Üreteç fonksiyonlar

RASİM ZENCİR

Özel koşullar altında kombinasyon(seçme) ve permütasyon(sıralama) problemlerinin çözme tekniklerini veren fonksiyonlardır.

a_r belli bir işleme göre r tane nesnenin seçilme sayısı ise,

$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_r x^r$

şeklinde tanımlanan fonksiyona üreteç fonksiyonu denir. g(x) fonksiyonu sonsuz terimli ise kuvvet serisidir.

Örneğin $f(x)=(x+y)^n$ şeklindeki fonksiyonlar üreteç fonksiyonlardır.

Şimdi bu fonksiyonları biraz daha yakından inceleyelim. Örneğin,

$(x+y)^3=(x+y)(x+y)(x+y)=(xx+xy+yx+yy)(x+y)$
$=(xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy)$

olduğunu biliyoruz. Burada $xxx=x^3$ tür. x^3 ün katsayısı bir olduğundan 3 tane x, bir şekilde sıralanabilir anlamına gelir.

$xxy+xyx+yxx=3x^2y$ eşitliğinin birinci tarafındaki üç terimde de iki tane x ve bir tane y vardır. Farklı şekilde sıralanmışlardır ve çarpmanın değişme özelliğine göre de birbirlerine denktir. Bu yüzden bunların toplamı $3x^2y$ olur. Katsayısı olan 3, iki tane x ile bir tane y nin sıralanışları sayısıdır.

Benzer şekilde $xyy+yxy+yyx=3xy^2$ ifadesindeki 3 de bir tane x ile iki tane y nin 3 farklı şekilde sıralanabileceğini gösterir. Bu durumda yukarıdaki işlemin sonucu $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ biçiminde ifade edilir.

Üreteç fonksiyonlarda bir terimin katsayısı, o terimdeki değişkenlerin kaç farklı şekilde sıralanabileceğinin sayısını verir.

Genel olarak, $(x+y)^n$ nin açılımında baştan (r+1). terim $(n,r).x^{n-r}.y^r$ şeklinde idi. Burada baştan (r+1). terimin katsayısı olan (n,r) ifadesi n'nin r'li kombinasyonunu gösterir ve r tane özdeş y nesnesi ile (n-r) tane özdeş x nesnesinin farklı sıralanışları sayısını yani tekrarlı permütasyonunu verir.

Bu sayı aynı zamanda n tane farklı elamandan r tanesini kaç farklı şekilde seçebileceğimizin sayısıdır.

Terimlerinin katsayısı 1 olan polinom fonksiyonların çarpımında ortaya çıkan x^r li terimlerin katsayıları da bize sıralama sorularının çözümlerini gösterir. Yani bu tür polinom fonksiyonlar da üreteç fonksiyonlardır.

Örneğin $(1+x+x^2)^4$ açılımındaki x^5 li terimin katsayısı, dört kutuda 4 farklı renkten ikişer tane top varsa 5 tanesini kaç farklı şekilde seçebileceğimizi veya 5 özdeş nesneyi her birine en fazla 2 tane nesne koymak koşulu ile 4 farklı kutuya kaç farklı şekilde koyabileceğimizin sayısını verir.

$(1+x+x^2+x^3+\ldots)^3$ açılımında x^r li terimin katsayısı, r tane özdeş nesneyi koşulsuz olarak 3 farklı kutuya kaç farklı şekilde koyabileceğimizin sayısını veya 3 farklı kutuda 3 farklı renkte istenildiği kadar top içersinden r tanesini kaç farklı seçebileceğimizin sayısını verir.

$(x^2+x^3+x^4+\ldots)^5$ açılımında x^{15} li terimin katsayısı, 15 özdeş nesneyi 5 kutuya, her birinde en az 2 tane olma koşulu ile kaç farklı şekilde dağıtabileceğimizin sayısını verir.

