R den R ye tanımlanmış f(x) ve g(x) polinom fonksiyonları için

$$f(x)=g(x)$$

eşitliği her $x \in R$ için geçerli ise bu fonksiyonlara eş fonksiyonlar denir.

Bazen da, bu eşitlik sadece bir kaç x değeri için geçerlidir. Bu durumda da, bu x değerleri f(x) ve g(x) fonksiyonlarının ortak noktalarıdır.

"İki fonksiyonun ortak noktalarını bulmak için ortak çözüm yapılır ".

Yani f(x)=g(x) denkleminin kökleri , fonksiyonların ortak noktaları olur.

Çok önemli bir not daha; eğer bu kökler çift katlı kök ise grafikler birbirlerine teğettirler, tek katlı kök ise grafikler birbirlerini keserler

Bu bilgiler bazı soruları kolaylıkla çözmemizi sağlar.

Örneğin, $f(x)=x^2$ fonksiyonu ile $g(x)=2x-1$ fonksiyonlarının ortak noktalarını bulalım.

$x^2=2x-1$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$ (çift katlı kök.)

iki fonksiyon x=1 noktasında teğet. Ya da f(x) fonksiyonunun x=1 deki teğeti g(x) fonksiyonudur denir.

f(x) ikinci dereceden polinom fonksiyon olmak üzere,

f(x)=g(x) denkleminden

$f(x)-g(x)=(x-a)^2=0$ denklemini elde edebiliyorsak f(x) in x=a daki teğeti g(x) fonksiyonudur diyebiliriz. Öyleyse

$g(x)=f(x)-(x-a)^2$ dir.

Örnek:

$f(x)=x^2-3x-5$ fonksiyonunun x=4 teki teğetinin denklemi nedir?

Yanıt:

$g(x)= x^2 -3x-5 -(x-4)^2$

$g(x)=x^2-3x-5-x^2+8x-16$

$g(x)=5x-21$ bulunur.

Örnek:

$f(x)=2x^2-4x+5$ parabolünün x=3 teki teğetinin denklemi nedir?

Yanıt:

$g(x)=2x^2-4x+5-2(x-3)^2$

$g(x)=2x^2-4x+5-2x^2+12x-18$

$g(x)=8x-13$

örnek:

$f(x)=x^2-3x-3$ fonksiyonunun x=2 deki teğetinin denklemini bulunuz.

Yanıt:

$g(x)=x^2-3x-3-(x-2)^2$

$g(x)=x-7$ bulunur.

Türev yardımı ile 2. Yol

$f(2)=2^2-3.2-3=-5$

$f'(x)=2x-3$

$f'(2)=4-3=1=m$

$y+5=(x-2)$

$y=x-7$ bulunur.

Örnek:

A(2,3) noktasından $f(x)=x^2$ parabolüne çizilen teğetlerin değme noktalarının koordinatlarını bulunuz.

Yanıt:

Noktalardan birine $B(a,a^2)$ diyelim.

Teğet denklemi

$g(x)=x^2-(x-a)^2$

$g(x)=2ax-a^2$

A(2,3) noktası g(x) i sağlar.

$3=4a-a^2$

$a^2-4a+3=0$

a=1 ve a=3 ve aranan noktalar

(1,1), (3,9) olur.

Örnek:

$y=x^2+4$ parabolünun hangi noktasındaki teğetleri orijinden geçer?

Yanıt:

aranan nokta a olsun.

$g(x)=x^2+4-(x-a)^2=2ax+4-a^2$

orijinin koordinatlarını sağlar.

$0=4-a^2$

a=2, a=-2 ve

(-2,8), (2,8) bulunur.

Örnek:

$y=x^3$ fonksiyonun grafiğindeki A(2,8) noktasından çizilen teğet eğriyi başka bir B noktasında kesiyor. B noktasının apsisi kaçtır?

Yanıt:

B nin apsisi c olsun. Teğet denklemi

$g(x)=x^3 - (x-2)^2.(x-c)$ şeklindedir.

$g(x)=(4+c)x^2 - (4c+4)x +4c$ denkleminde x^2 li terim olmamalıdır.

Bu yüzden c=-4 olur.

Örnek:

$y=mx - [(m-2)^2/4]$ doğrularının teğet olduğu parabolün denklemi nedir?

Yanıt:

Parabolün denklemi f(x) olsun.

