BİR SORU’NUN DÜŞÜNDÜRDÜKLERİ

RASİM ZENCİR

# Soru: 5x5 lik bir satranç tahtasında her satır ve her sütunda bir kare kaç farklı şekilde boyanabilir?

Cevap: birinci satırda boyanacak beş kare, ikinci satırda dört kare, üçünçü satırda üç kare, dördüncüde iki kare, son satırda 1 kare olacağından toplam 5! Yani 120 farklı şekilde boyanabilir.

Örneğin,

 

Bir başka örnek,



Demek ki buna benzer 120 tane desen oluşturabileceğiz. Aynı mantıkla 4x4 lük bir tahtada 24, 6x6 lık bir tahtada 720 desen oluşturmak mümkün olabilecek. Genelleştirmek gerekirse nxn lik bir tahtada her satır ve her sütunda bir kare n! farklı şekilde boyanabilecek demektir.

 Bu şekli ızgara sorularında, yani en kısa yol sorularında çok kullandığımızı biliyoruz. Orada, çizgiler üzerinden gidiliyordu. Burada, karelerin boyanması var. Peki bu boyalı kareler bir anlam ifade edebilir mi?

……………………………………………………….

Kartezyen?

Bağıntı?

Tamam eşleme olabilir.İlk şeklimizi bir daha çizelim. Küçük bir ilave ile…



a, b ile eşleniyor. b, d ile. c kendisi ile eşleşmiş. e de öyle. d, a ile eşleşmiş.

Yeniden bakalım. a b ile, b d ile, d de a ile eşleşmiş. Yani a, b ye gitmiş, b d ye, d de a ya gitmiş bir çevrim oluşturmuş.

Üçlü çevrim. c ve e de birli çevrim.

İlginç!... tabloya bir de bu açıdan bakmalı…

Bir başka örnek,



a, e ye gitmiş. e de a ya. eveeet ikili çevrim. b, c ye. c, d ye, d de b ye.

üçlü çevrim. bu çevrimler (ae).(bcd) şeklinde yazılabiliyordu.

Tamam. Artık tüm çevrimleri incelemek kaçınılmaz oldu. Yalnız tablomuzu biraz küçültsek iyi olacak. ☺



 (a).(b).(c).(d)



 (a). (bcd) (a). (bdc)



 (b). (acd) (b). (aec)



 (c).(abd) ( c).(adb)



 ( d).(abc) (d).(acb)



1. .( b).(cd) ( a).(c). (bd)



 (a).( d). (bc) ( b).(c). (ad)



 ( b).(d).(ac) (c ) .(d).(ab)



 (ab)(cd) (ac)(bd)



 (ad).(bc) (abcd)



 (abdc) (acbd)



 (acdb) (adbc)



 (adcb)

Evet. Biraz zahmetli oldu ama bence değdi. Yaparken bazı şeyler gözden kaçmıyor. ☺

Genel olarak bakarsak,

1 tane 4X1 li çevrim, (a).(b).(c).(d)

6 tane 2x1 li, 1X2 li çevrim, (a).(b).(cd)

8 tane 1x1 li ve 1x3 lü çevrim, (a).(bcd)

3 tane 2x2 li çevrim, (ab).(cd)

6 tane 1x4 lü çevrim , (abcd)

Toplamda, çevrimli 24 tablomuz var diyebiliriz.

Eşlemelere dikkatle bakacak olursak 4 lü çevrimlerin sayısı 3!, 3 lü çevrimlerin sayısı 2!, 2 li çevrimlerin sayısı da 1! olduğunu görürüz. Yani her çevrim bir dairesel sıralama… ☺

Bu sonuç bize bazı kolaylıklar sağlayacak gibi görünüyor.Örneğin, (a).(bcd) şeklinde kaç çevrim var bulmak için önce tekli çevrimi seçeriz. (4,1)=4, sonra (bcd) şeklindeki dairesel sıralama 2!. Öyleyse 4.2=8 tane (a).(bcd) şeklinde çevrim olur.Şimdi öğrendiklerimize dayanarak 5x5 lik bir tabloda çevrimlerin nasıl olacağını söyleyebiliriz.

1 tane (a).(b).(c).(d).(e) şeklinde 5x1 lik çevrim. ☺ bu kolay tarafı.

(a).(bcde) şeklindeki çevrimlerin sayısı acaba kaçtır?

Önce tekliyi seçelim. (5,1)=5 sonra (bcde) dairesel sıralama 3!. Öyleyse toplam sayı 5.3!=30 olur.

