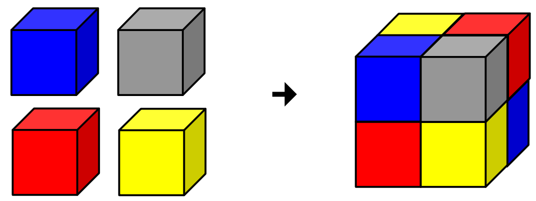
Örnek Problem



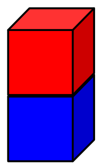
Belirli 4 farklı rengin her birinden istenilen sayıda birim küpleri bulunan Umut; belli bir konumda $2\times2\times2$ boyutlarında bir kübik katı cisim yapacaktır.

Umut, ortak yüzeyi bulunan birim küplerin farklı renklerde olmasını istemektedir.

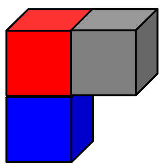
Umut, yapmak istediği kübik cismi kaç değişik renk sıralaması ile yapabilir?

A) 432 B) 588 C) 1176 D) 2940 E) 4216

Çözüm



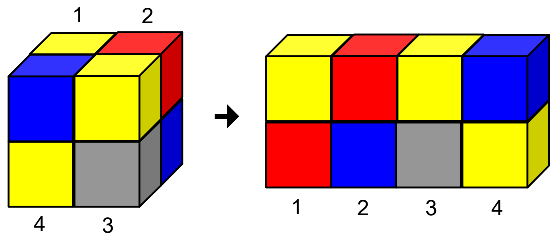
Yandaki $1\times1\times2$ prizmasında üstteki birim küp 4 renkten biri, alttaki 3 renkten biri olabilir.
$4\cdot3=12$ değişik renk sıralaması elde edilebilir.



Üstteki birim küpün sağına da 3 değişik renkten birim küp yapıştırılabilir.
Sağdaki birim küp sol alttaki ile farklı renkte ise altına konulacak 4. birim küp 2 değişik renkte, sağ üstteki ile sol alttaki aynı renkte ise 4. birim küp 3 değişik renkte olabilir. Sağdaki $1\times1\times2$ prizması $2\cdot2+1\cdot3=7$ değişik renk sıralaması ile eklenebilir.

$2\times2\times2$ küpünün arka yüzündeki $1\times1\times2$ düşey prizmalarını soldan sağa 1 ve 2 diye; ön yüzündeki düşey prizmaları sağdan sola 3 ve 4 diye adlandıralım.

$2\times2\times2$ küpünü aşağıdaki gibi açalım:



Farklı renkler A, B, C, D olsun.

1 prizmasının her değişik renk sıralaması için 2 ve 4 prizmalarının 7'şer değişik renk sıralaması olabilir.

$7\cdot7=49$ değişik renk sıralamasının her biri için, 3 prizmasının kaç değişik renk sıralaması ile seçilebileceğini bulacağız.

$\begin{bmatrix}A&B&&B\\B&A&&A\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}$ 7 değişik sıralama

$-\begin{bmatrix}A&B&&B\\B&C&&A\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A\\D\end{bmatrix},\begin{bmatrix}C\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\B\end{bmatrix}$ 5 değişik sıralama

$-\begin{bmatrix}A&B&&B\\B&D&&A\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix},\begin{bmatrix}C\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\C\end{bmatrix}$ 5 değişik sıralama

$-\begin{bmatrix}A&C&&B\\B&A&&A\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A\\D\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\C\end{bmatrix}$ 5 değişik sıralama

$-\begin{bmatrix}A&C&&B\\B&D&&A\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\C\end{bmatrix}$ 4 değişik sıralama

$-\begin{bmatrix}A&D&&B\\B&A&&A\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A\\D\end{bmatrix},\begin{bmatrix}C\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}$ 5 değişik sıralama

$-\begin{bmatrix}A&D&&B\\B&C&&A\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A\\D\end{bmatrix},\begin{bmatrix}C\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}$ 4 değişik sıralama

$\begin{bmatrix}A&&&B\\B&&&A\end{bmatrix}$ prizmaları ile başlayan değişik renk sıralamalarının sayısı, $7+4\cdot5+2\cdot4=35$ bulunur.

Aynı yolla; kalan 42 renk sıralamasını tamamlayacak değişik renk sıralamaları sayılır:

$\begin{bmatrix}A&B&&B\\B&A&&C\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}A&B&&B\\B&C&&C\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}A&B&&B\\B&D&&C\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}A&C&&B\\B&A&&C\end{bmatrix}-$

$\begin{bmatrix}A&C&&B\\B&D&&C\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}A&D&&B\\B&A&&C\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}A&D&&B\\B&C&&C\end{bmatrix}$

A			B
B			C

prizmaları ile başlayan değişik renk sıralamalarının sayısı,

$3\cdot5+7+2\cdot3+4=32$'dir.

A			B
B			D

prizmaları ile başlayan değişik renk sıralamalarının sayısı,

$3\cdot5+7+2\cdot3+4=32$'dir.

A			C
B			A

prizmaları ile başlayan değişik renk sıralamalarının sayısı,

$3\cdot5+7+2\cdot3+4=32$'dir.

A			C
B			D

prizmaları ile başlayan değişik renk sıralamalarının sayısı,

$4+2\cdot3+2\cdot5+7+2=29$'dur.

A			D
B			A

prizmaları ile başlayan değişik renk sıralamalarının sayısı,

$3\cdot5+4+2\cdot3+7=32$'dir.

A			D
B			C

prizmaları ile başlayan değişik renk sıralamalarının sayısı,

$4+2\cdot5+2\cdot3+2+7=29$'dur.

Buna göre; Umut yapmak istediği küpü,

$4\cdot3\cdot(35+4\cdot32+2\cdot29)=2652$

değişik renk sıralaması ile yapabilir?

Açıklama

Problemi kurarken, çözümün böyle uzun bir sayma işlemi gerektireceğini görememiştim.
Ancak; böyle bir saymanın da öğrenciye bir şeyler katacağını düşünüp, problemden vazgeçemedim.

Bu yolla, kısa diye düşündüğüm çözümün de yanlış olduğunu gösterebilmiş oldum.

Siz Çözünüz

1. 4 farklı rengin herbirinden istenilen sayıda birim küpleri bulunan Umut, belli bir konumda $2\times2\times2$ boyutlarında bir kübik katı cisim yapacaktır.

Umut, ortak yüzeyi bulunan birim küplerin farklı renklerde olmasını istemektedir.

Umut, 4 rengide kullanarak, yapmak istediği kübik cismi kaç değişik renk sıralaması ile yapabilir?

2. 3 farklı rengin herbirinden istenilen sayıda birim küpleri bulunan Umut, belli bir konumda $2\times2\times2$ boyutlarında bir kübik katı cisim yapacaktır.

Umut, ortak yüzeyi bulunan birim küplerin farklı renklerde olmasını istemektedir.

Umut, yalnız farklı iki renkli birim küpleri kullanarak, yapmak istediği kübik cismi kaç değişik renk sıralaması ile yapabilir?