Alıştırmalar ve Problemler – 2.1

1. **a.** – Ne kadar büyük?
Küme belirtmez.

b. Küme belirtir.

c. – Hangileri?
Küme belirtmez.

d. Belirttiği küme $\varnothing$'dir.

e. Hiçbir küme kendi kuvvet kümesini içermez. O hâlde, yazılabilecek hiçbir küme "bütün kümelerin kümesi" olamaz.

f. Küme belirtir.

2. **a.** 0 **b.** 1 **c.** 1 **d.** 3 **e.** 3
f. 3 **g.** 3 **h.** 5

3. **a.** $\subset$, $\not\equiv$ **b.** $\subset$, $\in$ **c.** $\not\subset$, $\not\equiv$
d. $\not\subset$, $\not\equiv$ **e.** $\supset$, $\not\equiv$ **f.** $\subset$, $\not\equiv$

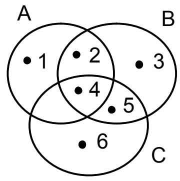
4. **a.** $\Delta \to k$; $\square \to b$ **b.** $\Delta \to 5$; $\square \to 1$
c. $\Delta \to \{3\}$; $\square \to 3$ **d.** $\Delta = \square$
e. $\Delta \to 1, 3, 4, 6$ **f.** $\Delta \to c, d$; $\square \to a$

5. $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{a\}$, $\{\{a\}\}$, $\{\varnothing, a\}$, $\{\varnothing, \{a\}\}$, $\{a\{a\}\}$, $\{\varnothing, a, \{a\}\}$

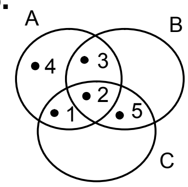
6. **a.** Yanlış **b.** Yanlış **c.** Doğru
d. Doğru **e.** Yanlış **f.** Doğru
g. Yanlış **h.** Doğru

7. $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{b,c,d,e,f\}$, $C = \{c,d,e\}$

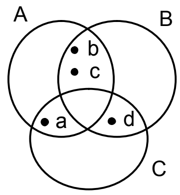
8. **a.**



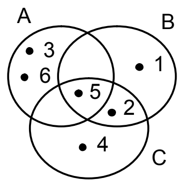
b.



c.



d.



9. **a.** Önce $A = \varnothing$ nin gerekli koşul olduğunu gösterelim :

$A \subset \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$

Hipoteze göre $A \subset \varnothing$ dir. Diğer taraftan $\varnothing \subset A$ olduğundan $A = \varnothing$ olur.

($A \subset B$ ve $B \subset A$ ise $A = B$)

$A = \varnothing \Rightarrow A \subset \varnothing$ olduğunu gösterelim :
$A = \varnothing$ ise, $A \subset A$ olduğundan $A \subset \varnothing$ olur.
O hâlde; $\mathbf{A \subset \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing}$ teoremi ispatlanmıştır.

b. "$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$" ① önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı,

$$\forall x, \left[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C) \right]$$
$$\Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in C)$$

② olup önermeler mantığındaki karşılığı,
$\left[(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{r}) \right] \Rightarrow (\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{r})$ ③ dir.

③ önermesi ancak $p \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ iken yanlış olabilir.

Bu durumda; ③ önermesi,
$q \equiv 1$ iken
$\left[(1 \Rightarrow 1) \wedge (1 \Rightarrow 0) \right] \Rightarrow (1 \Rightarrow 0) \equiv 0 \Rightarrow 0 \equiv 1$;
$q \equiv 0$ iken
$\left[(1 \Rightarrow 0) \wedge (0 \Rightarrow 0) \right] \Rightarrow (1 \Rightarrow 0) \equiv 0 \Rightarrow 0 \equiv 1$ olup bir totolojidir. O hâlde;

"$\left[(\mathbf{A \subset B}) \wedge (\mathbf{B \subset C}) \right] \Rightarrow \left[\mathbf{A \subset C} \right]$"

önermesi doğrudur.

10. a. $\binom{6}{1}=6$ **b.** $\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=15$

c. $\binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20$ **d.** $\binom{6}{5}=6$

11. a. $2^6=64$ **b.** $2^6=64$ **c.** $2^5=32$

d. Tüm alt kümelerin sayısından, 3 ve 5'in bulunmadığı alt kümelerin sayısı çıkarılır.

$2^7-2^5=128-32=96$

e. Tüm alt kümelerin sayısından, 3 ve 5'in birlikte bulunduğu alt kümelerin sayısı çıkarılır.

$2^7-2^5=96$

f. 2'nin bulunduğu, 3 ve 5'in bulunmadığı alt kümelerin sayısı 2^4; 2'nin bulunmadığı, 3 ve 5'in bulunduğu alt kümelerin sayısı 2^4; hem 2'nin hem de 3 ve 5'in bulunduğu alt kümelerin sayısı 2^4 olup toplam sayı $3\cdot 2^4=48$ dir.

12. $\{a,b,c\}-\{a,c,e\}=\{2\}\Rightarrow b=2$;

$\{a,c,e\}-\{c,d,e\}=\{4\}\Rightarrow c=4$;

$\{a,b,c\}=\{2,4,5\}\Rightarrow a=5$;

$\{a,c,e\}=\{3,4,5\}\Rightarrow e=3$;

$\{c,d,e\}=\{1,3,5\}\Rightarrow d=1$ bulunur.

13. a. 3 **b.** 10 **c.** 15

d. $2^n-1=255\Rightarrow n=8$; $\binom{8}{2}=28$

14. K kümeleri, $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinin 1 ve 2'yi bulunduran alt kümeleridir.

Bunların sayısı da $2^5=32$ dir.

15. a. K kümeleri, $C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinin 1, 2, 3, 4, 5 ve 6'yı bulunduran alt kümeleridir.

Bunların sayısı da $2^3=8$ dir.

b. $2^2=4$

16. $s(A)=x$ dersek, $s(B)=x-3$ olur.

$2^x=3\cdot 2^{x-3}+80$

$\Rightarrow 2^x=3\cdot\frac{2^x}{8}+80\Rightarrow 8\cdot 2^x=3\cdot 2^x+8\cdot 80$

$\Rightarrow 5\cdot 2^x=8\cdot 80\Rightarrow 2^x=2^3\cdot 2^4\Rightarrow 2^x=2^7$

$\Rightarrow x=7$ bulunur.

