-1}}\right]^3}+\frac{1}{4}\cdot L$$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot L$$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{3}$$ bulunur.

2. yol

(L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{6}$$

$$=\frac{1}{3}$$ bulunur.

Problem -29

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$\sin x = 3\sin\dfrac{x}{3} - 4\sin^3\dfrac{x}{3}$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-3\sin\frac{x}{3}+4\sin^3\frac{x}{3}}{x^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-3\sin\frac{x}{3}}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{4\sin^3\frac{x}{3}}{x^3}$$

Eşitliğin soluna L deyip sağındaki ilk terimde de $x = 3t$ dönüşümü yapalım:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{x-3\sin\frac{x}{3}}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{4\sin^3\frac{x}{3}}{x^3}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t\to 0}\frac{3t-3\sin t}{27\cdot t^3} + \lim_{x\to 0}\frac{4\sin^3\frac{x}{3}}{27\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^3}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{9}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3} + \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{9}\cdot L + \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{6} \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \quad \text{bulunur.}$$

Problem -30

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x-\sin x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x-\sin x} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}}_{L_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}}_{L_2}$$

Problem-28'de $L_1 = \dfrac{1}{3}$ ve Problem-29'da $L_2 = 6$ olduğunu bulmuştuk.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x-\sin x} = L_1\cdot L_2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x-\sin x} = 2 \quad \text{olur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2 \quad \text{olur.}$$

Problem -31

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x-x^2}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x-x^2}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right)^2-x^2}{x^4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\sin^2 x-x^2}$$

Eşitliğin sağındaki ilk terimde $x=2t$ dönüşümü yapıp işlemin dağılma özelliğini uygulayalım:

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{\left(e^{t}-e^{-t}\right)^2-4t^2}{16\cdot t^4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\sin^2 x-x^2}$$

$$\Rightarrow L=\overbrace{\lim_{t\to 0}\frac{e^t-e^{-t}-2t}{t^3}}^{L_1}\cdot\overbrace{\lim_{t\to 0}\frac{e^t-e^{-t}+2t}{16\cdot t}}^{L_2}\cdot\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x-x}}^{L_3}\cdot\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x+x}}^{L_4}$$

Problem-28'den $L_1=\dfrac{1}{3}$,

Problem-21'den $L_2=\dfrac{1}{4}$,

Problem-29'dan $L_3=-6$ olduğu görülür.

$L_4=\dfrac{1}{2}$ olup $L=-\dfrac{1}{4}$ elde edilir.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{2\sin x\cdot\cos x-2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2\cos 2x-2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{-4\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{-8\cos 2x}$$

$=-\dfrac{1}{4}$ bulunur.

Problem -32

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-\cos x}{x^4}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$x=2t$ dönüşümü yapalım:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-\cos x}{x^4}=\lim_{t\to 0}\frac{1-2t^2-\cos 2t}{16t^4}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-\sin^2 t}{8t^4}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{(t-\sin t)\cdot(t+\sin t)}{8t^4}$$

Burada; paydayı $t^2\cdot t^2$ diye ayırmak işe yaramaz. $t^3\cdot t$ diye ayıralım.

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{(\sin t-t)\cdot(\sin t+t)}{8t^4}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t+t}{8t}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}\cdot\left[\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{8t}+\lim_{t\to 0}\frac{t}{8t}\right]$$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}$$ bulunur.

Problem-29'dan $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}=-\frac{1}{6}$ olduğu görülür.

$$L=-\frac{1}{24}$$ olur.

2. yol

(L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-x+\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1+\cos x}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{24x}$$

$$=-\frac{1}{24}$$ bulunur.

Problem -33

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

(L'Hospital Kuralı ile)

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}-1\right)$$

$$=-1+\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}\right)$$

Burada L'Hospital Kuralını hemen uygulamak işlemleri uzatır.

Parantez içini parçalayalım:

$$L=-1+\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x+\sin x}{\sin x}\right)$$

$$=-1+\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\sin x}{\sin x}\right)$$

$$=-1+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{3x^2}\right)\cdot 1\cdot 2$$

$$=-1+2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{6\cdot x}\right)$$

$$=-\frac{2}{3}$$ bulunur.

2. yol

$$L=\lim_{x\to0}\left(\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}-1\right)$$

$$=-1+\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}\right)$$

Parantez içini 1. yoldaki gibi parçalayalım:

$$L=-1+\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x+\sin x}{\sin x}\right);$$

$$L=-1+\underbrace{\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\right)}_{L_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to0}\left(\frac{x+\sin x}{\sin x}\right)}_{2}$$

Problem-29'dan $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$ olduğu görülür.

$$L=-\frac{2}{3}\quad\text{olur.}$$

Problem -34

$$\lim_{x\to1}\frac{x+\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$L=\lim_{x\to1}\frac{x+\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x+\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to1}\frac{x-1+1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\pi}{2}(x-1)}{\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}+\lim_{x\to1}\frac{-\sin\frac{3\pi}{2}+\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}$$

$$\Rightarrow L=-\frac{2}{\pi}+\lim_{x\to1}\frac{2\sin\left[\frac{3\pi}{4}(x-1)\right]\cdot\cos\left[\frac{3\pi}{4}(x-1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}$$

$$\Rightarrow L=-\frac{2}{\pi}\quad\text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to1}\frac{x+\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1+\frac{3\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=-\frac{2}{\pi}\quad\text{bulunur.}$$

Problem -35

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}-\cos 2x}{x^2}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}-\cos 2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cdot\cos 2x}{x^3}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+x-x\cdot\cos 2x}{x^3}$$

$$\Rightarrow L=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}}_{L_1}+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cdot\cos 2x}{x^3}}_{L_2}$$

Problem-29'dan $L_1=-\frac{1}{6}$ olduğu görülür.

$$L_2=\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cdot\cos 2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2$$

olup $L=\frac{11}{6}$ elde edilir.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cdot\cos 2x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x+2x\cdot\sin 2x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+4\cdot\sin 2x+4x\cdot\cos 2x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+12\cdot\cos 2x-8x\cdot\sin 2x}{6}$$

$$=\frac{11}{6}$$ bulunur.