$(x^2+x^3+x^4+\ldots+x^9)^3$ açılımında x^{18} li terimin katsayısı 18 özdeş nesnenin 3 kutuya her birine en az 2, en çok 9 tane koyma koşulu ile kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini gösterir.

Aşağıdaki soruların çözümlerini veren üreteç fonksiyonları yazınız.

1. *Birinci kutuda en fazla 3, ikinci kutuda en fazla 4, üçüncü kutuda en fazla 12 tane olma koşulu ile 13 özdeş topu bu 3 kutuya kaç farklı şekilde koyabiliriz?*
2. *20 özdeş top, 3 kutuya her birinde 2 den çok, 10 dan az olmak koşulu ile kaç farklı şekilde konulabilir?*
3. *Her birine en fazla 2 tane olmak üzere 7 özdeş top 5 farklı kutuya kaç farklı şekilde konulabilir?*

Şimdi de üreteç fonksiyonlarda x^r li terimlerin katsayılarını bulmayı ya da yukardaki problemleri nasıl çözeceğimizi görelim.

$(1-x)(1+x)=1-x^2$ (iki kare farkı)

$(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$ (iki küp farkı)

$(1-x)(1+x+x^2+x^3)=1-x^4$

………………………..

$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1})=1-x^n$

$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1})=(1-x^n)/(1-x)$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1})^k=(1-x^n)^k/(1-x)^k$

olur. Burada $|x|<1$ için ve n sonsuza giderse

$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=1/(1-x)$ ifadesini elde ederiz. Bu özdeşliğin birinci türevi

$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=1/(1-x)^2$

İkinci türevini alırsak

$1+3x+3.2x^2+\ldots+n.(n-1)/2.x^{n-2}+\ldots=1/(1-x)^3$

Devam edersek,

$1+(n,1)x+(n+1,2)x^2+(n+2,3)x^3+\ldots+(n-1+r,r)x^r = 1/(1-x)^n$

Eşitliği elde edilir. Bu son bulduğumuz eşitlik

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)^n$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{r} x^r$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{r} x^r$$

şeklinde ifade edilebilir.

Diğer yandan

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)^n$$

Ifadesinin açlımında x^r li terimin katsayısı

$\binom{r+n-1}{r}$ *olur.*

Ilerde kullanılacağı için aşağıdaki katsayı hesaplamalarını da bilmek yararlı olur.

$$(x+y)^n = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0}} \left[\frac{n!}{i!.j!}\right] x^j y^i$$

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k\geq 0}} \left[\frac{n!}{i!.j!.k!}\right] x^j y^i z^k$$

ÖRNEKLER

1. *$(x^4+x^5+x^6+\ldots)^4$ ifadesinin açılımında x^{22} li terimin katsayısı kaçtır?*

ÇÖZÜM:

$(x^4+x^5+x^6+\ldots)^4 = [x^4(1+x+x^2+x^3+\ldots)]^4$

$= x^{16}.(1+x+x^2+x^3+\ldots)^4$

olduğundan $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^4$ *ifadesindeki* x^6 *li terimin katsayısı aradığımız katsayı olur. O da n=4, r=6 olduğundan C(9,6) olur.*

2. *r tane özdeş nesne n tane farklı kutuya kaç farklı şekilde dağıtılabilir?*

   ÇÖZÜM:

   Sorunun çözümü $(1+x+x^2+\ldots)^n$ *ifadesinin açılımında* x^r *li terimin katsayısıdır. O da C(r+n-1,r) dir.*

3. *Farklı renklerdeki üç zar atılıyor. Üste gelen sayıların toplamının 14 olması kaç farklı şekilde gerçekleşir?*

   ÇÖZÜM:

   $(x+x^2+\ldots+x^6)^3$ *açılımındaki* x^{14} *lü terimin katsayısı soruluyor.*

   $x^{3.}(1+x+x^2+\ldots+x^5)^3 = x^3(1-x^6)^3/(1-x)^3$

   $=(13,2)-3(7,2)$ *olur.*

ÇİKOLATA SORULARI

1.Yukardaki 6 özdeş dilim çikolata 3 kişi arasında herbirine en az bir dilim olmak koşulu ile kaç farklı şekilde paylaştırılabilir?