17. a. A kümesinin iki elemanı $\binom{3}{2}=3$ değişik biçimde seçilebilir. Her seçim için $\binom{4}{3}=4$ değişik alt küme yazılacağından, istenen sayı $3\cdot 4=12$ olur.

b. B kümesinin, A kümesinde elemanı bulunmayan 5 elemanlı alt kümesi yoktur. A kümesinin bir elemanının bulunduğu alt kümelerin sayısı $3\cdot\binom{4}{4}=3$ tür. A'nın iki elemanının bulunduğu alt kümelerin sayısı 12 idi. Buna göre, istenen sayı $12+3=15$ olur.

c. A kümesinin iki elemanının bulunduğu alt kümelerin sayısı $\binom{4}{2}=6$ dır.

Buna göre, A'nın en az iki elemanının bulunduğu alt kümelerin sayısı $12+6=18$ olur.

d. B'nin 5 elemanlı tüm alt kümelerinde A'nın en az bir elemanı bulunur.

$\binom{7}{5}=\binom{7}{2}=\frac{7\cdot 6}{2}=21$

18. Küme n elemanlı olsun.

$$\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{5}}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{5\cdot 4}{(n-3)(n-4)}=\frac{2}{3}\Rightarrow(n-3)(n-4)=6\cdot 5$$

$\Rightarrow n=9$ bulunur.

$$\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\underbrace{\binom{9}{3}+\ldots+\binom{9}{9}}_{x}=2^9$$

$x=2^9-1-9-36$

$x=466$

En az 3 elemanlı alt kümelerin sayısı 466 olur.

Alıştırmalar ve Problemler – 2.2

1. **a.** $\{2,3\}$ **b.** $\{1,2,3,5,6\}$ **c.** $\{2,4\}$

d. $\{1,4,5\}$ **e.** $\{6,7,8,9\}$ **f.** $\{0,1,2,4,6,7,8,9\}$

g. $A'\Delta C' = A\Delta C$ olduğunu görünüz.
$A'\Delta C = \{1,2,5,6\}$

h. $\{3,5\}$ **i.** $\{1,2,3,5\}$ **j.** $\{1,2\}$

k. $\{1,2,4\}$ **l.** $\{1\}$ **m.** $\{3,4,5\}$

n. $B' - C' = C - B$ olduğunu görünüz.
$B' - C' = \{6\}$

o. $\{0,7,8,9\}$ **p.** $\{1,2,4\}$ **r.** $\{1,2,4\}$

s. $\{0,7,8,9\}$ **t.** $\{0,1,3,7,8,9\}$ **u.** $\{1,3,4,5\}$

2. **a.** $\{b,c\}$ **b.** $\{a,b,c,e\}$ **c.** $\{a,d\}$

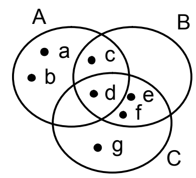
d. $\{a,c,e\}$ **e.** $\{a,b,c\}$ **f.** $\{a,b,c\}$

g. $\{c,e\}$ **h.** $\{a,b,c\}$ **i.** $\{a,b,c\}$

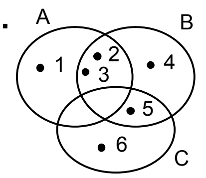
j. $\{d\}$ **k.** $\{b\}$ **l.** $\{d\}$

m. $\{c,d,e\}$ **n.** $\{c\}$ **o.** $\{b,c,d\}$ **p.** $\{c\}$

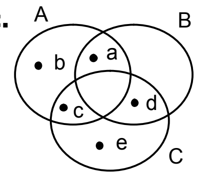
3. **a.**



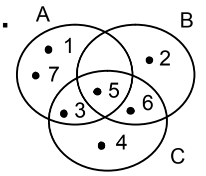
b.



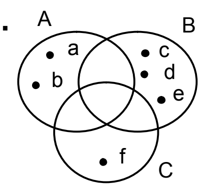
c.



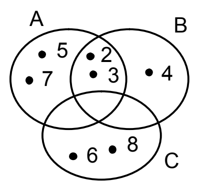
d.



e.



f.



4. **a.** $\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\right]-(A\cap B\cap C)$

b. $\left[A-(B\cup C)\right]\cup\left[B-(A\cup C)\right]\cup\left[C-(A\cup B)\right]$
veya $\left[(A\Delta B)-C\right]\cup\left[C-(A\cup B)\right]$

c. $\left[(A\Delta B)-C\right]\cup(A\cap B\cap C)$

d. $\left[(A\cup C)-B\right]\cup(A\cap C)$

e. $\left[(A\cap B)-C\right]\cup(C-A)$

f. $(A\cap C)\cup B$

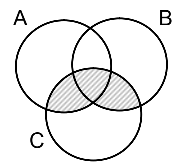
g. $\left[A-(B\cup C)\right]\cup(C-A)$

h. $(B\cap C)\cup(C-A)$

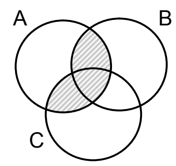
i. $(A\cap B)\cup(C-B)$

j. $\left[(A\cap C)-B\right]\cup\left[(B\cap C)-A\right]$

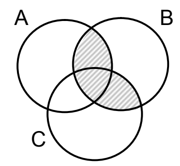
5. **a.**



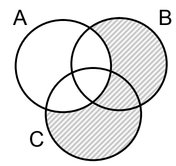
b.



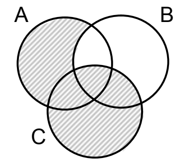
c.



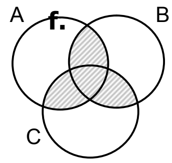
d.



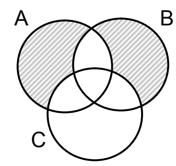
e.



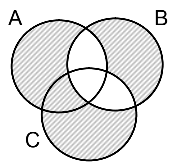
f.



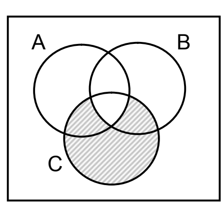
g.



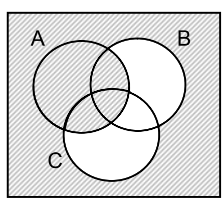
h.



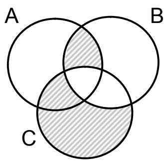
i.



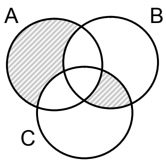
j.



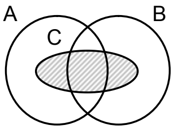
k.



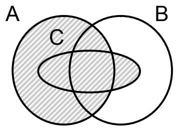
l.



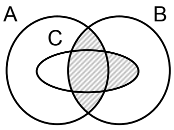
6. a.



