Fonksiyon

Tanım-1

*A kümesinden B kümesine bir f bağıntısı A kümesinin her elemanını B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşliyorsa, f bağıntısına **A'dan B'ye bir fonksiyon** denir.*

$x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere A'dan B'ye bir f fonksiyonu

$$f : A \to B; \quad y = f(x)$$

biçiminde yazılır. Bu ifadede A kümesine **tanım kümesi**, B kümesine **değer kümesi**, x'e **değişken**, y'ye x değişkeninin f fonksiyonuna göre **görüntü**sü, $y = f(x)$ eşitliğine de **fonksiyonun kuralı** denir. Buna göre;

Bir fonksiyon tanım kümesi, değer kümesi ve kuralı ile tanımlanır.

Bir fonksiyonun kuralı, tek başına, bir fonksiyon belirtmez. Ancak; bir tanım kümesi verilmeden "$y = f(x)$ fonksiyonu" denilmişse, bunun tanım kümesinin f kuralının uygulanabileceği reel sayıların kümesi olacağı anlaşılır. Bu yolla belirlenen tanım kümesine, **en geniş tanım kümesi** denir.

Örneğin;

"$f : [3, +\infty) \to R; \ f(x) = \ln(x^2 - 4)$" ifadesi tam tanımlanmış bir fonksiyonu gösterir.

"$g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu." ifadesi de g fonksiyonunun tanım kümesinin $[0, \infty)$ olarak alınacağını belirtir.

Bir Fonksiyonun Ters Türevi

Tanım-2

*Bir F fonksiyonunun türevi f ise, F fonksiyonuna f fonksiyonunun **ters türevi** ya da f fonksiyonunun **ilkel fonksiyonu** denir.*

Örneğin; $F(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun türevi $f(x) = 2x$ ve $f(x) = 2x$ fonksiyonunun bir ters türevi $F(x) = x^2 + 1$ olur.

Belirsiz İntegral

Tanım-3

*Bir f fonksiyonunun **ters türev**lerinin kümesine, f fonksiyonunun **belirsiz integral**i denir.*

Örneğin; $f(x) = 2x$ fonksiyonunun ters türevlerinden bazıları $F_1(x) = x^2 + 24$, $F_2(x) = x^2$, $F_3(x) = x^2 - 3$ fonksiyonlarıdır. Dikkat edilirse; bu fonksiyonların birbirlerinden farkları sadece sabitleridir. Bu ters türevlerin $I = \left\{ (x^2 + C) \,\middle|\, C \in R \right\}$ kümesi, $\int (2x)\,dx$ sembolü ile gösterilir.

$$\int (2x)\,dx = x^2 + C$$

eşitliği yazılır.

Genelleştirirsek;

Bir f fonksiyonunun belirsiz integrali, türevi f olan fonksiyonların kümesi olup bu küme, $\int f(x)\,dx$ sembolü ile gösterilir.

$F'(x) = f(x)$ olmak üzere,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

eşitliği yazılır.

Belirli İntegral

Bir f fonksiyonunun bir $[a,b]$ aralığındaki **belirli integral**i; $y=f(x)$ eğrisinin, $x=a$ ile $x=b$ doğrularının ve x ekseni-nin sınırladığı alana karşılık gelen bir sayıdır. Bu alanın değeri $f(x)>0$ iken pozitif, $f(x)=0$ iken sıfır, $f(x)<0$ iken negatif olur. Belirtilen aralıkta f fonksiyonunun değeri pozitif, negatif veya sıfır olabiliyorsa, f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki integraline karşılık gelen sayı, alan değerlerine karşılık gelen sayıların cebirsel toplamı olur.

f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki belirli integrali $\int_a^b f(x)\,dx$ sembolü ile gösterilir. Anlaşılacağı gibi; $\int f(x)\,dx$ belirsiz integrali ile, $\int_a^b f(x)\,dx$ belirli integrali (Riemann integrali) çok farklı kavramlardır. Bu çok farklı kavramlar arasındaki gizli ilişki **İntegral Hesabın Temel Teoremleri** ile ortaya çıkarılmıştır.

