Soru

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ değerini, Hospital Kuralını uygulamadan, bulunuz.

Çözüm

$\sin x = 3\sin\dfrac{x}{3} - 4\sin^3\dfrac{x}{3}$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-3\cdot\sin\frac{x}{3}+4\cdot\sin^3\frac{x}{3}}{x^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-3\cdot\sin\frac{x}{3}}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin^3\frac{x}{3}}{x^3}$$

Eşitliğin soluna ℓ deyip sağındaki ilk terimde de $x = 3t$ dönüşümü yaparsak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = l;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-3\cdot\sin\frac{x}{3}}{x^3} = \lim_{t\to 0}\frac{3t-3\cdot\sin t}{27.t^3}$$

$$= \frac{3}{27}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3} = \frac{1}{9}\cdot l;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin^3\frac{x}{3}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin^3\frac{x}{3}}{27\cdot(\frac{x}{3})^3} = \frac{4}{27}$$

olur.

Bu değerler yukarıdaki eşitlikte yerlerine konulursa;

$$l = \frac{1}{9}\cdot l + \frac{4}{27}$$

$\Rightarrow l = \dfrac{1}{6}$ bulunur.