0. satır 1
1. satır 1 1
2.satır 1 2 1
3.satır 1 3 3 1
4.satır 1 4 6 4 1
5.satır 1 5 10 10 5 1
6.satır 1 6 15 20 15 6 1
...

şeklindeki sayı tablosuna PASKAL ÜÇGENİ denir.

Tablo dikkatle incelenirse bazı özellikler hemen gözümüze çarpar.

1. *Her satır 1 ile başlayıp, 1 ile biter.*
2. *n. satırda (n+1) tane sayı vardır.*
3. *Her satır, tam ortasındaki sayıya ya da boşluğa göre simetriktir.*
4. *Her sayı, üstündeki iki sayının toplamına eşittir.*

Paskal Üçgeni bu haliyle gayet basit görünür.Ancak bu basit haline bakıp hiç bir işe yaramıyacağını sanmak, büyük gafletlik olur. Çünkü Paskal Üçgeninin matematik biliminde bir çok kullanım alanı vardır.

Şimdilik şu kadarını söyliyelim ki, bazen en karmaşık soruların çözümünde bile bize çok basit ve anlaşılır çözümler sunar. Bu yüzden Paskal Üçgeni matematik biliminin vazgeçilmez araçlarından biridir.

Şimdi biraz ayrıntıya inip, Paskal Üçgenin kullanıldığı alanlar üzerinde duralım.

paskal üçgeni ve kombinasyon

n elemanlı bir kümenin r≤n olmak üzere, r elemanlı alt kümelerinin herhangi birine n'in r'li bir kombinasyonu denir. n'in r'li kombinasyonları sayısı da

$$C(n,r)=n!/(n-r)!.r!$$

formülü ile bulunur.

Yani kombinasyon, alt kümedir.n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt küme sayısı da bu formülle bulunur.

örneğin, "5 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı kaç tane alt kümesi vardır?" sorusunun yanıtı C(5,2)=5!/3!.2!=10 dur. Bu 10 sayısı da Paskal üçgeninin 5. satırının 2. sutunundaki sayıdır. C(n,r) formülü ile hesaplanan tüm sayılar Paskal Üçgeninde vardır.Tersi de doğrudur. Yani Paskal üçgenindeki her sayı C(n,r) formülü ile ifade edilebilir.

Diğer bir deyişle Paskal üçgenindeki sayılar ile C(n,r) formülü hesaplanan sayılar birebir örtüşür.Bu yüzden Paskal Üçgeni şöyle de ifade edilebilir.

0.satır C(0,0)
1.satır C(1,0) C(1,1)
2.satır C(2,0) C(2,1) C(2,2)
3.satır C(3,0) C(3,1) C(3,2) C(3,3)
...

Bu tablo bize bir kümenin alt küme sayıları ile Paskal Üçgeni arasındaki ilişkiyi verir ve bu sayede kümelerin alt kümelerinin sayılarına ilişkin bazı özelliklerini basitçe ortaya koymamızı ve kümelerle ilgili soruları kolaylıkla çözmemizi sağlar. Yani Paskal Üçgeni, kümelerin alt küme sayılarını veren bir tablodur. Elimizde Paskal Üçgeni Sayı Tablosu olursa, alt küme sayıları ile ilgili problemleri işlem yapmadan çözebiliriz.

Kombinasyonun özellikleri şunlardır.

1. $C(n,0)=C(n,n)=1$
2. $C(n,1)=C(n,n-1)=n$
3. $C(n,2)=C(n,n-2)=n(n-1)/2$
4. $C(n,r)=C(n,n-r)$
5. $C(n,r)+C(n,r+1)=C(n+1,r+1)$
6. $C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+...+C(n,n)=2^n$

paskal üçgeni ve binom açılımı

Kombinasyon, özünde grup seçme demektir. "10 kişi arasından 4 kişilik bir grup kaç farklı şekilde seçilebilir?" sorusunun yanıtı 10 un 4 lü kombinasyonudur.