Teorem-1

f fonksiyonu $[a,b]$ *aralığında sürekli ise,*

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ *fonksiyonu* $[a,b]$ *aralığında sürekli ve* (a,b) *aralığında türevlenebilirdir.*

F fonksiyonunun türevi f fonksiyonudur.

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonu için $F'(x)=f(x)$ olması ile $\int f(x)\,dx=G(x)+C$ eşitliğini sağlayan G fonksiyonu için $G'(x)=f(x)$ olması farklı anlamlardadır.

Teorem-1, sürekli f fonksiyonu için $F'(x)=f(x)$ eşitliğini sağlayan F fonksiyonunun varlığını garanti eder.

Ancak; aynı f için $\int f(x)\,dx=G(x)+C$ eşitliğini sağlayan G fonksiyonu bulunmayabilir.

Teorem-2

f fonksiyonu $[a,b]$ *aralığında sürekli ve f fonksiyonunun* $[a,b]$ *aralığındaki ters türevi de F ise,* $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ *olur.*

$\int_a^b f(x)\,dx$ integralinin Riemann toplamı yaklaşımı ile bulunması uzun, ayrıntılı işlemleri gerektirir. Halbuki; bir f fonksiyonunun ters türevi çok daha kolay yollarla bulunabilir. İşte; **İntegral Hesabın Temel Teoremleri** ile, belirsiz integral işlemlerindeki bu kolaylıkların belirli integral işlemlerinde kullanılabilmesi sağlanmıştır.

Not

Bu çalışmadaki amacım, **parçalı tanımlı fonksiyonlar**daki integral işlemlerinde karşılaşılan özel sorunların çözümlenme-sini sağlayabilmektir.

Çözeceğim örnek problemlerle bunun gerçekleşeceğini umuyorum.

Belirsiz integral ve **belirli integral** kavramlarının ayrıntılı biçimde işlenmeleri buradaki konumuz değildir. Bu nedenle, teoremlerin ispatlarına girilmemiştir.

Bu konu ile ilgili kişisel düşüncemi belirtmeden geçemeyeceğim:

Belirsiz integral ve **belirli integral** gibi adlarından başka hiçbir benzerliği olmadığı düşünülen iki kavram arasındaki ilişkinin, **İntegral Hesabın Temel Teoremleri** ile ortaya çıkarılabilmiş olması, matematiğe ve gerçek matematikçilere duyduğum hayranlığın haklı gerekçelerinden biridir.

Örnek Problem -1

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \text{ ise} \\ 1 - 2x & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

$\int f(x)\,dx$ integralini bulunuz.

Çözüm

Her parçanın ayrı ayrı ters türevi bulunur.

$$I = \int f(x)\,dx = \begin{cases} x^2 + C_1 & x < 0 \text{ ise} \\ -x^2 + x + C_2 & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

f fonksiyonu R'de tanımlı olduğu için, f fonksiyonunun ters türevlerinin sürekli fonksiyonlar olmaları gerekir.

$C_1 = C_2 = C$ seçmek sürekliliği sağlar.

$$I = \int f(x)\,dx = \begin{cases} x^2 + C & x < 0 \text{ ise} \\ -x^2 + x + C & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ biçiminde yazalım:

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{\left(\begin{cases} x^2 & x < 0 \text{ ise} \\ -x^2 + x & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases} \right)}_{F(x)} + C \quad (?)$$

Acaba; bu eşitlik doğru mudur?

"Bir f fonksiyonunun belirsiz integrali, türevi f olan fonksiyonların kümesidir."

Bu tanıma göre, $f(x) = g'(x)$ olmalıdır.