Çözüm: 3 kişiye paylaştırılacaksa 2 yerinden kırmak yeterlidir. Arada kırılacak 5 yer olduğundan 5 yerin 2 sini seçmek yeterlidir.

2. x+y+z=6 denkleminin sayma sayılarda kaç farklı çözümü vardır?

Cevap: soru bir önceki sorunun bir başka şekilde ifade edilmiş halidir. Cevabı (5,2)=10 dur.

3. 6 dilim özdeş çikolata 3 kişi arasında koşulsuz olarak kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

Çözüm: bazıları hiç çikolata almayabilir anlamına geliyor. Bu durumda kırılacak yerleri sadece aralardan değil yanlardan da seçebileceğiz anlamına gelir. Bu durumda 6 tane dilim çikolota ile 2 kırılacak yerin tekrarlı permütasyonu demektir. Yani yanıt (8,2)=28 olur.

4 x+y+z =6 denkleminin doğal sayılarda kaç farklı çözümü vardır?

Çözüm: soru bir önceki sorunun bir başka şekilde ifade edilmiş halidir. Yani yanıt 28 dir.

5 $(x+y+z)^6$ *ifadesinin açılımında kaç terim vardır?*

Çözüm: bu ifadenin açılımında her terim

$x^a y^b z^c$ *(a+b+c=6) şekildedir. a,b,c doğal sayılar olacağından yanıt (8,2)=28 dir.*

DÜZGÜN ÇOKGENLERİN SİMETRİLERİ

Simetri merkezi etrafında dönme

n kenarlı bir düzgün çokgeni merkezi(çevrel veya iç teğet çemberin merkezi) etrafında $(360/n)^0$ veya katları kadar döndürecek olursak, ilk halinin aynısını elde ederiz. Bunlara dönmekten kaynaklanan simetrileri denir.

Örneğin eşkenar üçgende 120^0, 240^0 ,360^0 ,karede 90^0 , 180^0, 270^0 , 360^0 düzgün beşgende $72^{0,}$ 144^0, 216^0, 288^0 ,360^0lik dönüşler simetri dönüşleridir.

n kenarlı bir çokgenin n tane dönüşten kaynaklanan simetrisi vardır.

Simetri ekseni etrafında çevirme

Düzgün çokgenleri simetri eksenleri etrafında 180^0 çevirdiğimizde ilk hallerinin aynısını elde ederiz bunlara çevirmekten kaynaklanan simetrileri denir.

n kenarlı bir düzgün çokgenin n tane çevirmekten kaynaklanan simetrisi vardır.

Bir düzgün çokgenin simetrileri köşelerinin birer permütasyonudur.Örneğin ABCD karesinde 90^0 lik dönme simetrisi A yı B ye, B yi C ye, C yi D ye, D yi A ya götürür. Bunu şöyle gösteririz.

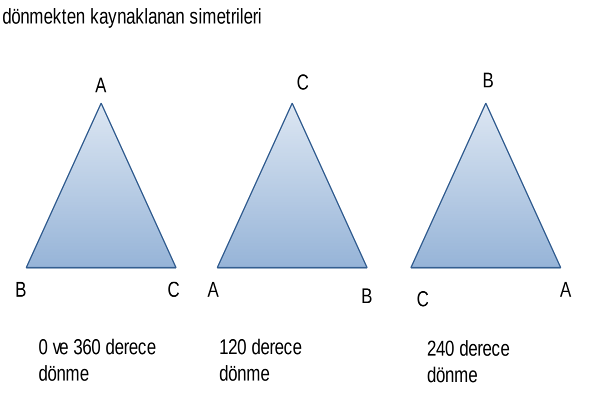
$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ veya (ABCD) .