Peki... 10 kişi arasından 4 kişiyi seçince

7. $C(n,0)+C(n+1,1)+C(n+2,2)+...$
$+C(n+k,k)=C(n+k+1,k)$
8. $C(n,n)+C(n+1,n)+C(n+2,n)+...$
$+C(n+k+1,n+1)$

örnek 1: 9 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

örnek 2: 7 elemanlı bir kümenin en çok 3 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

örnek 3: 6 elemanlı bir kümenin en az 4 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

örnek 4: 3 elemanlı alt küme sayısı ile 5 elemanlı alt küme sayısı eşit olan kümenin 2 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

örnek 5: A={a,b,c,d,e,f} kümesinin alt kümelerinden kaç tanesinde;

1. *a elemanı vardır?*
2. *a elemanı yoktur?*
3. *a ve b elemanları vardır?*
4. *a ve b elemanları yoktur?*
5. *a veya b elemanları vardır?*
6. *a vardır,b yoktur?*

örnek 6: A={a,b,c,d,e,f,g,h} kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde;

1. *a elemanı vardır?*
2. *a elemanı yoktur?*
3. *a ve b elemanları vardır?*
4. *a ve b elemanları yoktur?*
5. *a veya b elemanları vardır?*
6. *a vardır, b yoktur?*

örnek 7: Aralarında Ali ve Veli'nin bulunduğu 9 kişi arasından Ali ve Veli'nin bulunacağı 5 kişilik bir grup kaç farklı şekilde seçilebilir?

geriye 6 kalmış ve onları seçmiş ya da belirlemiş olmaz mıyız? Elbette evet. Öyleyse 10 kişiden 4 kişi seçmek aslında 10 kişiyi 4 ve 6 kişilik 2 gruba ayırmak demektir.Seçilenler ve seçilmeyip kalanlar.

Şimdi kalanlara birinci grup, seçilenlere ikinci grup dersek, "10 kişilik grubu, 6 kişi birinci gruba, 4 kişi ikinci gruba olacak şekilde kaç değişik biçimde ayırabiliriz?" sorusunun yanıtı C(10,4) olur. Benzer biçimde,10 kişilik grubu 7 kişi birinciye, 3 kişi ikinciye olmak üzere C(10,3), 8 kişiyi birinciye, 2 kişiyi ikinciye olmak üzere C(10,2) kadar farklı biçimde ayırabiliriz.

Şimdi İlköğretimde öğrendiğimiz Binom açılımının genel terimini hatırlarsak $C(n,r).x^{n-r}.y^r$ *şeklinde idi. Bu ifadeyi şöyle yorumlarsak yanlış olmaz . y'ye seçilenler(ikinci grup), x'e kalanlar(birinci grup) dersek, birinci gruba (n-r) kişi, ikinci gruba r kişi olacak şekilde n kişiyi iki gruba C(n,r) kadar farklı şekilde seçilebiliriz.*

Binom Açılımı $(x+y)^n$ *ifadesinin pratik yolla açılımıdır. Şöyledir:*

$(x+y)^n=C(n,0)x^n+C(n,1)x^{n-1}y+$
$C(n,2)x^{n-2}y^2+....+C(n,n-1)xy^{n-1}+C(n,n)y^n$

Burada her terimin katsayısı C(n,n-r) şeklindedir ve Paskal Üçgeninin n. satırındaki sayılardır. n elemanlı bir kümenin elemanlarını iki farklı gruba kaç farklı şekilde ayırabileceğimizi gösterir. Tüm katsayıların toplamı 2^n *dir. Gerçekten de n farklı elemanı 2 farklı kutuya kaç farklı*

şekilde ayırabiliriz? sorusunun yanıtı saymanın çarpım ilkesine göre
1. elemanı koyabileceğimiz 2 farklı yer,
2. elemanı koyabileceğimiz 2 farklı yer,
...,
n. elemanı koyabileceğimiz 2 farklı yer olduğundan sorunun yanıtı n tane 2 nin çarpımı 2^n *olur.*

Binom Açılımının özellikleri şöyledir. Bu özellikler Paskal üçgeninin özelliklerinden farklı değildir. $(x+y)^n$ *nin açılımında;*

1. *(n+1) tane terim vardır.*
2. *Her terimin derecesi n dir.*
3. *Baştan (r+1). terim* $C(n,r)x^{n-r}y^r$ *şeklindedir.*
4. *Sondan k. terim, baştan (n+2-k). terimdir.*

Binom açılımı yapılırken terimler genellikle x'in azalan kuvvetlerine göre sıralı bir şekilde yapılır. Böylece bazı terimlerin unutulması engellenir.

örnek 2:

$\left(x^2-\dfrac{2}{x^3}\right)^{12}$ ifadesinin açılımında;

1. baştan 4. terim,
2. sondan 5 terim,
3. ortadaki terim,
4. sabit terim,
5. x^4 terim

nedir?

Özetlemek gerekirse $(x+y)^n$ *açılımı n farklı nesnenin 2 farklı kutuya kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini de gösterir. Örnek olarak 5 farklı nesne 2 farklı kutuya,* $(x+y)^5$ *in açılımını göz önünde bulundurarak;*

1. *5 tanesi birinci kutuda, 0 tanesi ikinci kutuda olmak üzere 1 farklı şekilde,*
2. *4 tanesi birinci kutuda, 1 tanesi ikinci kutuda olmak üzere 5 farklı şekilde*

Binom açılımının yukardan aşağıya doğru yazılımı, estetik görüntü açısından tercih edilebilir bir durumdur diye düşünüyorum.