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \text{ ise} \\ -x^2 + x & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \text{ ise} \\ -2x + 1 & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} F'(x) = 0$ ve $\lim\limits_{x \to 0^+} F'(x) = 1$ olup $F'(0)$ tanımsızdır. $f(x) \neq F'(x)$ olur.

O halde; türevi,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \text{ ise} \\ 1 - 2x & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olan bir f fonksiyonu yoktur.

Matematik kesinlikle; $\int f(x)\,dx$ yoktur.

Not

Burada, $\int f(x)\,dx$ integralinin bulunmaması $\int_a^b f(x)\,dx$ integralini hesaplamada belirsiz integral kolaylıklarından yararlanma olanağını kısıtlamaz.

Belirli integralde,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \underbrace{\int_c^c f(x)\,dx}_{0} + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

eşitliği geçerlidir. Burada f fonksiyonunun tanım kümesi $(a,c)\cup\{c\}\cup(c,b)$ olarak düşünülmüştür. Buna göre; f fonksiyonunun $x=c$ için tanımlı ya da tanımsız olması $\int_a^b f(x)\,dx$ belirli integralinin değerini değiştirmez.

Ayrıca; f fonksiyonunun tanım kümesinde yapılacak küçük bir değişiklik ile $\int f(x)\,dx$ integralinin varlığı sağlanabilir.

Bunları örnekler üzerinde görelim:

Örnek Problem -2

$f: R \to R;\quad f(x) = \begin{cases} 2x & x<0 \text{ ise} \\ 1-2x & x\ge 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} 2x\,dx + \int_0^0 f(x)\,dx + \int_0^4 (1-2x)\,dx$$

$$= x^2\Big]_{-2}^{0} + 0 + \left(x - x^2\right)\Big]_0^4$$

$$= 0 - 4 + 0 + (4-16) - 0$$

$$= -16$$

Örnek Problem -3

$f: R-\{0\} \to R;\quad f(x) = \begin{cases} 2x & x<0 \text{ ise} \\ 1-2x & x> 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

$\int f(x)\,dx$ integralini bulunuz.

Çözüm

$$I = \int f(x)\,dx = \begin{cases} x^2 + C_1 & x<0 \text{ ise} \\ -x^2 + x + C_2 & x>0 \text{ ise} \end{cases}$$

f fonksiyonu $R-\{0\}$ kümesinde tanımlı olduğundan, I fonksiyonlar kümesinin elemanlarının $x=0$ için sürekli olmaları gerekmez.

$k \in R$ olmak üzere, $C_1 = k + C$ ve $C_2 = C$ olarak seçilebilir.

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{\left(\begin{cases} x^2+k & x<0 \text{ ise} \\ -x^2 + x & x>0 \text{ ise} \end{cases}\right)}_{F(x)} + C$$

bulunur.

$f(x) = F'(x)$ eşitliği açık olup

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ eşitliği geçerlidir.

Örnek Problem -4

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad f(x)=\begin{cases}2x & x<1 \text{ ise}\\ 4-2x & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

$\int f(x)\,dx$ integralini bulunuz.

Çözüm

$$I=\int f(x)\,dx=\begin{cases}x^2+C_1 & x<1 \text{ ise}\\ -x^2+4x+C_2 & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$$

f fonksiyonu R'de tanımlı olduğu için I fonksiyonlar ailesini, sürekli fonksiyonlar olarak seçmeliyiz.

$C_1=2+C$ ve $C_2=C$ seçmek sürekliliği sağlar.

$\int f(x)\,dx=F(x)+C$ biçiminde yazalım:

$$\int f(x)\,dx=\underbrace{\left(\begin{cases}x^2+2 & x<1 \text{ ise}\\ -x^2+4x & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}\right)}_{F(x)}+C$$

$$F(x)=\begin{cases}x^2+2 & x<1 \text{ ise}\\ -x^2+4x & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$$

$$\Rightarrow F'(x)=\begin{cases}2x & x<1 \text{ ise}\\ -2x+4 & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$$

Görüldüğü üzere; $f(x)=F'(x)$ olur.

$$\int f(x)\,dx=\left(\begin{cases}x^2+2 & x<1 \text{ ise}\\ -x^2+4x & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}\right)+C$$

eşitliği geçerlidir.