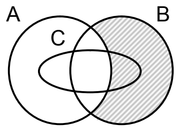
b.



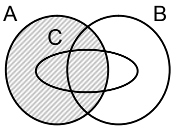
c.



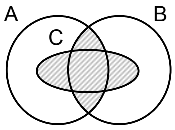
d.



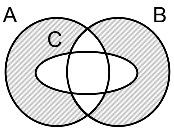
e.



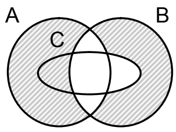
f.



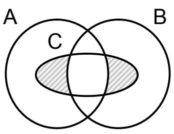
g.



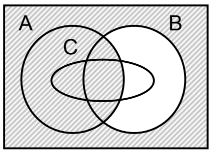
h.



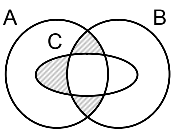
i.



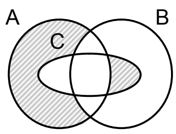
j.



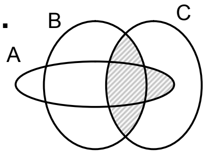
k.



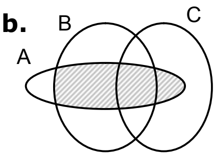
l.



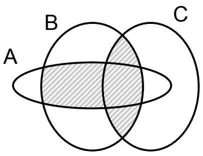
7. a.



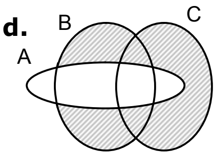
b.



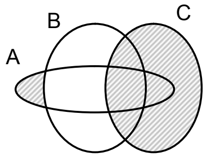
c.



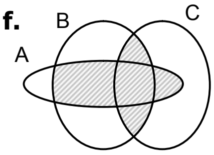
d.



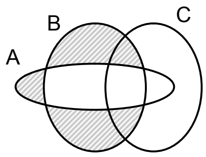
e.



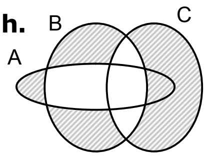
f.



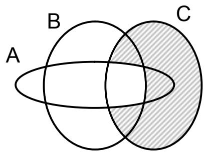
g.



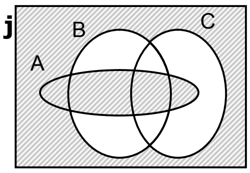
h.



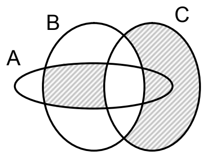
i.



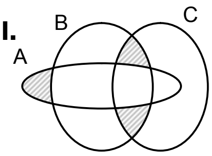
j



k.



l.



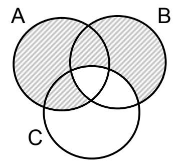
8. a. $\{a,b,c,d,e\}$ **b.** $\{1,2,3,4\}$

c. $\{4,5\}$ **d.** $\{b,d,f\}$

9. a. $\{b,c\}$ **b.** $\{1,2,3,4,5,6\}$

10. $(A\cup B)-(B\cup C)$ kümesinin $A-(B\cup C)$ kümesine eşit olduğunu görünüz. $\{1,2\}$

11. $(A-B)\cup(B-C)$ kümesinin $(A\cup B)-(B\cap C)$ kümesine eşit olduğunu görünüz. $\{a,b,c,d,e\}$



12. a. $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$\Rightarrow A-(B\cup C)=\{b,c\}$

b. $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$\Rightarrow A-(B\cap C)=\{a,b,c,d\}$

c. Venn şemasından $(A\cap B)\Delta(A\cap C)=(A-B)\Delta(A-C)=\{a,d\}$ olduğunu görünüz.

13. a. $(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)=A\cap(A\cup B)$

$=A\left[A\subset(A\cup B)\right]$

b. $(A\cap B')\cup(A\cap E)=(A\cap B')\cup A$

$=A\cap B'\left[(A\cap B')\subset A\right]$

c. $(A\cup\varnothing)\cup(A'\cap E)=A\cup A'=E$

d. $(A\cup E)\cap(A\cup B)\cap(B\cup\varnothing)$

$=\underbrace{A\cap(A\cup B)}_{A}\cap B=A\cap B$

e. $A\cap(A\cup B)=A$ **f.** $(A\cup B)\cup B=B$

14. Verilen ifadeleri, önce küme işlemlerinden yararlanarak sadeleştirelim :

a. $(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap(B'\cup B)=A\cap E=$ **A**

b. $\underbrace{(A\cup B)}\cap\underbrace{(A\cup B')}\cap(A'\cup B)$

$=\left[A\cup(\underbrace{B\cap B'}_{\varnothing})\right]\cap(A'\cup B)=(A\cup\varnothing)\cap(A'\cap B)$

$=A\cap A'\cap B=\varnothing$

c. $(A\cap B)\cap(B\cup C)=A\cap B \quad \left[(A\cap B)\subset(B\cup C)\right]$

d. $A-(B-A)=A\cap(B\cap A')=A\cap(A\cup B')$

$=\mathbf{A} \quad \left[A\subset(A\cup B')\right]$

e. $A-(A-B)=A\cap(A\cap B')'=A\cap(A'\cup B)$

$=(A\cap A')\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=\mathbf{A\cap B}$

f. $(A-B)\cap(A-B')=A\cap B'\cap A\cap B=\varnothing$

g. $(A-B)\cup(A'\cup B)=\underbrace{(A\cap B')\cup A'}\cup B$

$=\left[\underbrace{(A\cup A')}_{E}\cap(A'\cup B')\right]\cup B=A'\cup B'\cup B=\mathbf{E}$

h. $\left[A\cup(B-A)\right]\cap B'=\left[A\cup(B\cap A')\right]\cap B'$

$=(A\cup A')\cap(A\cup B)\cap B'=(A\cup B)\cap B'$

$=(A\cap B')\cup(B\cap B')=(A\cap B')\cup\varnothing$

$=A\cap B'=\mathbf{A-B}$

i. $\underbrace{(A'\cup B)\cap(A\cup B)}\cap A'=\left[(A\cap A')\cup B\right]\cap A'$

$=(\varnothing\cup B)\cap A'=B\cap A=\mathbf{B-A}$

j. $\left[A\cap(A\cup B)'\right]\cup(A\cap B)$

$=(A\cap A'\cap B')\cup(A\cap B)$

$=\varnothing\cup(A\cap B)=\mathbf{A\cap B}$

k. $\left[A'\cap(A\cup B)\right]\cup\left[A\cap(A\cup B)'\right]$

$=(A'\cap A)\cup(A'\cup B)\cup(A\cap A'\cap B')$

$=\varnothing\cup A'\cup B\cup\varnothing=\mathbf{A'\cup B}$

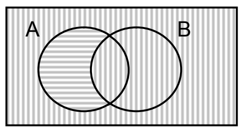
Venn şemasından yararlanarak sadeleştirmeyi, yalnız **g.**'deki ifade üzerinde yapacağız.