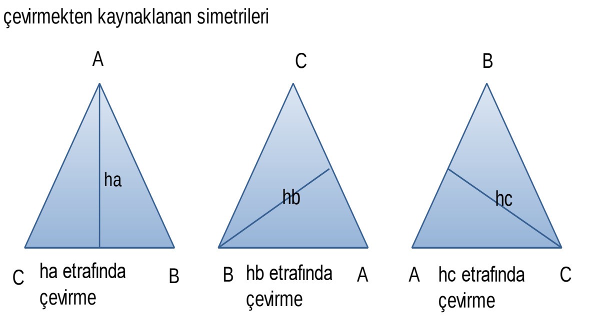
(ABCD) ifadesine 4 uzunluklu dairesel permütasyon veya çevrim denir.

$$(ABCD) = \begin{pmatrix} ABCD \\ BCDA \end{pmatrix}$$

Şeklinde de gösterilebilir.

EŞKENAR ÜÇGENİN SİMETRİLERİ





Başlangıçtaki konumu ABC

120^0 dönmüş konumu CAB

240^0 dönmüş konumu BCA

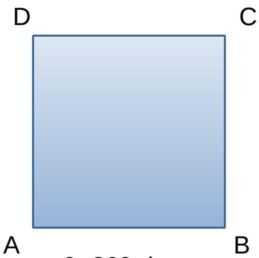
360^0 dönmüş konumu ABC

h_a etrafında çevrilmiş konumu ACB

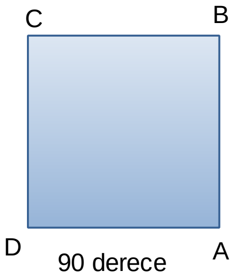
h_b etrafında çevrilmiş konumu CBA

h_c etrafında çevrilmiş konumu BAC

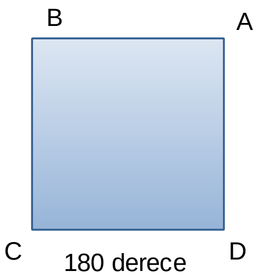
KARENİN SİMETRİLERİ



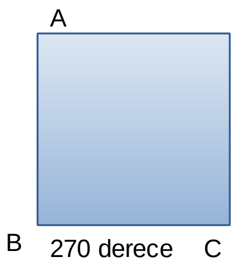
0 -360 derece dönme



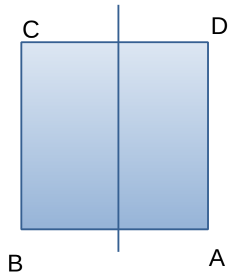
90 derece dönme



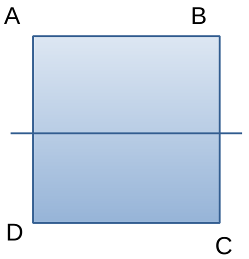
180 derece dönme



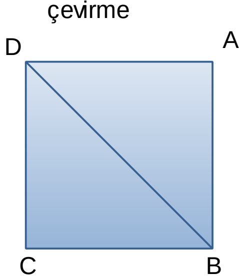
270 derece dönme



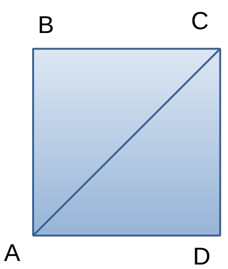
düşey eksen etrafında çevirme



yatay eksen etrafında çevirme



köşegen etrafında çevirme



diğer köşegen üzerinde çevirme

karenin 4 tane dönmeden kaynaklı, 4 tane de çevirmeden kaynaklı olmak üzere toplam 8 tane simetrisi vardır.

