

## **saymak, öğrenmektir** **rasim zencir**

İnsanı, insan yapan değerlerin başında saymak gelir. işte bu yüzden ilk çağdan günümüze, bebeklikten son ana kadar saymakla uğraşırız. Yine bu yüzden tüm bilimler, hep birşeyleri sayarlar. Bilginin-bilimin temelinde hep sayma vardır. Temelinde sayma olmayan bilgi, bilgi değildir. Saymak, bilgi üretmektir. Saymak, öğrenmektir. Saymak, bilim yapmak demektir.

Sayarız. Boncukları sayarız. Elmalarını, armutları, meyvaları, insanları, hayvanları, binaları sayarız. Toprağı, havayı, suyu, rüzgarı, güneşi ve yıldızları sayarız. Zamanı sayarız. Kuvveti, yolu, işi-gücü sayarız. Atom kütlelerini, yörünge sayısını, proton sayısını, ağaçları, çiçekleri sayarız. Teskereye gün sayarız. Hatır sayarız. Çorbanın içine attığımız tuzu, biberi sayarız.

Bir de... sayı sayarız.

Sayarız da... nasıl sayarız? ☺

-İyi sayarız iyi...

-Sayarız da... bazen de yanlış sayarız. ☺

Parmakla sayarız. Toplamayla-çarpmayla sayarız. Metre ile sayarız, terazi ile de sayarız. Araç kullanarak sayarız, kullanmadan da sayarız. Var mı bize yan bakan?(saydırırım valla)....

biz her türlü sayarız...

Sayarız da... nasıl sayarız? ☺

## **nasıl sayarız?**

Elbette saymanın ne olduğunu bilmeden nasıl saydığımızın bir önemi yok.

**Sayma, sayacağımız şeyleri,** (önceleri parmaklarımızla, sonraları bilinen bir küme ile, şimdilerde ise) **sayma sayılarıyla birebir eşleştirerek yaptığımız işlemdir.**

Bir elimizin parmakları kadar son model ve en pahalısından arabalarımızın olduğunu düşünebiliyor musunuz? ☺(ı-th. Benzin pahalı ve vergisi çok olur. )

Neyse... gelelim nasıl saydığımıza...

Bir elimizde beş, iki elimizde on, on elimizde yüz, ☺pardon elli parmağımız var. Sayacağımız şeyleri iki elimizdeki parmaklarımızla eşleştiriyoruz. Böylece 10 tanesini saymış oluyoruz. Bu aynı zamanda on'a kadar saymasını biliyoruz demek oluyor. Eee sonra? Sonra bir daha on sayıyoruz. Sonra bir daha. Ve daha daha. Yani sayacağımız şeyler on'dan az kalıncaya kadar devam ediyor bu on saymalar. Sonra bunlar karışmasın diye bunları paketlere koyuyoruz ve bunlara onluk paket diyoruz. Eğer on'luk paketlerin sayısı iki elin parmakları sayısından çok olmuş ise, bu onluk paketleri de parmaklarımızla sayıp daha büyük paketlere alıyoruz. Bunlar da on tane on'luk paketten oluştuğu için yüzlük paket oluyor.

Böyle bir paketleme sonunda, 2 tane yüzlük, beş tane onluk dışarda da 4 tane kalmışsa artık sayacağımız şeyleri saymışız demektir. Saymak istediğim şeylerden iki yüzlük, beş tane onluk bir de dört tane var demektir. Bu pratikte, söylene söylene kendiliğinden ikiyüzellidört olur artık. ☺

İşte bu şekilde yaptığımız paketleme işlemine onluk sayma sistemi denir. Paketlerin herbirine de basamak deniyor günümüzde. Hikayenin devamını bilirsiniz. Yüzlükten sonra binlik, onbinlik, yüzbinlik, milyonluk ve diğer paketler geliyor. Yapılan paketlemede paketlerin sayısı on'u geçtiğinde on tanesinden daha büyük paket yapıldığından, paketlerin sayısı hiçbir şekilde on'dan fazla olamaz. Bu yüzden de paketlerin sayısını göstermek için on tane işaret(yani rakam ) yeterlidir. Aynı zamanda da on'a kadar saymasını bilen bütün sayıları sayabilecek demektir.