Diğerlerini, "Etkinlik-2.34" ten de yararlanarak siz yapınız.

g. $A-B\rightarrow$ ||||

$A'\cup B\rightarrow$ ≡

$(A-B)\cup(A'\cup B)=\mathbf{E}$



15. Taralı bölgenin,

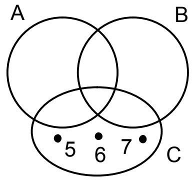
$\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\right]-\left[(A\cap B)\cap(A\cap C)\right]$

olduğunu görünüz.

$\{1,2,3,4,5,6\}-\{2,3,4\}=\{1,5,6\}$

16. a. $(A \cup C) - (A \cup B)$

kümesinin elemanları, yalnız C kümesinin elemanlarıdır. O hâlde, en dar C kümesi, $C = \{5, 6, 7\}$ olabilir.



b. En dar B kümesi, $B = \{1, 2\}$

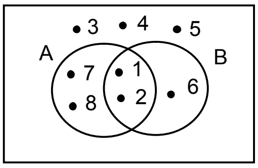
en geniş A kümesi, $A = \{3, 4\}$ olur.

17. $(A \cup B) \cup (A \cup B') = E$ ve $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$

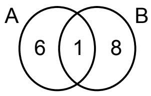
olduğunu görünüz.
Buna göre;
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

ve $A' = \{2, 4, 6, 8\}$ olur.

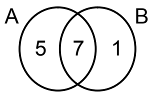
18. Venn şemasından yararlanacağız :
$A \cap B$ ve $A' - B$ kümeleri yazılır.
$(A - B)'$ kümesinden yararlanarak $B - A$ kümesi, B' kümesinden yararlanarak $A - B$ kümesi yazılır. $A \cup B = \{1, 2, 6, 7, 8\}$ olur.



19. a. $s(A \cup B)$
en çok
15 olabilir.



b. $s(A \cup B)$
en az
13 olabilir.



c. $s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$ ①

ve $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ ② dir.

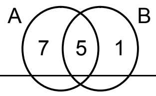
① ve ② den

$s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$

$= s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$\Rightarrow 10 + s(A \cap B) = 16 - s(A \cap B) \Rightarrow s(A \cap B) = 3$

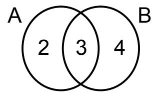
bulunur. Bu değer ② de yerine konulursa,
$s(A \cup B) = 16 - 3 \Rightarrow s(A \cup B) = 13$ olur.



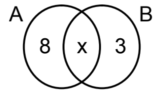
d. s(A) en çok
12 olabilir.

e. $s(A' \cap B) = 4$

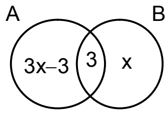
olur.



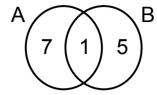
f. $s(A) = 3s(A \cap B)$
$\Rightarrow 8 + x = 3x$
$\Rightarrow x = 4$
$s(A \cup B) = 15$



g. $s(A \cup B) = 16$
$\Rightarrow 4x = 16$
$\Rightarrow x = 4$ olur.
$s(B) = 7$ dir.

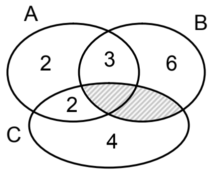


h. s(B) en az
6 olabilir.

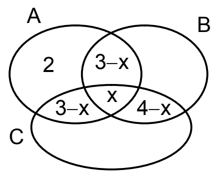


20. a. $s(A \cup B \cup C) = 17$

dir.

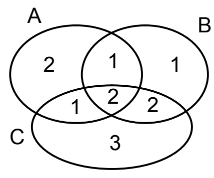


b. $s(A \cap B \cap C) = x$ deyip
$A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$
kümelerinin eleman sayılarını dikkate alarak, bunların alt kümelerinin eleman sayılarını yazalım. (Şekilde)



$s(A \cap B' \cap C') = 2$ ve $s(A) = 6$ olduğundan,
$2 + 3 - x + 3 - x + x = 6 \Rightarrow x = 2$ olur.

Artık her alt kümenin eleman sayılarını yazabiliriz. (Şekilde)
Buna göre,
$s(A \cup B \cup C) = 12$ dir.



21. a. Taralı bölgeye karşılık gelen küme,
$\left[C-(A\cup B)\right]\cup\left[(A\cap B)-C\right]$ dir.
Bu da $\{7,3,4\}$ olur.

b. Taralı bölgeye karşılık gelen küme,
$\left[(A\cup B)-C\right]-(A\cap B)$ dir.
Bu da, $\{1,2\}$ olur.

22. a. $C=\{x,y,z\}$ olsun.
$\{2,3\}\cup\{x,y,z\}=\{1,3,5\}\cup\{x,y,z\}$ eşitliğinde x, y, z den biri 1, biri 2, biri 5 olmalıdır.
Buna göre, istenen C kümesi $C=\{1,2,5\}$ olur.

b. $C=\{x,y,z\}$ olsun.
$\{2,3\}\cap\{x,y,z\}=\{1,3,5\}\cap\{x,y,z\}$ eşitliğinde;

I. x, y, z nesneleri 1, 2, 3, 5'ten farklı nesneler olarak seçilebilir. Örneğin, $C=\{4,6,8\}$ olabilir.
Bu durumda kesişim kümesi $\varnothing$ olur.

II. x, y, z'den biri 3, diğerleri 1, 2 ve 5'ten farklı olarak seçilebilir. Örneğin, $C=\{3,4,6\}$ olabilir.
Bu durumda kesişim kümesi {3} olur.

c. $C=\{x,y,z\}$ olsun.
$\{2,3\}\cup\{x,y,z\}\subset\{1,3,5\}\cup\{x,y,z\}$ önermesinde x, y, z'den biri 2 olmalıdır. Diğerleri rastgele yazılabilir. Örneğin; $C=\{2,3,7\}$ olabilir.

d. $C=\{x,y,z\}$ olsun.
$\{2,3\}\cap\{x,y,z\}\subset\{1,3,5\}\cap\{x,y,z\}$ önermesinde;

I. x, y, z nesneleri 1, 2, 3, 5'ten farklı seçilebilir.
Örneğin, $C=\{4,7,9\}$ olabilir. Bu durumda önerme $\varnothing\subset\varnothing$ biçiminde sağlanmış olur.