Problem -36

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=L$$

$$\Rightarrow L=1+\underbrace{\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)}_{L_1}$$

$\sqrt{x}=t$ dönüşümü yapalım:

$$L_1=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{t\to 1^+}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{2\cdot\ln t}\right)$$

$$=\lim_{t\to 1^+}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{2(t-1)}+\frac{1}{2(t-1)}-\frac{1}{2\cdot\ln t}\right)$$

$$=\lim_{t\to 1^+}\frac{1-t}{2\left(t^2-1\right)}+\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to 1^+}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{\ln t}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot L_1$$

$$\Rightarrow L_1=-\frac{1}{2}$$ olur.

$$L=1+L_1$$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{2}$$ elde edilir.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1^+}\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$
$$=1+\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}$$
$$=1+\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}$$

Eşitliğin sağında $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=1+\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}$$
$$=1+\lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\quad\text{bulunur.}$$

Problem -37

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\log_x 3-1}{x-3}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$L=\lim_{x\to3}\frac{\log_x 3-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{\ln3}{\ln x}-1}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{\ln3-\ln x}{(x-3)\cdot\ln x}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{\ln\frac{x}{3}}{(3-x)}\cdot\lim_{x\to3}\frac{1}{\ln x}$$
$$=\frac{1}{\ln3}\cdot\underbrace{\lim_{x\to3}\frac{\ln\frac{x}{3}}{(3-x)}}_{L_1}$$

$\frac{x}{3}=1+t$ dönüşümü yapalım:

$$L_1=\lim_{x\to3}\frac{\ln\frac{x}{3}}{(3-x)}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{-3t}$$
$$=\lim_{t\to0}\ln\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{-1}{3}}$$
$$=-\frac{1}{3}$$

$$L=\frac{1}{\ln3}\cdot\frac{-1}{3}\quad\Rightarrow\quad L=\frac{-1}{\ln27}\quad\text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$L=\lim_{x\to3}\frac{\log_x 3-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{\ln3}{\ln x}-1}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{\frac{\frac{-1}{x}\cdot\ln3}{\ln^2 x}}{1}$$
$$=\frac{-1}{\ln27}\quad\text{bulunur.}$$

Problem -38

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}{x-3}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left[\frac{1}{x-3}\cdot\ln\left(\frac{x^2-1}{8}\right)\right]$$

$\frac{x^2-1}{8}=1+t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left[\frac{1}{x-3}\cdot\ln\left(\frac{x^2-1}{8}\right)\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{9+8t}-3}\cdot\ln\left(1+t\right)\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{t}{\sqrt{9+8t}-3}\cdot\ln\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{t\left(\sqrt{9+8t}+3\right)}{8t}\cdot\ln\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right]$$

$=\frac{3}{4}$ bulunur.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1}$$

$=\frac{3}{4}$ bulunur.

Problem -39

$$\lim_{x\to 3}\frac{\log_x 3-1}{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$L=\lim_{x\to 3}\frac{\log_x 3-1}{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 3}\frac{\log_x 3-1}{x-3}}_{L_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}}_{L_2}$$

Problem-37'den $L_1=\frac{-1}{\ln 27}$,

Problem-38'den $L_2=\frac{4}{3}$ olduğu görülür.

$L=-\frac{4}{9\cdot\ln 3}$ elde edilir.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\log_x 3-1}{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{\ln 3}{\ln x}-1}{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{\frac{-1}{x}\cdot\ln 3}{\ln^2 x}}{\frac{2x}{x^2-1}}$$

$=-\frac{4}{9\cdot\ln 3}$ bulunur.

Problem -40

$a \neq k\cdot\pi$ ve $k \in Z$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$y = \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x-a}\cdot\ln\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(\ln y) = \lim_{x\to a}\left[\frac{1}{x-a}\cdot\ln\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)\right]$$

$\dfrac{\sin x}{\sin a} = 1+t$ dönüşümü yapılırsa;

$x = \operatorname{Arc}\sin\left[(1+t)\cdot\sin a\right]$ olur.

$$\lim_{x\to a}(\ln y)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{\operatorname{Arc}\sin\left[(1+t)\cdot\sin a\right]-a}\cdot\ln(1+t)\right\}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{t}{\operatorname{Arc}\sin\left[(1+t)\cdot\sin a\right]-a}\cdot\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{Arc}\sin\left[(1+t)\cdot\sin a\right]-a}}_{L}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}_{1}$$

L ifadesinde, t yerine x türünden değerini geri koyalım:

$$L = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{Arc}\sin\left[(1+t)\cdot\sin a\right]-a}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x\to a}\frac{\frac{\sin x}{\sin a}-1}{x-a}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\cdot\sin a}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x\to a}\frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{2\cdot\frac{x-a}{2}\cdot\sin a}$$

$\Rightarrow L = \cot a$ bulunur.

$\lim\limits_{x\to a}(\ln y) = \cot a \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} y = e^{\cot a}$ elde edilir.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$y = \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{x-a}\cdot\ln\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(\ln y) = \lim_{x\to a}\frac{\ln(\sin x)-\ln(\sin a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\ln y = \cot a$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} y = e^{\cot a}$ elde edilir.