## **sayma sistemleri**

Şimdi yukardaki paketleme sisteminde, mantığını kaybetmeden küçük bir değişiklik yapalım.

Ben diyeyim ki bir kese, siz deyin ki bir torba cumhuriyet altınımız olsun ve sayısını bilmeyelim. Bu durumda,



1-Önce altınlarımızı bir elin parmakları ile eşleştirip beşerli paketlere alalım.



**Beşlik paketler**

Paketleme sonunda dışarda pakete girmeyen 5 ten az sayıda altınımız kalacaktır. Örneğin biz 3 tane diyelim.

Beşlik paketlerin sayısı beşi çok çok geçmişse,

2-beşlik paketlerimizi bir elin parmakları ile eşleştirip daha büyük paketlere, yani 25 lik paketlere alalım.



25 lik paketler.

Bu işlem sonunda diyelim ki 4 tane 25 lik paketimiz oldu ve 2 tane de 5 lik paketimiz arttı diyelim.

Artık paketlerimiz hazır olmuş, altınlarımız da sayılmış demektir.



4 tane 25 lik paket, 2 tane 5lik paket bir de dışarda 3 altın.

*İşte bu paketlemeyi*

$(423)_5$

*şeklinde gösterip, beşlik sayma sisteminde bir sayı diyeceğiz.*

Benzer şekilde,

2 tane 25 lik, 3 tane 5lik bir de 3 altını  $(233)_5$ ,

1 tane 125 lik, 2 tane 25 lik, 3 tane beşlik ve 4 altını  $(1234)_5$

şeklinde gösteririz.

Öyleyse,

$(3241)_5$  ifadesi yukardakine benzer bir paketlemeyi ifade eder ve 3 tane 125 lik, 2 tane 25lik, 4 tane 5lik paket ve dışarda da 1 tane kalmış demektir.

Parantezin dibindeki 5 de paketlemenin 5lik olduğunu ifade eder. Ya da sayının 5 lik tabanda bir sayı olduğunu...

Anlatılan paketleme sistemi değişik sayılarda yapılp, değişik sayma sistemleri oluşturmak mümkündür. Paketleme 4lük yapılırsa 4lük sayma sistemi, 8 lik yapılırsa 8lik sayma sistemi oluşturulur. En küçük sayma sistemi 2 liktir. Birlik sayma sistemi olmaz. Çünkü 1 tane altından başkasını sayamazdık. Bunun dışında 16 lık, 20 lik veya 60 lık sayma sistemleri oluşturmak mümkündür.

$a, b, c, d < T$  olmak üzere,

$(abcd)_T$

ifadesine  $T$  tabanında dört basamaklı bir sayı denir.

$T$  lik sayma sisteminde  $T$  tane rakamla bütün sayılar yazabiliriz. Örneğin, ikilik sayma sisteminde 0 ve 1 rakamları ile tüm sayılar yazılabilir.  $(11001101)_2$  gibi.

# çözümleme

$(423)_5$  sayısı ile temsil edilen paketlemede acaba kaç tane altın paketlemiş oluruz?

4 tane 25 lik pakette  $4 \cdot 25 = 100$  altın. 2 tane 5 lik pakette  $2 \cdot 5 = 10$  altın. Dışarda 3 altın. Toplayalım.  $100 + 10 + 3 = 113$  altın.

Bu yapılan işleme  $(423)_5$  sayısının çözümlenmesi denir.