Örnek Problem -5

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad f(x)=\begin{cases}2x & x<1 \text{ ise}\\ 4-2x & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

$\int_0^2 f(x)\,dx$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\begin{aligned}&\int_0^2 f(x)\,dx\\ &=\int_0^1 2x\,dx+\int_1^2 (4-2x)\,dx\\ &=x^2\Big]_0^1+\left(4x-x^2\right)\Big]_1^2\\ &=2\end{aligned}$$

2. yol

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad f(x)=\begin{cases}2x & x<1 \text{ ise}\\ 4-2x & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$

ise

$$\int f(x)\,dx=\left(\begin{cases}x^2+2 & x<1 \text{ ise}\\ -x^2+4x & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}\right)+C$$

olduğu bulunur.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,dx&=\left(\begin{cases}x^2+2 & x<1 \text{ ise}\\ -x^2+4x & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}\right)\Bigg]_0^2\\ &=\left(-2^2+4\cdot 2\right)-(0+2)\\ &=2\end{aligned}$$

Örnek Problem -6

$f : R \to R;\quad f(x) = |x|$ fonksiyonu veriliyor.

$\int f(x)dx$ integralini bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \text{ ise} \\ x & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$I = \int f(x)dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + C_1 & x < 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}x^2 + C_2 & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

f fonksiyonu R'de tanımlı olduğu için, I fonksiyonlar ailesini sürekli fonksiyonlar olarak seçmeliyiz.

$C_1 = C_2 = C$ seçmek sürekliliği sağlar.

$$I = \int f(x)dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + C & x < 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}x^2 + C & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$I = \int f(x)dx = \underbrace{\left(\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & x < 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}x^2 & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases} \right)}_{F(x)} + C$$

$$f(x) = g'(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \text{ ise} \\ x & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases} \text{ olup}$$

$\int f(x)dx = F(x) + C$ eşitliği geçerlidir.

Sonuç daha sade verilebilir:

$$\int f(x)dx = \left(\begin{cases} \frac{1}{2}x(-x) & x < 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}x(x) & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases} \right) + C$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \left(\begin{cases} \frac{1}{2}x|x| & x < 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}x|x| & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases} \right) + C$$

$$\Rightarrow \int |x|dx = \frac{1}{2}x|x| + C$$

Örnek Problem -7

$f : R \to R;\quad f(x) = |x^2 - 4|$ fonksiyonu veriliyor.

$\int f(x)dx$ integralini bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = |x^2 - 4|$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < -2 \text{ ise} \\ -x^2 + 4 & -2 \leq x < 2 \text{ ise} \\ x^2 - 4 & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\int f(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - 4x + C_1 & x < -2 \text{ ise} \\ -\frac{1}{3}x^3 + 4x + C_2 & -2 \leq x < 2 \text{ ise} \\ \frac{1}{3}x^3 - 4x + C_3 & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

f fonksiyonu R'de tanımlı olduğundan $\int f(x)dx$ kümesi sürekli fonksiyonlardan oluşmalıdır.

$C_1 = \frac{-32}{3} + C$, $C_2 = C$ ve $C_3 = \frac{32}{3} + C$

seçilirse süreklilik sağlanır.

$$I=\int f(x)dx$$

$$\Rightarrow I=\left(\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-4x-\frac{32}{3} & x<-2 \text{ ise}\\ -\frac{1}{3}x^3+4x & -2\le x<2 \text{ ise}\\ \frac{1}{3}x^3-4x+\frac{32}{3} & x\ge 2 \text{ ise}\end{cases}\right)+C$$

bulunur.