Düzgün çokgenlerin her simetrisi aslında bir permütasyon fonksiyondur. Her permütasyon fonksiyon da bir çevrimdir. Her çevrimin alt çevrimlerinden de bahsedebiliriz. Örneğin, (ABCD) çevriminin (AB)(CD), (AC)(BD), (ABC)(D), (A)(B)(C)(D) gibi alt çevrimleri vardır.

Bu durumu düzgün beşgenin simetrilerinde görmeye çalışalım.

Dönüş (derece)	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*çevrimler (ABCDE)*
0	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*(A)(B)(C)(D)(E)*
72	*B*	*C*	*D*	*E*	*A*	*(ABCDE)*
144	*C*	*D*	*E*	*A*	*B*	*(ACEBD)*
216	*D*	*E*	*A*	*B*	*C*	*(ADBEC)*
288	*E*	*A*	*B*	*C*	*D*	*(AEDCB)*

Çevirme 180^0	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*çevrimler (ABCDE)*
H_a etrafı	*A*	*E*	*D*	*C*	*B*	*(A)(BE)(CD)*
H_b etrafı	*C*	*B*	*A*	*E*	*D*	*(AC)(B)(DE)*
H_C etrafı	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*	*(AE)(BD)(C)*
H_D etrafı	*B*	*A*	*E*	*D*	*C*	*(AB)(CE)(D)*
H_E etrafı	*D*	*C*	*B*	*A*	*E*	*(AD)(BC)(E)*

Düzgün beşgende, dönüş simetrilerinde 0-360 derecelik dönüşte bir uzunluklu 5 çevrim, diğer dönüş simetrilerinde 5 uzunluklu bir çevrim var. Çevirme simetrilerinde ise iki tane 2 uzunluklu ile bir tane bir uzunluklu çevrim var.

Düzgün altıgendeki dönüş simetrileri de şöyle.

(ABCDEF)	A	B	C	D	E	F
(A)(B)(C)(D)(D)(F)	A	B	C	D	E	F
(ABCDEF)	B	C	D	E	F	A
(ACE)(BDF)	C	D	E	F	A	B
(AD)(BE)(CF)	D	E	F	A	B	C
(AEC)(BFD)	E	F	A	B	C	D
(AFEDCB)	F	A	B	C	D	E

Tablolarda görüldüğü gibi düzgün çokgenlerin simetrilerini çevrimlerle, çevrimleri de üreteç fonksiyonlarla ifade edebiliriz.

(A) çevrimini ,

1. *bir değişkenli* $f_1=x$
2. *iki değişkenli* $f_1=(x+y)$
3. *üç değişkenli* $f_1=(x+y+z)$,

(AB) çevrimini,

1. *bir değişkenli* $f_2=x^2$
2. *iki değişkenli* $f_2=(x^2+y^2)$
3. *üç değişkenli* $f_2=(x^2+y^2+z^2)$

.(ABC) çevrimini,

1. *bir değişkenli* $f_3=x^3$
2. *iki değişkenli* $f_3=(x^3+y^3)$
3. *üç değişkeni* $f_3=(x^3+y^3+z^3)$

(ABCD….) k uzunluklu çevrimi,

1. *bir değişkenli* $f_k=x^k$
2. *iki değişkenli* $f_k=(x^k+y^k)$
3. *üç değişkenli* $f_k=(x^k+y^k+z^k)$

biçiminde yazarız.

Yandaki tabloda

ikinci satırdaki çevrimi f_1^6,

üçüncü satırdaki çevrimi f_6 ,

dördüncü satırdaki çevrimi f_3^2,

beşinci satırdaki çevrimi f_2^3 ,

altıncı satırdaki çevrimi f_3^2

yedinci satırdaki çevrimi f_6

şeklinde yazabiliriz. Tüm bunların toplamını 6 ile bölersek yani

$$P=\frac{f_1^6+f_2^3+2.f_3^2+2.f_6}{6}$$

denklemine çevrim göstergesi denir.