$(abcd)_T$  sayısında,

d ye birler basamağı,

c ye T ler basamağı,

b ye  $T^2$  ler basamağı,

a ya  $T^3$  ler basamağı

denir.

$$(abcd)_T = a \cdot T^3 + b \cdot T^2 + c \cdot T + d$$

İfadesine  $(abcd)_T$  sayısının çözümlenişi denir. Çözümleme, T tabanındaki sayının 10 tabanına çevrilişi anlamına da gelir.

Örnek.

1-Aşağıdaki sayıları çözümlayiniz.

1-  $(314)_7$

2-  $(1204)_5$

3-  $(214)_8$

4-  $(2133)_4$

5-  $(10022)_3$

6-  $(1001011)_2$

2-Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan a sayılarını bulunuz.

1-  $(101a) = 134$

2-  $(102a)_5 = (a50)_6$

3-  $(333)_a = 63$

4-  $(234)_5 = (12a)_7$

5-  $(1331)_a = 343$

3- $(43)_a = (23)_b$  olduğuna göre a+b toplamının en küçük değeri kaçtır?

4- $(xyz)_7$  sayısında x, 2 artırılıp y ve z, 3 azaltılırsa sayıdaki artışın 7 tabanındaki eşiti kaç olur?

5-Çözümlenmiş hali  $2 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1$  olan sayı 5 lik tabanda kaçtır?

6- $13 \cdot 7^4 + 1$  sayısının 7 lik tabanda yazılışı nedir?

7- $(abc,def)_T = a \cdot T^2 + b \cdot T + c + T^{-1} + d \cdot T^{-2} + e \cdot T^{-3}$  olduğuna göre  $(23,44)_5$  sayısının 10 tabanındaki karşılığı kaçtır?

8- $16^6$  sayısı 8 lik tabanda yazılırsa kaç basamaklı olur?

9- $27^4$  sayısı 3 lük tabanda yazılırsa sondan kaç basamağı o olur?

## toplama işlemi

Diyelim ki aşağıdaki şekilde paketlenmiş bir miktar altınım var.



3 tane 25 lik, 3 tane 5lik paket bir de 4 altın.

Ve yine diyelim ki aşağıdaki altınları da kazandım.



1 tane 25 lik, 4 tane 5 lik bir de 3 altın.

Bu durumda paketleme sistemim bozuldu. Yeniden düzenlemem gerekiyor.

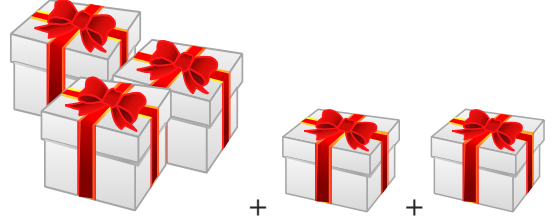


Dışarda 4 altınım vardı. 3 tane daha kazandım. Dışarda 7 altınım oldu. Bunun 5 tanesinden bir 5lik paket yaptım. Dışarda 2 altınım kaldı.



Üç tane 5lik paketim vardı. 4 tane daha kazandım. Bir de dışardaki altınlardan oldu. Toplam 8 tane 5lik paketim oldu.

8 tane 5lik paketten bir tane 25lik paket yaptım. 3 tane 5lik paket kaldı.



3 tane 25 lik paketim vardı. Bir tane de kazandım artı bir tane de 5lik paketlerden yaptım. 5 tane 25lik paketim oldu. Bunlardan da bir tane 125lik paket yaptım.

Son durumda



Bir tane 125lik, 3 tane beşlik, 2 tane dışarda altınım oldu.

Bunları işlem olarak yaparsak

$$(334)_5$$

$$(143)_5$$

$$(1032)_5$$

Dört, üç daha yedi. Yedinin ikisi elde var bir. Bir, 3 daha 4, 4 daha 8. 8 in zü, elde var bir. Bir 3 daha 4, 1 daha beş. Beşin sıfırı elde bir. O da yazılır.

Benzer biçimde aşağıdaki işlemleri yapınız.

$$1- (2434)_5+(1433)_5$$

$$2- (321)_4+(132)_4+(231)_4$$

$$3- (6541)_7+(1002)_7$$

## çıkarma işlemi

Diyelim ki aşağıdaki şekilde paketlenmiş altınlarım var.