$f(x) - mx +[(m-2)^2/4]= 0$ ifadesi tam kare olmalı. Sabit terim (m-2) nin yarısının karesi olduğundan

$f(x)-mx+[(m-2)^2/4]=[x-(m-2)/2]^2$ olmalı. Buradan

$f(x)= x^2+2x$ bulunur.

Şimdi işin biraz eğlence tarafına bakalım. Madem ki

$f(x)-g(x)=(x-a)^2$

yazabiliyoruz. Buradan f(x) i yalnız bırakırsak,

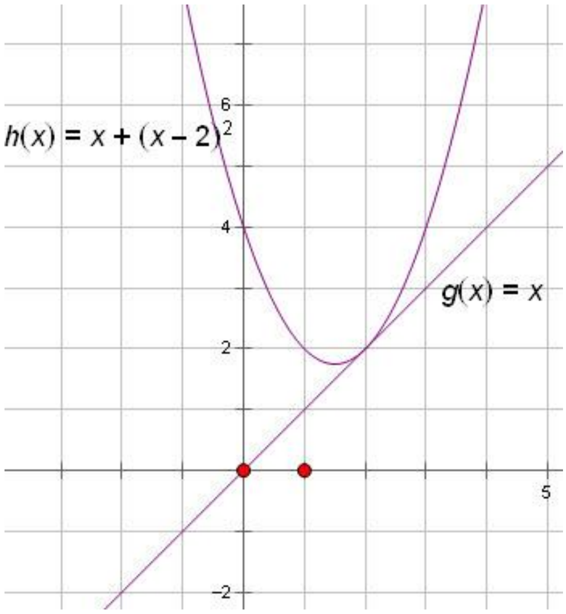
$h(x)=g(x)+(x-a)^2$

denklemini elde ederiz. Bu da bazı ilginç fonksiyonların kurallarının yazımında bize kolaylık sağlar.

Örneğin, y=x doğrusuna x=2 de teğet olan parabolün denklemi

$h(x)=x+(x-2)^2$

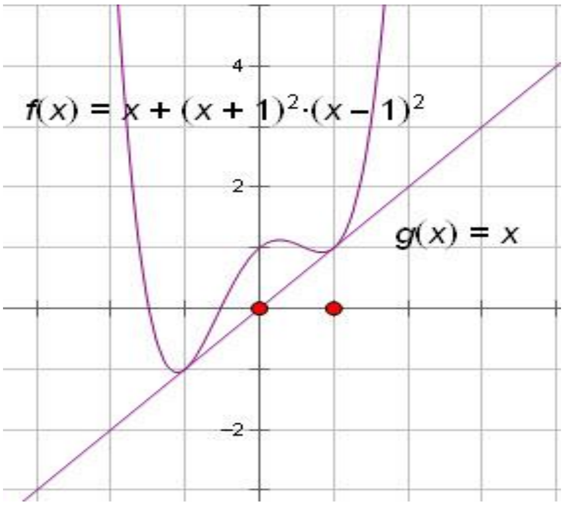
olur.



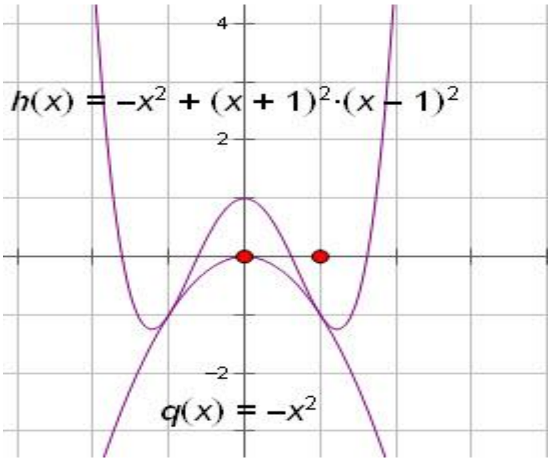
Bir başka örnek, y=x doğrusuna x=-1 ve x=1 de teğet olan eğrinin denklemi