II. x, y, z den biri 1 ya da 5 olarak veya ikisi 1 ve 5 olarak seçilebilir. Örneğin;
$C_1=\{1,4,8\}$,
$C_2=\{5,7,9\}$,
$C_3=\{1,5,9\}$ olabilir.
Bu durumda, önerme $\varnothing\subset K$ biçiminde sağlanmış olur.

III. x, y, z'den biri 3, diğerleri 2'den farklı her nesne olarak seçilebilir.
Örneğin, $C=\{3,4,5\}$ olabilir.
Bu durumda, önerme $\{3\}\subset\{3,5\}$ biçiminde sağlanmış olur.

23. $s(A'\cup B')-s(A'\cap B')=s(A\Delta B)$ olduğunu görünüz. Buna göre,
$s(A\Delta B)=s(A-B)+s(B-A)=30-10=20$ dir.
$3\cdot s(A-B)=4\cdot s(A\cap B)=2\cdot s(B-A)$ eşitliğinde
$s(A-B)=4k$ dersek, $s(B-A)=6k$ ve
$s(A\cap B)=3k$ olur.
$4k+6k=20\Rightarrow k=2$ olup $s(A-B)=8$ ve
$s(A\cap B)=6$ bulunur.
Buna göre, $s(A)=8+6=14$ tür.

24. a. $A\cap B=\left\{x\,\middle|\, x<400 \text{ ve } x=12k,\ k\in Z^{+}\right\}$ olur.
(Neden?)
$s(A\cap B)=33$ tür.

$$\begin{array}{r|l} 400 & 12 \\ \hline - & 33 \\ 4 & \end{array}$$

b. $A-B$ kümesi, 4'e bölünen ancak 6'ya bölünemeyen 400'den küçük doğal sayıların kümesidir.
4 ile bölünebilen, 400'den küçük doğal sayıların sayısından, hem 4'e hem 6'ya - 12'ye- bölünebilen doğal sayıların sayısını çıkaracağız.
Buna göre;
$s(A-B)=(100-1)-33=66$
olur.

$$\begin{array}{r|l} 400 & 4 \\ \hline - & 100 \\ 0 & \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} 400 & 12 \\ \hline - & 33 \\ 4 & \end{array}$$

c. $B-A$ kümesi, 6'ya bölünen ancak 4 ile bölünemeyen 400'den küçük doğal sayıların kümesi ile $400\le x\le 600$ aralığında olup 6 ile bölünebilen do-ğal sayıların kümesinin birleşimidir.
$s(B-A)=66-33+(100-66)$
$\Rightarrow s(B-A)=67$ dir. (Açıklayınız.)

d. $s(A\cup B)=s(A-B)+s(A\cap B)+s(B-A)$
$\Rightarrow s(A\cup B)=66+33+67$
$\Rightarrow s(A\cup B)=166$ dır.

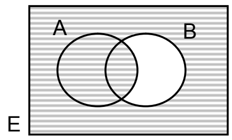
25. $(A'\cup B)\cup(A\cup B')=(A'\cup A)\cup(B\cup B')=E$

olduğundan, $E=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ olur.

a. Yandaki Venn şemasına göre,

$B-A=E-(A\cup B')$

$\Rightarrow B-A=\{4\}$ olur.



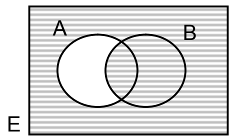
$A\cup B'$

b. $A-B=E-(A'\cup B)$

$\Rightarrow A-B=\{1,2\}$ olup

$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

$\Rightarrow A\Delta B=\{1,2,4\}$ bulunur.



$A'\cup B$

26. a. $\mathbf{A}\cap(\mathbf{B}-\mathbf{A})=A\cap(B\cap A')$

$=A\cap A'\cap B$

$=\varnothing\cap B$

$=\varnothing$

b. $\mathbf{A}\cap(\mathbf{B}-\mathbf{A})=A\cap(B\cap A')$

$=(A\cup B)\cap\underbrace{(A\cup A')}_{E}$

$=(A\cup B)\cap E$

$=\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$

c. $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cap(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})=(A\cap B')\cap(A\cap B)$

$=(A\cap A)\cap\underbrace{(B'\cap B)}_{\varnothing}$

$=A\cap\varnothing$

$=\varnothing$

d. $(\mathbf{A}\Delta\mathbf{B})\cap\mathbf{A}=\left[(A\cup B)-(A\cap B)\right]\cap A$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B)'\cap A$

$=\underbrace{A\cap(A\cup B)}_{A}\cap(A'\cup B')$

$=A\cap(A'\cup B')$

$=(A\cap A')\cup(A\cap B')$

$=\varnothing\cup(A-B)$

$=\mathbf{A}-\mathbf{B}$

e. "$(A\subset B)\Rightarrow(A\cup C)\subset(B\cup C)$" ①

önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı,

"$\forall x,(x\in A\Rightarrow x\in B)$

$\Rightarrow\left[(x\in A\vee x\in C)\Rightarrow(x\in B\vee x\in C)\right]$" ②

dir.

② önermesinin herhangi bir a değeri için yorumlaması

"$(a\in A\Rightarrow a\in B)$

$\Rightarrow\left[(a\in A\vee a\in C)\Rightarrow a\in B\vee a\in C\right]$" ③ olur.

$a\in A\equiv p$, $a\in B\equiv q$, $a\in C=r$ diyerek

③ önermesini önermeler mantığında

"$(p\Rightarrow q)\Rightarrow\left[(p\vee r)\Rightarrow(q\vee r)\right]$" biçiminde sembolleştirebiliriz. ② önermesinin bütün yorumlamaları

$(\mathbf{p}\Rightarrow\mathbf{q})\Rightarrow\left[(\mathbf{p}\vee\mathbf{r})\Rightarrow(\mathbf{q}\vee\mathbf{r})\right]$ ④ biçiminde olur.

④ önermesi ancak $q\equiv 0$ ve $r\equiv 0$ iken yanlış olabilir. Bu durumda, önerme

$(p\Rightarrow 0)\Rightarrow(p\Rightarrow 0)\equiv 1$ olur.

