

olasılık

Bir olayın veya deneyin, nasıl gelişeceği veya nasıl sonuçlanacağı hakkında tahmin yapmak ya da sağlıklı bir öngöründe bulunmak, hayatımızı şekillendirmede çok önemlidir. Çoğu zaman öngörülerimiz başarı veya başarısızlığımızın temel nedenidir. Çünkü kararlarımızı öngörülerimiz doğrultusunda veririz. Vereceğimiz kararlar her açıdan bizi şekillendirir. Tahmin ve öngörülerini doğru olan insanlar “ileri görüşlü insanlar” diye nitelendirilirler.

Tahmin ve öngörülerini bilimsel anlamda doğru yapabilmenin yolu olasılık konusunu iyi bilmekten geçer. Bu açıdan son yıllarda tüm dünyada bu konuya daha çok önem vermeye başlanmıştır. Temel kavramların anlaşılması konunun öğrenilmesi açısından çok önemlidir.

deney

Tekrarlanabilen işlemlere deney denir. Tekrarlanabiliyor olması önemlidir. Çünkü tekrarlanamıyorsa deney değildir. Konumuz gereği zar atma, torbadan bilye çekme, bir desteden bir kağıt çekme, madeni para atma gibi deneylerle ilgileneceğiz. Bu tür deneylere basit deneyler denir. Deneyin basit olması basitce yapılmasından değil, bir tane

olmasından kaynaklanır. İki veya daha fazla basit deneyin birleştirilerek bir deney şekline getirilmesine bileşik deney denir. Örneğin bir zar ile bir madeni para atma deneyi, bir bileşik deneydir. İki zar atma deneyi de bir bileşik deneydir.

100 tane madeni paranın aynı anda atılması deneyi, 100 tane basit deneyin birleşiminden oluşmuş bir bileşik (bileşik) deneydir.

örnek nokta ve örnek uzay(evrensel küme)

Bir deney sonucunda ortaya çıkabilecek durumların her birine örnek nokta denir(çıktı). Örnek noktaların hepsine yapılan deneyin örnek uzayı, örnek noktaların oluşturduğu kümeye de kümenin evrensel kümesi denir.

Basit deneylerde örnek noktalar, gelebilecek durumlardır ve bu durumlar en basit şekilde ifade edilirler. Örneğin madeni para atma deneyinde yazı gelmesi Y ile, tura gelmesi T ile gösterilir. Örnek noktalar harflerle gösterilebildiği gibi, rakamlarla hatta diğer bazı sembollerle de gösterilebilir. Bazı deneylerin örnek noktaları küme olabilir.

Bazı deneylerde örnek noktalar eş olabilir. Örneğin bir zarın üç yüzü kırmızı, iki yüzü mavi, kalan bir yüzü de sarı boyalı ise bu zarı attığımızda kırmızı gelecek üç örnek noktası, mavi gelecek iki örnek noktası bir de sarı gelecek bir örnek noktası olacaktır. Bu zarla yapacağımız deneyin örnek uzayı $[K,K,K,M,M,S]$, evrensel kümesi de $E=\{K,M,S\}$ şeklinde olur. Eğer deneyin örnek noktaları hep farklı ise, deneyin örnek uzayı ve evrensel kümesi aynı elemanlardan oluşur.

İki basit deneyden oluşmuş bileşik deneylerde örnek noktalar, iki deneyin de örnek noktalarını kapsayacak şekilde sıralı ikililer, üç basit deneyden oluşmuş bileşik deneylerin örnek noktaları sıralı üçlüler ve benzer şekilde n deneyden oluşmuş bileşik deneylerin örnek noktaları sıralı n lilerden oluşur. böylece tüm deneylerin örnek noktaları ifade edilmiş olur.

İki deneyden birincisinin n tane örnek noktası, ikincisinin m tane örnek noktası varsa bu deneylerin birleşiminden oluşmuş birleşik deneyin $n.m$ tane örnek noktası olur. Yani birleşik deneyin örnek uzayı $m.n$ elemanlıdır.

Benzer mantıkla k tane basit deneyden oluşmuş bileşik deneyin örnek uzayının eleman sayısı, basit deneylerin örnek uzaylarının eleman sayıları çarpımına eşittir.

Örnek olarak, zar atma deneylerinde bir zar atma deneyinin örnek uzayı 6 elemanlı olduğundan, iki zar atma deneyinin örnek uzayı 36, üç zar atma deneyinin örnek uzayı 216 elemanlıdır.

Madeni para atma deneylerinde, bir para atma deneyinde 2 örnek nokta (dik gelirse diyenler olur her zaman. Evet gelebilir. Matematik açısından mümkündür. Dik gelirse problem çok karmaşık olur ve yeni verilere ihtiyaç vardır. bu yüzden ihmal edilir.) iki para atma deneyinde 4, üç para atma deneyinde 8, n para atma deneyinde 2^n tane örnek nokta vardır.

Bir madeni para ile bir zar atma deneyinde 12 örnek nokta vardır.

Peki gelelim şimdi özdeş nesnelere. Özdeş nesnelere yapılan deneylerde nelere dikkat etmeliyiz? Özdeş nesnelere yapılan deneylerde sonuçlar nasıl etkilenir?

Herakleitos, aynı nehirde iki kere yıkanılmaz demiş. Bu yüzden somut nesnelere özdeşlik olmaz. Özdeşlik soyut kavramlardadır daha çok.

