Soru

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cdot\cos x}{x^3}$ değerini, Hospital Kuralını uygulamadan, bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cdot\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + x - x\cdot\cos x}{x^3}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}}_{k} + \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x - x\cdot\cos x}{x^3}}_{\ell}$$

$k = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$'dır.

$$\ell = \lim_{x\to 0}\frac{x - x\cdot\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{olur.}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cdot\cos x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$ bulunur.

$k = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ değerinin bulunması, sık sık karşılaştığımız bir problemdir.

Aşağıdaki gibi bulunabilir:

"$\sin x = 3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3}$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin\frac{x}{3} - 4\cdot\sin^3\frac{x}{3} - x}{x^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin\frac{x}{3} - x}{x^3} - \lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin^3\frac{x}{3}}{x^3} \quad (1)$$

Eşitliğin soluna k deyip sağındaki ilk terimde de $x = 3t$ dönüşümü yaparsak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = k;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin\frac{x}{3} - x}{x^3} = \lim_{t\to 0}\frac{3\cdot\sin t - 3t}{27.t^3}$$

$$= \frac{3}{27}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t - t}{t^3} = \frac{1}{9}\cdot k;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin^3\frac{x}{3}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin^3\frac{x}{3}}{27\cdot(\frac{x}{3})^3} = \frac{4}{27}$$

olur.

Bu değerler (1) eşitliğinde yerlerine konulursa;

$$k = \frac{1}{9}\cdot k - \frac{4}{27}$$

$\Rightarrow k = -\dfrac{1}{6}$ bulunur."