Öyleyse, ④ önermesi bir totolojidir. O hâlde;

$(\mathbf{A}\subset\mathbf{B})\Rightarrow(\mathbf{A}\cup\mathbf{C})\subset(\mathbf{B}\cup\mathbf{C})$ önermesi doğrudur.

f. "$(\mathbf{A}\subset\mathbf{B})\Rightarrow(\mathbf{A}\cap\mathbf{C})\subset(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})$" ①

önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının

"$(\mathbf{p}\Rightarrow\mathbf{q})\Rightarrow\left[(\mathbf{p}\wedge\mathbf{r})\Rightarrow(\mathbf{q}\wedge\mathbf{r})\right]$" ② olduğunu ve

② önermesinin bir totoloji olduğunu gösteriniz. Bu durumda, ① önermesi doğru olur.

g. f'deki gibi yapınız.

h. <u>I. yol</u>

"$\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\varnothing\Leftrightarrow\mathbf{A}\subset\mathbf{B}'$" ① önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının

"$\left[(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})\Leftrightarrow\mathbf{0}\right]\Leftrightarrow(\mathbf{p}\Rightarrow\mathbf{q}')$" ② olduğunu ve ② önermesinin bir totoloji olduğunu gösteriniz.

<u>II. yol</u>

Önce "$A\subset B$" önermesinin gerekli koşul olduğunu gösterelim :

$A\cap B=\varnothing\Rightarrow(A\cap B)\cup B'=\varnothing\cup B'$

$\Rightarrow A\cap B=\varnothing\Rightarrow(A\cup B')\cap(B\cup B')=B'$

$\Rightarrow A\cap B=\varnothing\Rightarrow A\cup B'=B'$

$\Rightarrow\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\varnothing\Rightarrow\mathbf{A}\subset\mathbf{B}'$

Şimdi de "$A\subset B$" önermesinin yeterli koşul olduğunu gösterelim :

$A\subset B'\Rightarrow A\cap B\subset B'\cap B$

$\Rightarrow A\subset B'\Rightarrow A\cap B\subset\varnothing$

$\Rightarrow A\subset B'\Rightarrow(A\cap B\subset\varnothing)\wedge(\varnothing\subset A\cap B)$

$\Rightarrow\mathbf{A}\subset\mathbf{B}'\Rightarrow\mathbf{A}\cap\mathbf{B}'=\varnothing$

O hâlde;

$\Rightarrow\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\varnothing\Leftrightarrow\mathbf{A}\subset\mathbf{B}'$ önermesi doğrudur.

i. $A\cup B=C$ ise; "$A\subset(A\cup B)$ ve $B\subset(A\cup B)$" önermesinde $A\cup B$ yerine C konulursa, "$A\subset C$ ve $B\subset C$" elde edilir. O hâlde;

$(\mathbf{A\cup B=C})\Rightarrow(\mathbf{A\subset C})\wedge(\mathbf{B\subset C})$ önermesi doğrudur.

j. $A\cap B=C$ ise; "$A\cap B\subset A$ ve $A\cap B\subset B$" öner-mesinde $A\cap B$ yerine C konulursa, "$C\subset A$ ve $C\subset B$" elde edilir. O hâlde;

$(\mathbf{A\cap B=C})\Rightarrow(\mathbf{C\subset A})\wedge(\mathbf{C\subset B})$ önermesi doğru-dur.

k. <u>I. yol</u>

"$(\mathbf{C\subset A})\wedge(\mathbf{C\subset B})\Leftrightarrow\mathbf{C}\subset(\mathbf{A\cap B})$" ①

önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının

"$[(\mathbf{p}\Rightarrow\mathbf{q})\wedge(\mathbf{p}\Rightarrow\mathbf{r})]\Leftrightarrow[\mathbf{p}\Rightarrow(\mathbf{q}\wedge\mathbf{r})]$" ②

olduğunu ve ② önermesinin bir totoloji olduğunu gösteriniz.

II. yol

"$(A\subset B)\Rightarrow(A\cap B=A)$" ve

"$(A\cap B=C)\Rightarrow(C\subset A)\wedge(B\subset A)$"

teoremlerinden yararlanacağız.

Önce "$C\subset(A\cap B)$" önermesinin,

"$(C\subset A)\wedge(C\subset B)$" önermesinin gerekli koşulu olduğunu gösterelim :

$C\subset A$ ise $A\cap C=C$ ① ve

$C\subset B$ ise $B\cap C=C$ ② dir.

① de eşitliğin solundaki C yerine $B\cap C$ konulursa, $A\cap B\cap C=C$ ③ elde edilir.

③ önermesine göre, $C\subset(A\cap B)$ dir.

Böylece,

$(\mathbf{C\subset A})\wedge(\mathbf{C\subset B})\Rightarrow\mathbf{C}\subset(\mathbf{A\cap B})$ ④ olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi de "$C\subset(A\cap B)$" önermesinin,

"$(C\subset A)\wedge(C\subset B)$" önermesinin yeterli koşulu olduğunu gösterelim :

$\mathbf{C}\subset(\mathbf{A\cap B})\Rightarrow A\cap B\cap C=C$

$\Rightarrow(\mathbf{C\subset A})\wedge(\mathbf{C\subset B})$ ⑤

④ ve ⑤ ten

$(\mathbf{C\subset A})\wedge(\mathbf{C\subset B})\Leftrightarrow\mathbf{C}\subset(\mathbf{A\cap B})$ elde edilir.

l. "$(A\subset B)\Rightarrow(A\cup B=B)$" ve

"$(A\cup B=C)\Rightarrow(A\subset C)\wedge(B\subset C)$"

teoremlerinden yararlanarak, **k**'deki gibi ispatlayınız.

m. $A\subset B\Rightarrow A\cup B=B$ ① dir.

"$A\cup(B-A)=A\cup B$" olduğunu **b**'de ispatlamıştık. ① de $A\cup B$ yerine $A\cup(B-A)$ konulursa,

$(\mathbf{A\subset B})\Rightarrow[\mathbf{A}\cup(\mathbf{B}-\mathbf{A})=\mathbf{B}]$ bulunur.

n. <u>I. yol</u>

Önermeler mantığından yararlanınız.

<u>II. yol</u>

"$(A\subset B)\Rightarrow(A\cup B=B)$" ve

"$(A\cup B=C)\Rightarrow(A\subset C)\wedge(B\subset C)$"

teoremlerinden yararlanacağız.

$A\subset C$ ise $A\cup C=C$ ① ve

$B\subset C$ ise $B\cup C=C$ ② dir.