çevrim göstergesi soruların çözümünde çok önemlidir

Tereddüte yer vermemek için bir de karenin simetrilerini inceleyip çevrim göstergesini yazalım.

DÖNÜŞ	A	B	C	D	(ABCD)
360^0	A	B	C	D	(A)(B)(C)(D)
90^0	B	C	D	A	(ABCD)
180^0	C	D	A	B	(AC)(BD)
270^0	D	A	B	C	(ADCB)

$$P=\frac{f_1^4+f_2^2+2.f_4}{4}$$ *(Dönüşler için)*

çevirme	A	B	C	D	
Düşey	B	A	D	C	(AB)(CD)

eksen					
Yatay eksen	D	C	B	A	(AD)(BC)
1.köşegen	C	B	A	D	(AC)(B)(D)
2.köşegen	A	D	C	B	(A)(BD)(C)

$$P=\frac{2f_1^2.f_2+2.f_2^2}{4}$$ *(çevirmeler için)*

Hem dönme hem de çevirmeler için hepsinin toplamını alırız. Yani,

$$P=\frac{f_1^4+2.f_1^2.f_2+3.f_2^2+2.f_4}{8}$$

(hem dönme hem de çevirme için)

olur.

Şerit boyama sorularında Çevirme veya dönme göstergesini,

yuvarlak masa sorularında dönme göstergesini,

kolye veya tesbih sorularında hem dönme hem de çevirme göstergesini kullanırız

ÖZDEŞ NESNELERİN SIRALANMASI VE POLYA TEOREMİ

1-ŞERİT BOYAMA PROBLEMLERİ

K	M	B	M	K

Yukarıda 5 dilimli bir şerit verilmiştir. Her diliminin arkalı önlü renklerinin aynı olduğunu varsayalım. Bu durumda simetri merkezine göre (ki ortadaki dilimin tam ortasıdır) dönüşler ile simetri eksenine(kırmızı çizgi) göre çevirme aynı sonuçları verir. Arka tarafı boyalı değil ise problemin sonucu değişmez. üç boyutta dönme ve çevirme aynı işlem gibi değerlendirilebileceğinden sonuçlarda değişiklik olmaz. Bu durumda n dilimli bir şerit k sayıda renkle kaç farklı şekilde boyanabilir sorusunun yanıtı

$$\frac{k^n+k^{\left\|\frac{(n+1)}{2}\right\|}}{2} \quad (\| \ \|, \text{ tamdeğer })$$

formülü ile bulunabilir.

Örnek 1.

5 dilimli şerit, 2 renkle kaç farklı şekilde boyanabilir?

Çözüm: verilen değerleri formülde yerine yazarsak

(2^5+2^3)/2 =20 olur

Örnek 2.

2 dilimli şerit 5 renkle kaç farklı şekilde boyanabilir?

Çözüm: verilen değerleri formülde yerine yazarsak

$(5^2+5)/2=15$ bulunur.

Formül, simetrik durumların sayısına, simetrik olmayan durumların yarısının eklenmesi mantığına dayanıyor.

n dilimli bir şerit k tane renkle boyanacaksa simetrik durum sayısı,
n=2m ise k^m
n=2m+1 ise $k^{[(m+1)/2]}$ dır.

Örnek:

6 dilimli bir şerit 2 renkle kaç farklı şekilde boyanabilir?

Çözüm 1.

Formülden $(2^6+2^3)/2=36$ bulunur.

Çözüm 2.

Simetrik durum sayısı 2^3,

Tüm durumlar sayısı, her dilim 2 renge de boyanabileceği için 2^6,

Simetrik olmayan durumların sayısı 2^6-2^3

Boyama sayısı=simetrik durum sayısı+(simetrik olmayan durum sayısı)/2

olduğundan

Boyama sayısı=$2^3+(2^6-2^3)/2=8+28=36$ olur.