Ve yine diyelim ki, birşeyler aldığım için aşağıdakiler kadar ödemem gerekiyor.



Dışarda bir altınım olduğundan 3 altını vermek mümkün değil. Bu yüzden 5lik paketlerin birisini açarım. İçinden ne çıktı dersiniz?



Beş altın. Bir de vardı. 6 altın oldu. Artık 3 tanesini verebilirim. Bana 3 tane kalır.

3 tane 5lik paket vermem lazım ama benim bir tane 5lik paketim kaldı. 25 lik paketlerden birini açıyorum. İçinden ne çıktı dersiniz? 😊



5 tane 5lik paket. Artık 6 tane 5lik paketim var ve 3 tane 5lik paketi verebilirim. Bana 3 tane 5lik paket kalır.

Bir de bir tane 25lik paket vermem gerekiyor. Zaten 2 tane 25 lik paketim kaldığı için onu da verebilirim. Bana bir tane kalır.

Son olarak baktığımızda bana kalanlar, bir tane 25lik paket, 3 tane 5lik paket, 3 tane de tek altın.

İşlemi bir de sayılarla yapalım.

$$\begin{array}{r} (321)_5 \\ - (133)_5 \\ \hline (133)_5 \end{array}$$

Birden beş çıkmaz. Komşudan bir beşlik alırız. 6 olur. 6 dan 3 çıktı, 3 kaldı. Burda kaldı 1. 1'den 3 çıkmaz. Komşudan bir 5lik alırız. Eder 6. 6 dan 3 çıktı. Kaldı 3. Burda kaldı 2. 2 den 1 çıktı. 1 kaldı. O da en sona yazılır.

Aşağıdaki çıkarma işlemlerini yapınız.

- 1)  $(3123)_5 - (2224)_5$
- 2)  $(30001)_6 - (11122)_6$
- 3)  $(11001)_2 - (111)_2$
- 4)  $(3012)_4 - (1223)_4$
- 5)  $(7321)_8 - (5432)_8$

Buraya kadar yaptıklarımıza dayanarak şunu söyleyebiliriz.

Tüm tabanlarda dört işlem aynı şekilde yapılıyor. Sadece eldeler değişiyor.

## çarpma işlemi

Çarpma işlemi de bildiğimiz şekilde yapılır. Çarpım taban sayısını geçince eldeye geçilir. Basitten başlayalım.

$$1) \quad (234)_5 \cdot (3)_5 = ?$$

3 kere 4, 12. 12 nin 2si, elde 2.

3 kere 3, 9. 2 de elde var, eder 11.  
11 in biri, elde iki.

3 kere 2, 6. 2 de elde var, 8. 8 in 3ü,  
elde var 1. Bu durumda çarpım.

$$(234)_5 \cdot (3)_5 = (1312)_5.$$

$$2) \quad (234)_5$$

$$\times (23)_5$$

$$\hline (1312)_5$$

$$(1023)_5$$

$$\hline (12042)_5$$

$$3) \quad (524)_6$$

$$\quad (34)_6$$

$$\hline (3344)_6$$

$$(2420)_6$$

$$\hline (31544)_6$$

$$4) \quad (321)_4$$

$$\times (123)_4$$

$$\hline (2223)_4$$

$$(1302)_4$$

$$\hline (321)_4$$

$$\hline (120003)_4$$

## bölme işlemi

$$\begin{array}{r|l} (432)_5 & (12)_5 \\ (42)_5 & (31)_5 \text{ bölüm} \\ \hline (022)_5 & \end{array}$$

$$\hline (12)_5$$

$$(10)_5 \text{ kalan}$$

Örnekte de görüldüğü gibi bölme işlemi de benzer şekilde yapılabilir. Ancak fazla kullanılmadığı için üzerinde fazla durulmaz.