① de eşitliğin solundaki C yerine $B\cup C$ konulursa, $A\cup B\cup C=C$ ③ elde edilir. ③ önermesine göre,

$A\cup B\subset C$ dir. Böylece,

$(\mathbf{A\subset C})\wedge(\mathbf{B\subset C})\Rightarrow(\mathbf{A\cup B})\subset\mathbf{C}$ olduğu ispatlanmış olur.

o. <u>I. yol</u>

Önermeler mantığından yararlanınız.

<u>II. yol</u>

"$A\subset B\Rightarrow A\cap B=A$" ve

"$(A\cap B=C)\Rightarrow(C\subset A)\wedge(C\subset B)$"

teoremlerinden yararlanacağız.

$(\mathbf{A\subset B}\text{ ve }\mathbf{C\subset D})\Rightarrow(A\cap B=A\text{ ve }C\cap D=C)$

$\Rightarrow A\cap C=A\cap B\cap C\cap D$

$\Rightarrow A\cap C=(A\cap C)\cap(B\cap D)$

$\Rightarrow(\mathbf{A\cap C})\cap(\mathbf{B\cap D})$

r. p'deki gibi ispatlayınız.

Alıştırmalar ve Problemler – 2.3

1. Gülü olanların kümesi G, karanfili olanların kümesi K olsun.

$s(K\cup M)=12,\ s(G)=9,\ s(K)=7$ olduğundan

$s(K\cup M)=s(G)+s(K)-s(G\cap K)$

$\Rightarrow 12=9+7-s(G\cap K)$

$\Rightarrow s(G\cap K)=4$ olur.

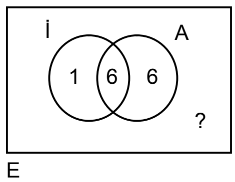
2. A gazetesini alanların kümesi A, B gazetesini alanların kümesi B olsun.

$s(A\cup B)=23,\ s(A)+s(B)=32$ olduğundan

$s(A\cap B)=32-23=9$ olur.

Yalnız bir gazete alanlar $23-9=14$ kişidir.

3. İngilizce bilenlerin kümesi İ, Almanca bilenlerin kümesi A olursa Venn şeması yandaki gibi olur. Gruptakilerin sayısı en az 13'tür.

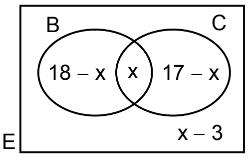


4. $s(R\cup M)=s(R)+s(M)-s(R\cup M)$.

$\Rightarrow s(R\cup M)=13+16-8\Rightarrow s(R\cup M)=21$ olur.

Kurslara gitmeyen öğrenci sayısı, $30-21=9$ dur.

5. Bisikleti olanların kümesi B, bilgisayarı olanların kümesi C olsun.



$s(B\cap C)=x$ dersek,

$s(B\cup C)=18-x+x+17-x=35-x$ ve bunlardan birine sahip olmayanların sayısı,

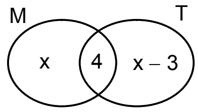
$s(B\cup C)'=32-(35-x)=x-3$ olur.

Şemadaki harfli ifadelere dikkat edilirse, $3\le x\le 17$ olacağı görülür.

a. En az 3'ünün;

b. En çok 17'sinin hem bisikleti hem bilgisayarı olabilir.

6. Verilen bilgiler yandaki Venn şemasına yüklenmiştir.

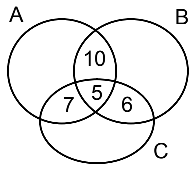


$s(M\cup T)=17$

$\Rightarrow X+4+X-3=17\Rightarrow X=8$ bulunur.

Yalnız matematikten kalan öğrenci sayısı 8'dir.

7. Verilen bilgiler Venn şemasına yüklenmiştir. Buna göre, yalnız İki dersten kalan öğrenci sayısı $10+7+6=23$ olur.



8. $s(İ)=s(M)+7,\ s(İ')=12$ dir.

$s(İ)+s(İ')=s(M)+s(M')=E$

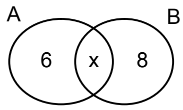
$\Rightarrow s(M)+7+12=s(M)+s(M')\Rightarrow s(M')=19$ olur.

9. $s(A\cup B)=3s(A\cap B)$

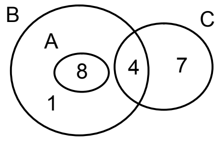
$\Rightarrow 6+x+8=3x$

$\Rightarrow x=7$ olur.

Grupta, $6+7+8=21$ kişi vardır.



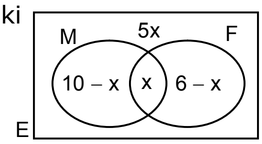
10. Verilenlere göre Venn şeması yandaki gibidir. Grup 20 kişidir.



11. $A'\cap B\cap G'\cap E$ veya $(B\cap E)-(A\cup G)$

12. $M'\cap A\cap E$ veya $(A\cap E)-M$

13. Verilen bilgiler yandaki Venn şemasına yüklenmiştir.

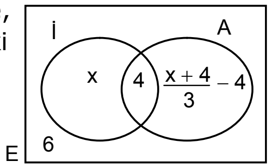


$s(E)=32$ olduğundan

$10-x+x+6-x+5x=32\Rightarrow x=4$ olur.

Yalnız matematikten kalan öğrenci sayısı 6'dır.

14. Verilen bilgilere göre, Venn şeması yandaki gibi olur.



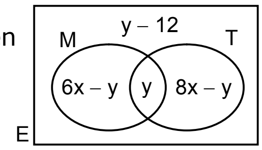
$s(E)=30$

olduğundan

$x+4+\frac{x+4}{3}-4+6=30 \Rightarrow x=17$ 'dir.

Yalnız İngilizce bilenler 17 kişidir.

15. Sınıftaki öğrenci sayısı 10x, iki dersten de başarılı olan öğrenci sayısı y ile gösterilerek Venn şeması yandaki gibi düzenlenir. $s(E)=10x$ olduğundan



$6x-y+y+8x-y+y-12=10x \Rightarrow x=3$ bulunur.

Sınıftaki öğrenci sayısı 30'dur. $y-12 \geq 0$ ve $6x-y \geq 0$ olacağı dikkate alınırsa $12 \leq y \leq 18$ olur.

İki dersten de başarılı olanların sayısı en çok 18 olabilir.

16. Kızların kümesi K, erkeklerin kümesi E, gözlüklülerin kümesi G, gözlüksüzlerin kümesi G′ olsun. Sınıftaki Öğrenci sayısına 10x, gözlüklü erkek sayısına y dersek Venn şeması yandaki gibi olur.