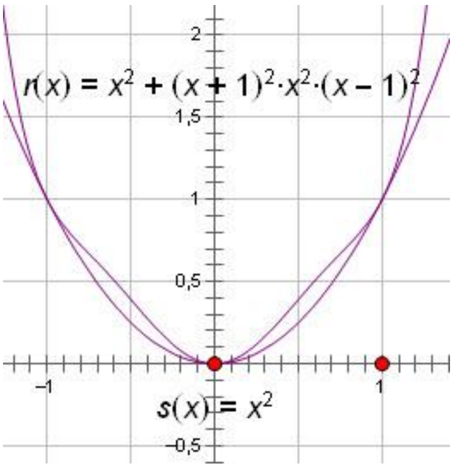
$f(x)=x+(x+1)^2.(x-1)^2$

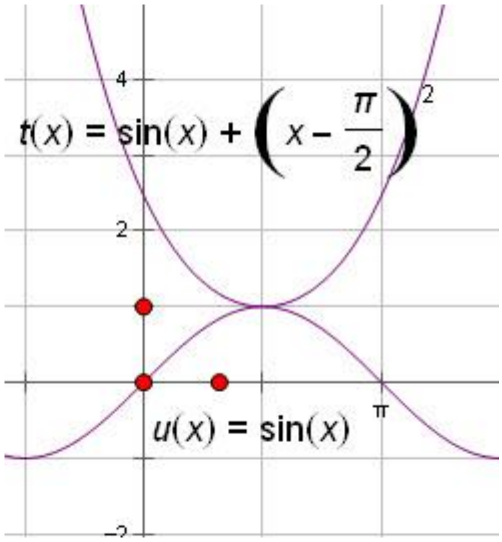
şeklindedir.

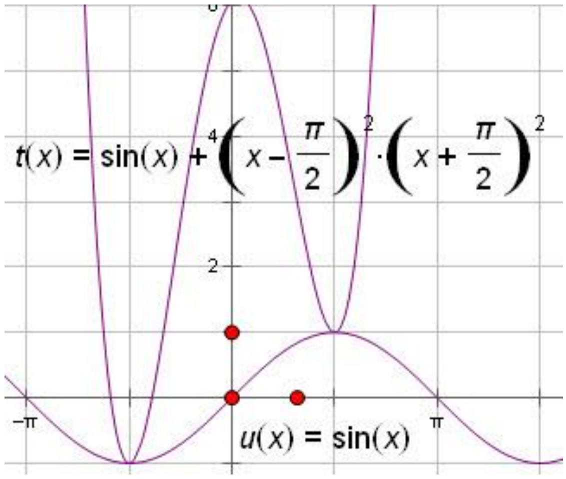


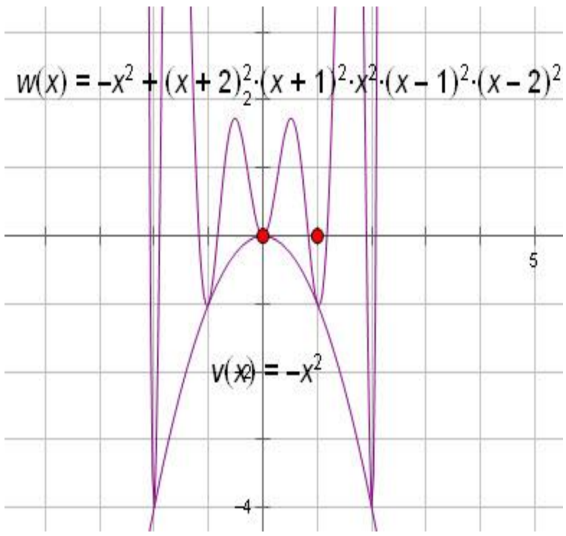
Devam edelim.



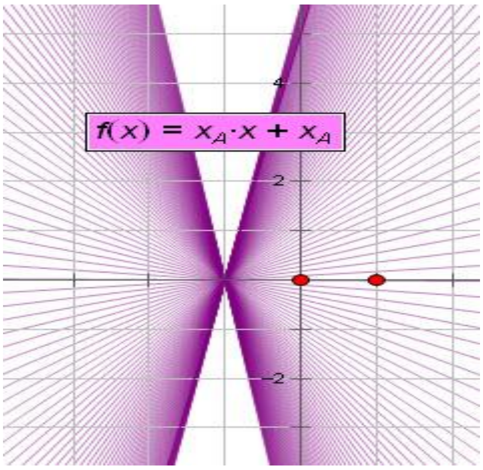








Doğru demeti



Bunlar değil.