Aşağıdaki örnekleri yapınız.

$$1- (324)_5 \cdot (42)_5$$

$$2- (1002)_5 \cdot (43)_5$$

$$3- (311)_4 \cdot (23)_4$$

$$4- (563)_7 \cdot (54)_7$$

$$5- (4223)_5 : (23)_5$$

## diğer tabanlara geçme

Onluk sistemdeki bir sayıyı diğer sistemlere nasıl dönüştüreceğimizi örneklerle anlatalım.

Örnek: 58 sayısını 5lik sistemde nasıl yazarız?

1. Yol: 58 sayısını, 58 altın gibi düşünelim. 5lik, 25lik paketlere koyalım. Paketler dolu dolu olmalı. 2 tane 25lik paket 50 eder. Geriye 8 altın kalır. Bir tane 5lik paket doldurursak dışarda 3 tane altın kalır. Öyleyse  $58=(213)_5$
2. Yol: 58 i, 5'e böleriz. Kalan 3 olur. Bu sayımızın birler basamağıdır. Bölüm 11 dir. 11 i tekrar 5'e böleriz. Bölüm 2, kalan 1 dir. Beşler basamağı 1, 25ler basamağı 2 olur. Böylece sayı da  $(213)_5$  olur.

Aşağıdaki sayıları istenilen tabana dönüştürünüz.

1.  $63=(x)_4$
2.  $63=(x)_5$
3.  $44=(x)_3$
4.  $27=(x)_2$
5.  $(67)_8=(x)_4$
6.  $(2102)_3=(x)_9$
7.  $(124)_5=(x)_4$
8.  $(12,34)_5=(x)_{10}$
9.  $(12,34)_{10}=(x)_5$

## devirli sayılar

Tıpkı onluk sistemde olduğu gibi diğer sayma sistemlerinde de devirli sayılar vardır. rasyonel sayıya çevirme formülü de küçük bir değişiklikle aynıdır.

$z$ ,  $T$  tabanındaki en büyük rakam olmak üzere, paydada devreden rakamların sayısı kadar  $z$ , virgülden sonraki devretmeyen rakamların sayısı kadar sıfır olacak şekilde,

$$(a, bc\overline{def})_T = \frac{abcdef - abc}{zzz00}$$

şeklindedir.

## standart(bilimsel)

### yazılış

$a < T$  olmak üzere ve  $n$  doğal sayı olmak üzere,

$a.T^n$  ifadesine  $T$  tabanındaki sayının standart ya da bilimsel yazılışı denir.

Bu sayının sonunda  $n$  tane sıfır vardır ve sayı  $(n+1)$  basamaklıdır.

## beşlik sistemde sayılar

0	1	2	3	4
10	11	12	13	14
20	21	22	23	24
30	31	32	33	34
40	41	42	43	44
100	101	102	103	104 ...



## **bölünebilme kuralları**

$$(abcd)_T = a.T^3 + b.T^2 + c.T + d$$

Şeklindeki bir sayının;

1.  $T$  yi bölen bir sayıya bölünebilmesi için  $d$  nin yani birler basamağındaki rakamın bu sayıya bölünmesi yeterlidir.
2.  $T$  yi böldüğünde bir kalanını veren bir sayıya bölünebilmesi için, sayıdaki rakamların toplamının bu sayıya bölünmesi yeterlidir.
3.  $(T-1)$  ile bölünebilmesi için, sayıdaki rakamların toplamın  $(T-1)$  ile bölünmesi yeterlidir.
4. Diğer sayılar ile bölünebilme kuralları bulunabilir.

## **teklik-çiftlik**

$(abcd)_T$  sayısı,

$T$  çift,  $d$  çift ise sayı çift,

$T$  çift,  $d$  tek ise sayı tektir.

$T$  tek, sayıdaki rakamlar toplamı çift ise sayı çift,

$T$  tek, sayıdaki rakamlar toplamı tek ise sayı tektir.