Bir başka düşüncem de önce y'lerin yazılması yani açılımda terimlerin genel şekli
$C(n,r).y^r.x^{n-r}$
olması.

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Örnek 1: $(x+y)^5$ 'in açılımını yapınız. 5 kişiden 3 kişiyi A grubuna 2 kişiyi B grubuna kaç farklı şekilde ayırabiliriz söyleyiniz.

kutuda olmak üzere 5 farklı şekilde,

3. *3 tanesi birinci kutuda, 2 tanesi ikinci kutuda olmak üzere 10 farklı şekilde,*
4. *2 tanesi birinci kutuda, 3 tanesi ikinci kutuda olmak üzere 10 farklı şekilde,*
5. *1 tanesi birinci kutuda, 4 tanesi ikinci kutuda olmak üzere 5 farklı şekilde,*
6. *0 tanesi birinci kutuda, 5 tanesi ikinci kutuda olmak üzere 1 farklı şekilde konulabileceğinden toplam olarak $2^5=32$ farklı şekilde konulabilir.*

Eğer nesneler özdeş ise yani sorumuz 5 özdeş nesne 2 farklı kutuya kaç farklı şekilde konulabilir? şeklinde ise yanıtımız $(x+y)^5$ in açılımının terim sayısına, yani 6 ya eşit olur.

Biraz da $(x+y+z)^n$ nin açılımına bakalım. $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$ olduğunu hepimiz biliriz. Peki $(x+y+z)^3$ ün açılımı? Şimdiye kadar acaba kaç kişi $(x+y+z)^4$ veya $(x+y+z)^5$ in açılımını yapmıştır acaba? Sanırım çok değildir. Sayfalarca süren problemleri çözeriz de bu açılımları yapmak bizi sıkar. Kendi hesabıma söyliyeyim, ben hiç yapmadım.

Acaba bunun bir nedeni mi var? Neyse tüm cesaretimizi toplayıp başlayalım. Bakalım bitirebilecek miyiz?

$(x+y+z)^n$ açılımında $(x+y)$ yi birinci terim, z yi ikinci terim olarak seçip aynen $(x+y)^n$ nin açılımı gibi yapıyorum.

$(x+y+z)^3=(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y).z^2+z^3$

buraya kadar tamam. Sıkıntı burdan sonra başlıyor. Öyleyse burada biraz duralım.

Açılımda ilk terimde z yok. Öyleyse "$(x+y+z)^3$ açılımında z nin olmadığı terimlerin katsayıları toplamı kaçtır?" sorusunun yanıtı $(x+y)^3$ 'ün açılımından elde edeceğimiz katsayıların toplamına eşit olacaktır. Bu da $2^3=8$ olur. Bir başka yöntem $(x+y+z)^3$ de $x=y=1$, $z=0$ koyarız. İkinci terimde z, üçüncü terimde z^2 var. Öyleyse, $(x+y+z)^3$ açılımında z nin bulunduğu terimlerin katsayıları toplamını $3(x+y)^2$ ifadesinde $x=y=1$ koyarak 12, z^2 nin bulunduğu terimlerin katsayıları toplamını $3(x+y)$ ifadesinde $x=y=1$ koyarak 6 olarak bulabiliriz. Neyse devam edelim.

mi?....

Zor..... En iyisi bir başka yöntem bulalım. $(x+y)^n$ açılımını x'in azalan kuvvetlerine göre sıralıyorduk. Bunu nasıl sıralayacağız?...x' e göre mi? y'ye yoksa z'ye göre mi?... Hayır sıralanmıyor. Öyleyse düzlemsel!.

$(x+y+z)^3=$ x^3
$3x^2y+3x^2z$

şeklinde. 1'ler üçgen, 3'ler altıgen veya çember gibi görünüyor. ortada 6 var. Bu hızla devam.

$(x+y+z)^4=$ x^4
$4x^3y+4x^3z$
$6x^2y^2+12x^2yz+6x^2z^2$
$4xy^3+12xy^2z+12xyz^2+4xz^3$
$y^4+4y^3z+6y^2z^2+4yz^3+z^4$

katsayıları

1
4 4
6 12 6
4 12 12 4
1 4 6 4 1

şeklinde. Her satırda terim sayısı bir artıyor. son satırda 5 terim var. Öyleyse $(x+y)^4$ açılımında terim sayısı $1+2+3+4+5=15$ terim var. Genelleştirirsek $(x+y)^n$ açılımındaki terim sayısı $1+2+3+...+(n+1)=(n+1).(n+2)/2$ olur.