Çözüm 3. (polya teoreminden)

6 dilimli bir şeritin 2 simetrisi vardır. 180^0 ve 360^0 . her dilime a,b,c,.. diye isim verirsek

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	
a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*(a)(b)(c)(d)* *(e)(f)*
f	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*	*(af)(be)(cd)*

Not:şeritlerde her zaman iki simetri vardır.

Çevrim göstergesi $p=\dfrac{f_1^6+f_2^3}{2}$ *ve*

Üreteç fonksiyonu 2 renk olduğu için 2 değişkenli olacağından

$$g(x,y)=\frac{(x+y)^6+(x^2+y^2)^3}{2}$$

şeklinde olur. Bize bu fonksiyonun katsayılar toplamı sorulduğu için x=y=1 yazarsak

yanıt g(1,1)=36 bulunur.

g(x,y) fonksiyonunun $x^{(6-k)}.y^k$ li teriminin katsayısı, 6 dilimin k tanesi y renginden, (6-k) tanesi de x renginden olmak üzere kaç farklı şekilde boyanabileceğinin sayısıdır.

Örnek.

a) 5 dilimli bir şerit 3 renkle kaç farklı şekilde boyanabilir?

b)2 dilimi kırmızı, 2dilimi mavi, 1 dilimi yeşil ile kaç farklı şekilde boyanabilir?

Çözüm:

a)1.formülden $(3^5+3^3)/2=270/2=135$ olur.

2.polya ile

a	b	c	d	e	
a	b	c	d	e	(a)(b)(c)(d)(e)
e	d	c	b	a	(ae)(bd)(c)

$$p = \frac{f_1^5 + f_1 . f_2^2}{2}$$

$$g(x,y,z) = \frac{(x+y+z)^5 + (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)^2}{2}$$

Buradan g(1,1,1)=135 bulunur.

b) 5 dilim 2 dilim kırmızı,2 dilim mavi, 1 dilim yeşil olacak şekilde boyanacaksa 2 tane simetrik durum vardır. KMYMK, MKYKM.

Tüm durumar sayısı 5!/2!.2!=30

Simetrik olmayan durumlar sayısı=30-2=28

Boyama sayısı=2+28/2=16 olur.

2.yol olarak ta yukarıdaki üreteç fonksiyonunda x^2y^2z li terimin katsayısı sorunun yanıtı olacaktır. Biraz zahmetli de olsa onun da 16 çıkacağını söyleyebiliriz. ☺

2.YUVARLAK MASA PROBLEMLERİ

Düzgün çokgenlerin köşeleri çevrel çemberi üzerinde olduğundan yuvarlak masa problemleri aslında düzgün çokgenin köşelerini boyama sorusuna dönüşür. Yuvarlak masalar yere sabitlendiği için dönme dönüşümleri uygulanır fakat çevirme dönüşümleri uygulanmaz.

Konumuzu bir soru ile açıklamaya çalışalım.

Soru:

yuvarlak masa etrafındaki sabit 5 sandalye 2 renge kaç farklı şekilde boyanabilir?

Çözüm:

Sandalyeler masa etrafında bir düzgün beşgenin köşeleri üzerinde olacaktır. Bunlara A,B,C,D,E dersek dönme simetrileri,

A	B	C	D	E	
A	B	C	D	E	(A)(B)(C)(D)(E)
B	C	D	E	A	(ABCDE)
C	D	E	A	B	(ACEBD)
D	E	A	B	C	(ADBEC)
E	A	B	C	D	(AEDCB)

şeklindedir. Çevrim göstergesi ve üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$P = \frac{f_1^5 + 4.f_5}{5},$$

$$g(x,y) = \frac{(x+y)^5 + 4.(x^5+y^5)}{5}$$ olur.

g(1,1)=8 bulunur.

Soru. 3 mavi, 2 kırmızı sandalye ile yuvarlak masa etrafında kaç farklı renk sıralaması yapılabilir?