İki zar atıldığında zarların özdeş(eş) ya da benzer olması örnek noktaları ve örnek noktaların sayısını değiştirmez. Bu yüzden zarların özdeşliği zar deneylerinde etkili değildir. tavla oynarken zarlar genellikle birbirinin

eşidir. Bu yüzden özdeş gibi yorumlanabilir. (Tavla farklı zarlarla oynanabilse bile eş zarlarla oynandığında zevkli olur. ☺) yine de 36 örnek nokta vardır. Zarlar özdeş de olsa, farklı da olsa evrensel küme değişmediği gibi üstte gelen sayılar toplamının 7 olması olasılığı da değişmez.

İki tane madeni bir liralık atma deneyinde örnek noktalar (T,T), (T,Y),(Y,T),(Y,Y) dır. Madeni bir liralıklar değişik sorularda özdeş olarak kabul edilir. Peki madeni bir liralık ile madeni 50 kuruşluk atsak örnek noktalar değişir mi ya da farklı olur mu? Hayır.

Önemli olan deneyde kullanılan nesnelere değil, deneyde ortaya çıkabilecek durumlar(örnek noktalar)dır.

Yani zarlar özdeş de olsa, farklı da olsa altı, altı geldi mi, paraları götürdün demektir.

hilesiz deneyler

Bir deneyde ortaya çıkabilecek durumların(örnek noktaların) hepsinin gerçekleşme olasılıkları eşit ise bu deneyin örnek uzayına eşit olasılıklı örnek uzay denir. Eşit olasılıklı örnek uzaya sahip deneyler hilesiz deney olarak adlandırılırlar. Diğerleri de hileli deneylerdir. Yani hileli deneylerin örnek noktaların gerçekleşme olasılıkları eşit değildir.

Peki bu nasıl olur veya deneyin hilesiz olması nasıl sağlanır?

Bu elbette deneyine göre değişir. Örneğin zar atma deneyinin hilesiz olması için zarın küp şeklinde ve homojen bir maddeden yapılmış olması gerekir. Madeni paranın silindirik şeklinde olması yüksekliğinin de fazla olmaması istenir.

Bir deste 52 kağıdı ile oynanan oyunların hilesiz olabilmesi için 52 kağıdın da eş olması gerekir. Bu yüzden kağıtların arka yüzleri hep aynıdır.

20 kişilik bir sınıftan bir kişi seçme deneyinin hilesiz olabilmesi için, seçimi nasıl yapmak gerekir? Çünkü kişilerin boyları, kiloları, ten renkleri, tipleri hep farklıdır.

Hileli veya hilesiz tüm deneylerde tüm örnek noktaların gerçekleşme olasılıkları toplamı 1 dir.

olay

Örneğin, hilesiz bir zarda 6 tane örnek nokta vardır. Her örnek noktanın olasılığı aynıdır. Bu olasılığa x dersek, 6 örnek noktanın olasılıkları toplamı $6x$ olur. Bu toplam 1' e eşit olması gerektiğinden $6x=1$ ve buradan da $x=1/6$ olur.

Bir başka örnek, üç kişinin katıldığı bir yarışmada ikincinin kazanma olasılığı birincinin 3 katı, üçüncünün kazanma olasılığı da ikincinin 2 katıdır. Buna göre herbirinin kazanma olasılıkları kaçtır?

Birincinin kazanma olasılığına x dersek, ikincinin $3x$, üçüncünün de $6x$ olur. Hepsinin toplamı 1 olması gerektiğinden $x+3x+6x=1$, $10x=1$, $x=1/10$ bulunur. Buradan birinci $x=1/10$, ikinci $3x=3/10$, üçüncü $6x=6/10$ bulunur.

Bir deneyin örnek uzayının (evrensel kümesinin) elemanlarından oluşturabileceğimiz alt kümelerine bu deneyde tanımlayabileceğimiz olaylar denir.

Boş kümeyi imkansız olay, örnek uzayın kümesine de kesin olay diye tanımlarız.

Bu arada ayrık alt kümelere de ayrık olaylar demekle bir sakınca yoktur.

Bir madeni para atma deneyinde örnek uzayı(evrensel küme) E ile gösterecek olursak $E=\{Y,T\}$ olduğundan alt kümeleri,

1) $\{ \}$ boş küme ,

imkansız olay, paranın 5 gelmesi gibi,

2) $\{Y\}$ alt kümesi, paranın yazı gelmesi olayı,

3) $\{T\}$ alt kümesi, paranın tura gelmesi olayı,

4) $\{T,Y\}$ alt kümesi, paranın yazı veya tura gelmesi. Buna kesin olay denir. Yani para atma deneyinde bu olay mutlaka gerçekleşir. Çünkü para ya yazı, ya da tura gelecektir. (dik gelmesini ihmal etmiştik.)

Bu da gösteriyor ki, bir deneyin örnek noktalarının sayısı, o deneyde tanımlayabileceğimiz olay sayısını belirler. n tane örnek noktası olan bir deneyde 2^n tane olay tanımlanabilir.

Bir zar atma deneyinde 6 örnek nokta, $2^6=64$ tane olay tanımlanabilir.

olasılık fonksiyonu

Bir deneyde tanımlayabileceğimiz olayların kümesi E_A ise bu kümenin elemanlarını $[0,1]$ aralığındaki sayılara eşleyen fonksiyona olasılık fonksiyonu denir.

Olasılık fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$1-P(E_A)=1, P(\emptyset)=0$$

$$2-A \in E_A, 0 \leq P(A) \leq 1$$

3- A ve B olayları ayrık olaylar ise

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$4-P(A') = 1 - P(A)$$

Hilesiz bir deneyde $A \in E_A$ olmak üzere herhangi bir A olayın olma olasılığı

$$P(A) = \frac{A \text{ nin eleman sayısı}}{\text{evrensel kümenin eleman sayısı}}$$

Formülü ile hesaplanır.