Örnek 1: 4 farklı nesneyi birinci kutuya 1, ikinci kutuya 2, üçüncü kutuya 1 tane olmak üzere kaç farklı şekilde koyabiliriz? yanıt:12

örnek 2: 4 farklı nesneyi, 3 farklı kutuya, birinci kutuda 1 tane olma koşulu ile kaç farklı şekilde koyabiliriz? yanıt: $4+12+12+4=32$

örnek 3: 4 farklı nesneyi, 3 farklı kutuya kaç farklı şekilde koyabiliriz? yanıt: $(x+y+z)^4$ ün açılımının katsayılar toplamı kadar. yani $(1+1+1)^4=3^4=81$ farklı şakilde. Ya da çarpım ilkesine göre 3^4 şekilde deriz.

örnek 4: 4 özdeş nesneyi, 3 farklı kutuya kaç farklı şekilde koyabiliriz? yanıt: $(x+y+z)^4$ ün

$3xy^2+6xyz+3xz^2$

$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$

Başardım. Böylesi daha kolay ve estetik.
Katsayılar

1
3 3
3 6 3
1 3 3 1

terim sayısı kadar. yani 5.6/2=15

soru: "4 özdeş nesneyi, 3 özdeş kutuya kaç farklı şekilde yerleştirebiliriz? " sorusunun yanıtı $(x+y+z)^4$ ün açılımında, katsayılarda kaç farklı sayı varsa o kadar desek olur mu? soruda 4 tane görünüyor.

5. kuvveti açmaya sabrım yetmez ama katsayıları yazabilirim sanıyorum.

$(x+y+z)^5$ in açılımının katsayıları

1
5 5
10 20 10
10 30 30 10
5 20 30 20 5
1 5 10 10 5 1

$(x+y+z)^6$ nın açılımının katsayıları

1
6 6
15 30 15
20 60 60 20
15 60 90 60 15
6 30 60 60 30 6
1 6 15 20 15 6 1

artık bu tablolar yardımı ile bazı sorulara daha kolay yanıt bulabiliriz.

Artık $(x+y+z)^n$ açılımına daha genel olarak bakabiliriz.

soru: $(x+y+z)^{12}$ 'nun açılımında $x^6y^4z^2$ li terimin katsayısı kaçtır?

Çözüm: $(x+y)$ ye birinci terim, z ' ye ikinci terim dersek, z^2 li terim,

$C(12,2).(x+y)^{10}z^2$ *olur.*

burada da $(x+y)^{10}$ da y^4 lü terim,

$C(12,2).C(10,4).x^6.y^4.z^2$ *bulunur.*

Öyleyse $x^6.y^4.z^2$ lü terimin katsayısı

$C(12,2).C(10,4)$ *olur. İşlemleri yaparsak 12!/6!.4!.2! bulunur.*

Genelleştirirsek; $(x+y+z)^n$ 'nin açılımında a+b+c=n olmak üzere, $x^ay^bz^c$ li terimin katsayısı n!/a!.b!.c! olur. Bu sonuç bize yabancı değil. TEKRARLI PERMÜTASYON.

Bu ne demektir? Yanıt: Tekrarlı permütasyon, kombinasyondan elde edilir. Tekrarlı permütasyon formülü ile hesaplanan sayılar, Paskal Üçgenindeki sayıların çarpımı ile bulunabilir.

Aslında tekrarlı permütasyon formülünü a+b+c=n olmak üzere, n!/a!.b!.c! şeklinde yazmak yerine (a+b+c)!/a!.b!.c! şeklinde yazmak bence daha uygun.Bu durumda kombinasyonlar da C(a+b,a)=C(a+b,b)=(a+b)!/a!.b! şeklinde olurdu.

Örnek 1: a+b+c =n olmak üzere n!/a!.b!.c! şeklinde kaç tane tekrarlı permütasyon vardır ve bunların toplamı kaçtır?

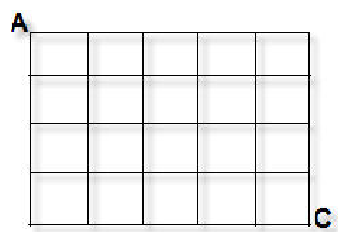
yanıt: $(x+y+z)^n$ nin açılımındaki terimlerin katsayıları, a+b+c=n olmak üzere, n!/a!.b!.c! şeklinde olduğundan, $(x+y+z)^n$ açılımının terim sayısı kadar tekrarlı permütasyon vardır ve bunların toplamı 3^n dir.

