Soru

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{2}x^2-\cos x}{x^4}$ değerini, Hospital Kuralını uygulamadan, bulunuz.

Çözüm

$l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{2}x^2-\cos x}{x^4}$ ifadesinde

$\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$ değerini yerine koyalım.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+2\sin^2\frac{x}{2}}{x^4}$$

$$\Rightarrow l=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}-x^2}{2x^4}$$

$x=2t$ diyelim.

$$l=\lim_{t\to 0}\frac{4\sin^2 t-4t^2}{32t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t-t^2}{8t^4}$$

$$\Rightarrow l=\lim_{t\to 0}\frac{(\sin t-t)\cdot(\sin t+t)}{8t^4}$$

Burada; paydayı $t^2\cdot t^2$ diye ayırmak işe yaramaz. $t^3\cdot t$ diye ayıralım.

$$\Rightarrow l=\lim_{t\to 0}\frac{(\sin t-t)\cdot(\sin t+t)}{8t^4}$$

$$\Rightarrow l=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t+t}{8t}$$

$$\Rightarrow l=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}\cdot\left[\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{8t}+\lim_{t\to 0}\frac{t}{8t}\right]$$

$$\Rightarrow l=\frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}\quad \text{bulunur.}$$

Sağdaki limitin değerinin $-\dfrac{1}{6}$ olduğu ayrıca hesaplanır.

$$l=-\frac{1}{24}\quad \text{olur.}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin t-t}{t^3}$ değeri aşağıdaki gibi bulunur.

"$\sin t=3\sin\dfrac{t}{3}-4\sin^3\dfrac{t}{3}$ olduğundan,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{3\cdot\sin\frac{t}{3}-4\cdot\sin^3\frac{t}{3}-t}{t^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{3\cdot\sin\frac{t}{3}-t}{t^3}-\lim_{t\to 0}\frac{4\cdot\sin^3\frac{t}{3}}{t^3}\quad (1)$$

Eşitliğin soluna k deyip sağındaki ilk terimde de $t=3p$ dönüşümü yaparsak,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}=k;$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{3\cdot\sin\frac{t}{3}-t}{t^3}=\lim_{p\to 0}\frac{3\cdot\sin p-3p}{27.p^3}$$

$$=\frac{3}{27}\cdot\lim_{p\to 0}\frac{\sin p-p}{p^3}=\frac{1}{9}\cdot k;$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{4\cdot\sin^3\frac{t}{3}}{t^3}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin^3\frac{t}{3}}{27\cdot(\frac{t}{3})^3}=\frac{4}{27}$$

olur.

Bu değerler (1) eşitliğinde yerlerine konulursa;

$$k=\frac{1}{9}\cdot k-\frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow k=-\frac{1}{6}\quad \text{bulunur."}$$