(a).(b).(cde) lerin sayısı (5,1).(4,1)/2 . 2!=20 tane.

(a).(b).(c).(de) lerin sayısı(5,1).(4,1).(3,1)/3! .1!= 10

(ab).(cde) lerin sayısı (5,2).2!=20

(a,b).(c,d).(e) lerin sayısı (5,2).(3,2)/2=15

(abcde) lerin sayısı 4!=24

Toplarsak 1+30+20+10+20+15+24=120 olur.

İşlem tamam. Hesap doğru. ☺

Peki 8x8 lik bir tabloda (ab).(cdefgh) şeklindeki çevrimlerin sayısını bulabilir miyiz?

(8,2).5!=28.120=3360.

(ab).(cd).(efgh) çevriminin sayısı?

[(8,2).(6,2)/2 ].3! ne ediyorsa…

Anlaşılan fazla sorun olmayacak. Peki bunları bilmek ne işe yarayacak?

Vestiyer soruları, …

Soru: şapkalı beş adam daha önce bıraktıkları şapkalarını vestiyerden rastgele alıyorlar.

a)hiçbirinin kendi şapkasını almama olasılığı,

b)sadece bir tanesinin kendi şapkasını alma olasılığı,

c) sadece 2 tanesinin kendi şapkasını alma olasılığı

kaçtır?

Cevap:

a)tekli çevrim olmamalı. (ab).(cde) ve (abcde) şeklinde olmalı.

[(5,2).2!+4!]/5!=44/120=11/30

b) bir tane tekli çevrim olmalı.

(a).(b,c,d,e) veya (a,b).(c,d).(e)

Şeklinde olmalı

[(5,1).3!+(5,2).(3,2)/2]/5!=45/120

=9/24

c) (a).(b).(cde) şeklinde olmalı.

20/120=1/6

bulunur.

Bu tip sorular, alt faktöriyel ile de çözülebiliyordu. O zaman aradaki ilişkiyi görmek için alt faktöriyel kavramını biraz incelemek gerekiyor.

## ALT FAKTÖRİYEL

S(A)=n olmak üzere A dan A ya, hiçbir elemanın kendisi ile eşleşmediği permütasyon fonksiyonların sayısına n’ in alt faktöriyeli denir ve !n şeklinde gösterilir.

!1=0

!2=1

!3=2

!4=9

!5=44

 Genel olarak

$!n=n!.\sum\_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}$

formülü ile bulunur.

Bu, şu anlama gelir.

!n sayısı, nxn lik bir tabloda asal köşegen üzerindeki hiçbir kareyi boyamamak koşulu ile her satır ve sütunda bir kare boyama sayısıdır.

Ya da tekli çevrimlerin olmadığı çevrimler sayılacak demektir.

Yani,

n=1 için tek çevrim (a) olduğundan !1=0 dır.

n=2 için (a).(b) sayılmayacak, (ab) sayılacak. !2=1 olur.

n=3 için (abc) çevrimi sayılacak. Dairesel sıralamadan 2!=2, !3=2.

n=4 için (ab).(cd) ve (abcd) çevrimleri sayılacak. (4,2)/2+3!=9

n=5 için (ab).(cde) ve (abcde) çevrimleri sayılacak.

(5,2).2!+4!=44 bulunur.

Eğer toplam sembollü formül kullanılırsa,

$$!5=5!.\sum\_{k=0}^{5}\frac{(-1)^{k}}{k!}$$

 =5!.(1-1+1/2-1/6+1/24-1/120)

=60-20+5-1

=44 olur.

Bu yöntem de son günlerin moda yöntemi olan içerme-dışarma denilen yöntemi.

İÇERME-DIŞARMA

İLKESİ

S(B): kümelerin birleşimlerinin eleman sayısı,

K: kümelerin eleman sayıları toplamı,

K2: kümelerin ikişerli arakesitlerinin eleman sayıları toplamı,

K3: kümelerin üçerli arakesitlerinin eleman sayıları toplamı,

 …..

S(B)=K-K1+K2-K3+…

Şeklinde hesaplanır. En basit hali,

S(AuB)=S(A)+S(B)-S(AnB) şeklidir.

Şöyle örneklendirelim. A={ a,b,c,d,e} kümesinin tüm permütasyonları sayısı 120 dir. Buna N0 diyelim. Bunlardan, en az bir tanesi kendisi ile eşleşenlerin sayısına N1, en az iki tanesi kendisi ile eşleşenlerin sayısına N2, en az üç tanesi kendisi ile eşleşenlerin sayısına N3, en az dört tanesi kendisi ile eşleşenlerin sayısına N4, en az 5 tanesinin kendisi ile eşleşenlerin sayısına N5 dersek,

!5=N0-N1+N2-N3+N4-N5 olur.