	G	G′
K	$3x-y$	$y+3$
E	y	$6x-y$

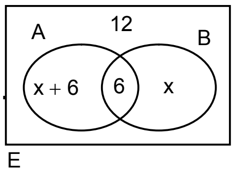
a. Sınıftaki öğrenci sayısı 10x olduğundan,

$10x=3x-y+y+3+y+6x-y$

$\Rightarrow x=3$ olur. Sınıftaki öğrenci sayısı 30'dur.

b. $y \geq 0$ ve $3x-y \geq 0$ olması gerektiğinden $0 \leq y \leq 9$ olur. Sınıftaki gözlüklü erkek öğrenci sayısı en çok 9'dur.

17. A gazetesini alanların kümesi A, B gazetesini alanların kümesi B, dairelerin kümesi E olsun. Yalnız B gazetesini alanların sayısına x dersek, şema yandaki gibi düzenlenir.

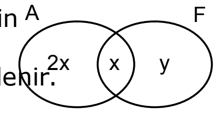


$s(E)=40$ olduğundan,

$x+6+6+x+12=40 \Rightarrow x=8$ bulunur.

A gazetesini alanların sayısı 20'dir.

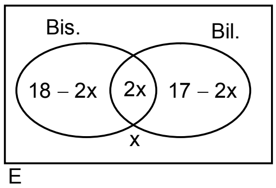
18. İki dili de bilenlerin sayısına x, yalnız Fransızca bilenlerin sayısına y diyerek Venn şeması yandaki gibi düzenlenir.



$$\left.\begin{array}{l} 2x+x=2(x+y)-2 \\ 2x+x+y=15 \end{array}\right\}$$

denklemlerinden $y=3$ bulunur.

19. Verilen bilgiler Venn şemasına yüklenmiştir.



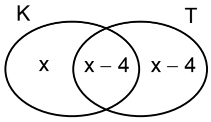
$s(E)=32$ olup

$18+17-2x+x=32$

$\Rightarrow x=3$

$\Rightarrow 2x=6$ bulunur.

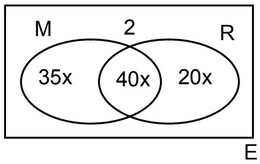
20. Verilen bilgiler Venn şemasına yüklenmiştir.



$x+x-4+x-4=28$

$\Rightarrow x=12$ bulunur.

21. Sınıftaki öğrenci sayısı 100x ile gösterilerek, verilen bilgiler şemaya yüklenir.

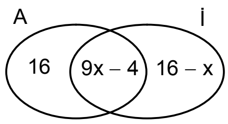


$35x+40x+20x+2=100x$

$\Rightarrow 5x=2$

$\Rightarrow 35x=14$ bulunur.

22. Kesirlerin paydaları eşitlenir.



$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$; $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$

Gruptaki kişi sayısı 12x ile gösterilerek, verilen bil-giler şemaya yüklenir.

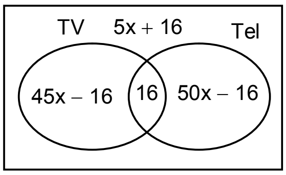
$16+9x-16+16-x=12x \Rightarrow x=4$

$\Rightarrow 16-x=12$ bulunur.

23. Alman erkeklerin sayısı x ile gösterilerek, verilen bilgiler şemaya yüklenir. Türk kadınların sayısı, Alman erkeklerin sayısından 1 fazladır.

	T	A
E		x
K	$x+1$	$8-x$

24. Ev sayısı 100x ile gösterilerek, verilen bilgiler şemaya yüklenir.



E

$50x - 45x = 4$

$\Rightarrow 5x = 4$

bulunur.

a. $100x = 80$ olur. **b.** $5x + 16 = 20$ olur.

25. Verilenlere dikkat edilirse; çözüm Venn şemasını gerektirmemektedir.

$s(A) = 20,\ s(B) = 23,\ s(C) = 27,\ s(A \cap B) = 12,$

$s(A \cap C) = 13,\ s(B \cap C) = 15$ ve

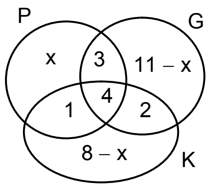
$s(A \cup B \cup C) = 40 - 2 = 38$ dir.

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

$\Rightarrow 38 = 20 + 23 + 27 - 12 - 13 - 15 + s(A \cap B \cap C)$

$\Rightarrow s(A \cap B \cap C) = 8$ bulunur.

26. Yalnız piyano çalanların sayısına x dersek, yalnız gitar çalanların sayısı $11 - x$; yalnız keman çalanların sayısı $8 - x$ olur.

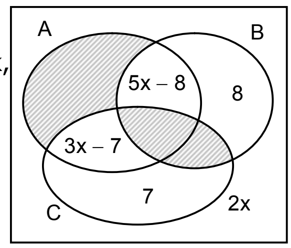


Gitar veya keman çalanların sayısı 19 olduğuna göre,

$8 - x + 1 + 4 + 2 + 3 + 11 - x = 19 \Rightarrow x = 5$ bulunur.

O hâlde, toplulukta 24 kişi vardır.

27. Sınıftaki öğrenci sayısı 10x ile gösterilip boş olan kümeler taranarak, verilen bilgiler tabloya yüklenir.



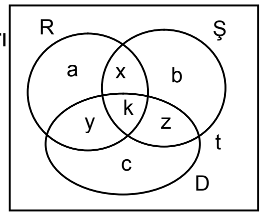
B dersinden kalanların sayısı, C dersinden kalanların sayısından 6 fazla olduğuna göre;

$5x - 3x = 6 \Rightarrow x = 3$ olur.

O hâlde; A dersinden kalanların sayısı,

$5x - 8 + 3x - 7 = 11$ dir.

28. Yandaki Venn şemasında küçük harfler, bulundukları bölgelere karşılık gelen kümelerin eleman sayılarını göstermektedir. Verilen bilgilere göre, Aşağıdaki denklemler yazılır.



$b + c + z + t = 16$ ① $a + b + c = 11$ ④

$a + c + y + t = 14$ ② $x + y + z + k = 13$ ⑤

$+\ a + b + x + t = 16$ ③

$2\underbrace{(a + b + c)}_{11} + x + x + z + 3t = 46$ ⑥

④ ve ⑥ dan $x + y + z + 3t = 24$ ⑦ ;

⑤ ve ⑦ den $3t - k = 11$ ⑧ elde edilir.

⑧ denkleminde k en az 1 olabileceğinden t de en az 4 olabilir.