Çözüm:

Beşgende 2 renk üreteç fonksiyonu

$$g(x,y) = \frac{(x+y)^5 + 4.(x^5+y^5)}{5}$$

olduğundan x^3y^2 li terimin katsayısını arıyoruz.

O da (5,2)=2 dir.

Soru:

4 siyah, 1 beyaz,1 mavi bilye dairesel olarak kaç farklı şekilde sıralanabilir?

Çözüm:

Çevrim göstergesi

$$P = \frac{f_1^6 + f_2^3 + 2.f_3^2 + 2.f_6}{6}$$

ve üreteç fonksiyonu

$g(x,y,z)=[(x+y+z)^6+(x^2+y^2+z^2)^3+2(x^3+y^3+z^3)^2$

$+2.(x^6+y^6+z^6)]\ /\ 6$

olur

Bu fonksiyonda x^4yz li terimin katsayısı soruluyor. Bu çarpan da ilk parantezden gelir. O da 6!/4!.6= 5 olur.

KOLYE PROBLEMLERİ

Kolyeleri, boncukları halka şeklinde dizerek oluşturduğumuzdan hem dairesel sıralama hem de çevirme söz konusudur. Tam burada tesbihimizi alıp parmaklarımız arasında çeviriyoruz. ☺ eğer tesbihin dedesi(imame de deniyormuş) yoksa tam bizim bahsettiğimiz türden bir kolye sayılabilir. Neyse konuyu yine bir örnekle açıklamaya çalışalım.

Soru:

3 renkten 4 boncukla, renk sıralaması açısından kaç değişik halka şeklinde kolye oluşturulabilir?

Çözüm:

4 boncuk olduğu için karenin simetrilerini alıyoruz. Ardından çevrim göstergesi ve üreteç fonksiyonlarını yazıyoruz.

A	B	C	D	
A	B	C	D	(A)(B)(C)(D)
B	C	D	A	(ABCD)
C	D	A	B	(AC)(BD)
D	A	B	C	(ADCB)
B	A	D	C	(AB)(CD)
D	C	B	A	(AD)(BC)
C	B	A	D	(AC)(B)(D)
A	D	C	B	(A)(BD)(C)

$P=[f_1^4+2.f_1^2.f_2+3.f_2^2+2.f_4] / 8$

3 renk olduğu için üreteç fonksiyonumuz 3 değişkenli olacak.

$g(x,y,z,)=[(x+y+z)^4+2.(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)+3(x^2+y^2+z^2)^2+2(x^4+y^4+z^4)]\ / 8$

$g(1,1,1)=[81+2.9.3+3.9+2.3] /8$

$g(1,1,1)=168/8=21$ *olur.*

Soru:

2 sarı, 1 beyaz, 1 kırmızı boncukla halka biçiminde, renk sıralaması açısından kaç farklı kolye oluşturulabilir?

Çözüm:

Bir önceki sorunun verilerinden yararlanacak olursak

$g(x,y,z,)=[(x+y+z)^4+2.(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)+3(x^2+y^2+z^2)^2+2(x^4+y^4+z^4)]\ / 8$

fonksiyonunda x^2yz li terimin katsayısı soruluyor demektir. O da birinci terimden 12 tane ikinci terimden 4 tane x^2yz geleceğinden toplam 16 olur. Onu da 8 e bölersek yanıt 2 olarak bulunur.

Görülüyor ki, kolye problerini çözmek baya zahmetli bir iş. Parmakla saymak her zamanki gibi en pratik yol. Ama sadece sayılar küçük ise. ☺

En güzeli, bu konuyu biliyor olmanın rahatlığı ile bu konuyla fazla uğraşmamak. :b

Bu konu ile ilgili soruları soruyu soran çözsün. Bu karda, kışta bir de bunlarla uğraşamam.

HAZIRLAYAN:RASİM ZENCİR

2012-DENİZLİ