$(x+y+z+t)^n$ açılımını yapmak, hem zaman hem de yer açısından sanırım burada mümkün olmayacak. Birbirinden eşit uzaklıkta 4 nokta bulmam gerekiyor. Bu da düzlemde mümkün değil. Bir düzgün dörtyüzlü de kolay olurdu.

x,y,z,t yi birer nokta kabul edersek;
iki nokta bir doğru belirlediğinden $(x+y)^n$ açılımı doğrusal, 3 nokta düzlem belirlediğinden $(x+y+z)^n$ açılımı düzlemsel, 4 nokta 3 boyutlu uzayı belirlediğinden $(x+y+z+t)^n$ açılımı 3 boyutlu oluyor.(!)
bööö. ne tespit ama...

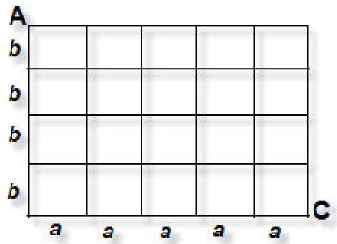
paskal üçgeni ve tekrarlı permütasyon

Bu kouya bir soru ile girelim.
soru:



Şekilde çizgiler üzerinden giderek A dan C ye en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidilebilir?

Çözüm 1:



A dan C ye en kısa yoldan gidebilmesi için 4 tane b, 5 tane a birim yol gitmesi gerekir. En kısa yolların sayısı özdeş 4 tane b ile özdeş 5 tane a nın sıralanışları kadardır.

tekrarlı permütasyondan 9!/4!.5!=126 bulunur.

Çözüm 2: A dan C ye en kısa yoldan gitme kombinasyonla bulunabilir. Sorunun yanıtı C(9,4)=9!/4!.5!=126 olur.

Çözüm 3: Şekil üzerinde her kavşağa en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidilebileceği adım adım hesaplanarak bulunabilir. Şekildeki sayılar o kavşağa en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidilebileceğini gösterir.

Dikkatle bakılırsa bu sayıların Paskal üçgenini oluşturduğu görülür. Paskal üçgeni burada da karşımıza çıkıyor.

Öyleyse Paskal üçeni sayıları tekrarlı permütasyonla da bulunabilir. Burada şunu da belirtmek gerekiyor. Zaten iki cins farklı nesnenin bulunduğu nesnelerin sıralamasında tekrarlı permütasyon, kombinasyonla aynıdır.

biraz da fantazi

PASKAL ÜÇGENİ VE TOPLAM SEMBOLÜ

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad \sum_{k=0}^{1} C(k,0) \quad 1$$

$$1 \quad \sum_{k=0}^{2} C(k,0) \quad \sum_{k=1}^{2} C(k,1) \quad 1$$

$$1 \quad \sum_{k=0}^{3} C(k,0) \quad \sum_{k=1}^{3} C(k,1) \quad \sum_{k=2}^{3} C(k,2) \quad 1$$

$$1 \quad \sum_{k=0}^{4} C(k,0) \quad \sum_{k=1}^{4} C(k,1) \quad \sum_{k=2}^{4} C(k,2) \quad \sum_{k=3}^{4} C(k,3) \quad 1$$

....

PASKAL ÜÇGENİ VE ÇARPIM SEMBOLÜ

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad \prod_{k=1}^{1}\frac{k+1}{k} \quad 1$$

$$1 \quad \prod_{k=1}^{2}\frac{k-1}{k} \quad \prod_{k=1}^{1}\frac{k-2}{k} \quad 1$$

$$1 \quad \prod_{k=1}^{3}\frac{k+1}{k} \quad \prod_{k=1}^{2}\frac{k-2}{k} \quad \prod_{k=1}^{1}\frac{k+3}{k} \quad 1$$

$$1 \quad \prod_{k=1}^{4}\frac{k-1}{k} \quad \prod_{k=1}^{3}\frac{k+2}{k} \quad \prod_{k=1}^{3}\frac{k+3}{k} \quad \prod_{k=1}^{1}\frac{k+4}{k} \quad 1$$

$$1 \quad \prod_{k=1}^{5}\frac{k-1}{k} \quad \prod_{k=1}^{4}\frac{k+2}{k} \quad \prod_{k=1}^{3}\frac{k+3}{k} \quad \prod_{k=1}^{2}\frac{k+4}{k} \quad \prod_{k=1}^{1}\frac{k-5}{k} \quad 1$$

....

rasimZENCİR

Paskal üçgeni, acaba integralle de oluşturulabilir mi?