Problem-1

$2 < x < 5$ ve $-6 < y < 4$ olmak üzere,

$T = xy + y^2$ ifadesinin alabileceği değerlerin kümesini bulunuz.

Çözüm

$T = g(x, y) = y^2 + xy$ iki değişkenli fonksiyonunda $y = x$ ve $x = a$ dönüşümleri ile; verilen fonksiyonu, a parametresi ile değişen, x'e göre ikinci dereceden bir fonksiyona dönüştürelim.

Problem şu biçime dönüşür:

"$a \in (2,5)$ bir parametre olmak üzere;

$f : (-6,4) \to R;\ f(x) = x^2 + ax$

fonksiyonlarının en geniş görüntü kümelerini kapsayan en dar kümeyi bulunuz."

f fonksiyonlarına ait noktalar a'nın sınır değerleri ile elde edilen $f_1(x) = x^2 + 2x$ parabolü ile $f_2(x) = x^2 + 5x$ parabolünün sınırladığı bölgede bulunurlar.

$r = -a/2$, parabollerin tepe noktalarının apsisleridir. Bu noktaların ordinatları da

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\cdot\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} \text{ olur.}$$

a parametresinin en büyük sınır değeri olan 5 için $f(x)$ en küçük değerini alır.

$f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4}$ ve $-6 < -\frac{5}{2} < 4$ olduğundan

$f(x) > -\frac{25}{4}$ olur.

En büyük değer f_1 ve f_2 üzerinde aranır. $f_1(-6) = -8$, $f_1(4) = 24$, $f_2(-6) = 6$ ve $f_2(4) = 36$ olup $f(x)$'in en büyük değerinin 36 olduğu görülür.

$-25/4 < x^2 + ax < 36$ elde edilir.

Verilen sembollerle; $xy + y^2$ değerlerinin kümesi $(-25/4, 36)$ olur.

Problem-2

$-2 < a < 3$ ve $-1 < b < 2$ olmak üzere,

$T = ab - 2b^2$ ifadesinin alabileceği değerlerin kümesini bulunuz.

Çözüm

$b = x$ dönüşümü yapalım. a değişkenini de bir parametreye karşılık getirelim.

$T = -2b^2 + ab$ ifadesinin alabileceği değerlerin kümesini bulma problemi,

"$a \in (-2,3)$ bir parametre olmak üzere;

$f : (-1,2) \to R;\ f(x) = -2x^2 + ax$

fonksiyonlarının en geniş görüntü kümelerini kapsayan en dar kümeyi bulunuz."

problemine dönüşür.

f fonksiyonlarının grafiklerine ait noktalar a'nın sınır değerleri ile elde edilen $f_1(x) = -2x^2 - 2x$ ve $f_2(x) = -2x^2 + 3x$ parabollerinin sınırladığı bölgede bulunurlar.

$r = a/4$, parabollerin tepe noktalarının apsisleridir. Bu noktaların ordinatları da

$$f\left(\frac{a}{4}\right) = -2\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^2 + a\cdot\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a^2}{8} \text{ olur.}$$

a parametresinin en büyük sınır değeri olan 3 için, $f(x)$ en büyük değerini alır.

$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{8}$ ve $-1 < \frac{3}{4} < 2$ olduğundan

$f(x) < \frac{9}{8}$ olur.

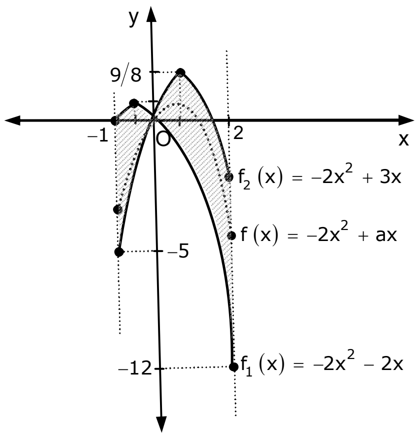
En küçük değer f_1 ve f_2 üzerinde aranır. $f_1(-1) = 0$, $f_1(2) = -12$, $f_2(-1) = -5$ ve $f_2(2) = -2$ olup $f(x)$'in en küçük değerinin -12 olduğu görülür.

$-12 < -2x^2 + ax < 9/8$ elde edilir.

Verilen sembollerle; $ab - 2b^2$ değerlerinin kümesi $(-12, 9/8)$ olur.

$f:(-1,2)\rightarrow R;\ f(x)=-2x^2+ax$

fonksiyonlarının grafiklerinin taradığı bölge şekilde gösterilmiştir.



Problem-3

$2<x<5$ ve $-4<y<6$ olmak üzere,

$T=2xy+y^2$ ifadesinin değer alabileceği en geniş aralığı bulunuz.

Çözüm

$x=a$ ve $y=x$ dönüşümü yapalım.

a değişkenini de bir parametreye karşılık getirelim.

$T=2xy+y^2$ ifadesinin alabileceği değerlerin kümesini bulma problemi,

"$a\in(2,5)$ bir parametre olmak üzere;

$f:(-4,6)\rightarrow R;\ f(x)=x^2+2ax$

fonksiyonlarının en geniş görüntü kümelerini kapsayan en dar kümeyi bulunuz."

problemine dönüşür.

f fonksiyonlarının grafiklerine ait noktalar a'nın sınır değerleri ile elde edilen $f_1(x)=x^2+4x$ ve $f_2(x)=x^2+10x$ parabollerinin sınırladığı bölgede bulunurlar.

$r=-a$, parabollerin tepe noktalarının apsisleridir. Bu noktaların ordinatları da $f(-a)=-a^2$ olur.

a parametresinin en büyük sınır değeri olan 5 için, $f(-5)=-25$ olup, $f(x)$ en küçük değerini alır.

Ancak; -5 değeri f fonksiyonlarının tanım kümesinde değildir.

Bu durumda, f fonksiyonlarının en küçük ve en büyük değerleri f_1 ve f_2 sınır fonksiyonlarının, tanım aralığının uçlarında aldığı değerlerden olmalıdır.

$f_1(-4)=0$, $f_1(6)=60$, $f_2(-4)=-24$ ve $f_2(6)=96$'dır.

Buradan, $-24<x^2+2ax<96$ elde edilir.

Verilen sembollerle; $2xy+y^2$ değerlerinin kümesi $(-24,96)$ olur.

Problem-4

$-2\le x\le 3$ ve $3\le y<5$ olmak üzere,

$T=x^2+yx$ ifadesinin değer alabileceği en geniş aralığı bulunuz.

Çözüm

$y=a$ dönüşümü yapalım. a değişkenini de bir parametreye karşılık getirelim.

Problem,

"$a\in(3,5)$ bir parametre olmak üzere;

$f:(-2,3)\rightarrow R;\ f(x)=x^2+ax$

fonksiyonlarının en geniş görüntü kümelerini kapsayan en dar kümeyi bulunuz."

problemine dönüşür.

Çözüm, problem-3'tekinin aynısı olur.

$f_1(x)=x^2+3x$, $f_2(x)=x^2+5x$

$f_1(-2)=-2$, $f_1(3)=18$, $f_2(-2)=-6$ ve $f_2(3)=24$'tür.

Buradan, $-6<x^2+ax<24$ elde edilir.

Verilen sembollerle; x^2+yx değerlerinin kümesi $(-6,24)$ olur.