N0=5!=120,

N1=(5,1).4!=120,

N2=(5,2).3!=60,

N3=(5,3).2!=20,

N4=(5,4).1!=5

N5=(5,5)=1

 !5=120-120+60-20+5-1

!5=44 bulunur.

Formül çalışıyor ancak formülde doğal olmayan bir şey var. 5 elemanlı bir kümenin permütasyonlarında 5 elemandan 4 tanesi kendisi ile eşleşiyorsa beşinci eleman da kendisi ile eşleşmek zorundadır. Bu yüzden 4 tanesi kendisi ile eşleşiyor durumu olamaz.

Bu konuda son olarak kendimize şu soruyu soralım. Alt faktöriyel, faktöriyelin bir alt kümesi midir?

Bence tanım gereği evet. Ya sizce?



Birleşim kümesi faktöriyel ise renkli bölge alt faktöriyeldir.

Şimdi, sorumuzu biraz değiştirelim. Tablomuz hep nxn türünden olacak değil ya!... bir de mxn türünden olsun. Olur mu ki?

En azından bir bakalım…. ☺

 Peki m>n mi olsun yoksa m<n mi olsun?

şimdilik m>n olsun bakalım. Nasıl olsa benzer özellikler vardır.

SORU: m>n olmak üzere mxn lik bir bir satranç tahtasında her satır ve sütunda bir kare… ! :d ? # % \*

Olmaz ki!.... :b

Soru şimdilik durakoysun. Biz ta baştan başlayalım.



Tablomuz bu… sütun sayısını nasıl azaltırız?

Son sütunu silsek mi?

Son satır boş kalır.

En iyisi katlamak galiba. Son satırı dördüncü satır üzerine katlayalım.

Evet. Böylece sütun sayısı dört’e düştü. Beşinci satırdaki boyalı kare de dördüncü sütuna geldi. Orada iki kare boyalı oldu. Böylece tablomuz 5x4 türünden oldu. Veee örten fonksiyon.

Peki 24 farklı durum vardı. Bunların hepsinden bir örten fonksiyon elde eder miyiz? Evet. Ederiz de, bazı durumlar aynı olur.

Örneğin,

 

Bu şekillerde katlama sonucunda aynı durum söz konusu oluyor. Yani üst üste gelen sütunlardaki boyalı kareler yer değiştirdiğinde katlama sonucu aynı şekil ortaya çıkıyor. Bu durum iki tane 5x5 lik desenden bir tane 5x4 desen elde ettiğimizi gösterir. Demek ki 5x5 lik 120 tane desen olduğuna göre ikiye bölmemiz gerekecek. Diğer yandan beşinci satırı dördüncü satır üzerine katladığımız gibi üçüncü, ikinci ve birinci satır üzerine de katlıyabileceğimiz için 120 yi 2 ile bölüp 4 ile çarparsak 5x4 lük örten fonksiyon sayısını buluruz. O da 240 eder. ☺

Genelleştirelim.

m elemanlı bir kümeden (m-1) elemanlı kümeye tanımlanabilecek örten fonksiyon sayısı m!.(m-1)/2 olur.

Şimdi son iki sütunu alıp diğer üç sütün üzerine katlarsak, ne olur?

Herşeyden önce iki sütun da aynı sütun üzerine katlanabilir veya iki sütun farklı iki sütun üzerine katlanabilir.

Bu durumda sütunlardaki boyalı kareler sayısı ya (1-1-3) ya da (2-2-1 ) şeklinde olacaktır.

(1-1-3) şeklinde ise (5,1).(4,1).3!/2=60, (2-2-1) şeklinde ise (5,2).(3,2).3!/2=90 toplam da da 150 durum söz konusu olacaktır.

Diğer yandan m elemanlı bir kümeden n elemanlı bir kümeye tanımlanabilecek örten fonksiyon sayısı, içerme dışarma ilkesi ile m>n olmak üzere,

$$\sum\_{k=0}^{n}\left((-1)^{k}\left(n,k\right)\left(n-k\right)^{m}\right)$$

formülü ile hesaplanır.

Acaba nxn lik bir tablo her satır ve sütunda iki kare boyalı olmak koşulu ile kaç farklı şekilde boyanır? ☺