Örnek Problem -8

$f:R\to R;\ \ f(x)=\left|x^2-4\right|$ fonksiyonu verilıyor.

$\int_{-4}^{2} f(x)\,dx$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$f(x)=\left|x^2-4\right|$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<-2 \text{ ise}\\ -x^2+4 & -2\le x<2 \text{ ise}\\ x^2-4 & x\ge 2 \text{ ise}\end{cases}$$

$$\int_{-4}^{2} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-4}^{-2}\left(x^2-4\right)dx+\int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Bigg]_{-4}^{-2}+\left(\frac{-x^3}{3}+4x\right)\Bigg]_{-2}^{2}$$

$$=\frac{64}{3}$$

2. yol

$$f(x)=\left|x^2-4\right|$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<-2 \text{ ise}\\ -x^2+4 & -2\le x<2 \text{ ise}\\ x^2-4 & x\ge 2 \text{ ise}\end{cases}$$

$$I=\int f(x)dx$$

$$\Rightarrow I=\underbrace{\left(\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-4x-\frac{32}{3} & x<-2 \text{ ise}\\ -\frac{1}{3}x^3+4x & -2\le x<2 \text{ ise}\\ \frac{1}{3}x^3-4x+\frac{32}{3} & x\ge 2 \text{ ise}\end{cases}\right)}_{F(x)}+C$$

olduğu bulunur.

$$\int_{-4}^{2}\left|x^2-4\right|dx=F(x)\Big]_{-4}^{2}$$

$$=F(2)-F(-4)$$

$$=\left(\frac{8}{3}-8+\frac{32}{3}\right)-\left(\frac{-64}{3}+16-\frac{32}{3}\right)$$

$$=\frac{64}{3}$$

Örnek Problem -9

$f:R\to R;\ \ f(x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$

fonksiyonu veriliyor.

$\int f(x)\,dx$ integralini bulunuz.

Çözüm

$$\int \sqrt{2+2\cos 2x}\,dx = \int \sqrt{4\cos^2 x} = \int \left|2\cos x\right| dx = I$$

İntegrand, esas periyodu π olan bir fonksiyondur. Mutlak değer sembolünün içinin esas periyodu ise 2π'dir.

$$I = \int \left|2\cos x\right| dx = \begin{cases} \int 2\cos x dx & \dfrac{-\pi}{2} + k\cdot 2\pi \le x < \dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \quad \text{ise} \\ \int -2\cos x dx & \dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \le x < \dfrac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$I = \int \left|2\cos x\right| dx = \begin{cases} 2\sin x + C_1 & \dfrac{-\pi}{2} + k\cdot 2\pi \le x < \dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \quad \text{ise} \\ -2\sin x + C_2 & \dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \le x < \dfrac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi \quad \text{ise} \end{cases}$$

İntegral alma işlemi tamamlanmış gibi görünüyor. Bulduğumuz, I fonksiyonlar ailesinin türevinin kuralının $f(x) = \left|2\cos x\right|$ ya da $f(x) = \sqrt{2+2\cos 2x}$ olacağı açıktır. Ancak; her x reel sayısı için türevin var olabilmesi, I fonksiyonlar kümesinin sürekli fonksiyonlardan oluşmasına bağlıdır. C_1 ve C_2 sabitlerine uygun değerler verilerek sürekli bir fonksiyonlar kümesi aranabilir.

Bu işlemleri kolaylaştırmak için, I fonksiyonlar kümesini k'ya bağlı değil de değişim aralıklarını ayrı ayrı belirterek yazalım:

$$I = \int \left|2\cos x\right| dx = \begin{cases} \ldots & \\ 2\sin x + C_1 & \dfrac{-5\pi}{2} \le x < \dfrac{-3\pi}{2} \quad \text{ise} \\ -2\sin x + C_2 & \dfrac{-3\pi}{2} \le x < \dfrac{-\pi}{2} \quad \text{ise} \\ 2\sin x + C_3 & \dfrac{-\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2} \quad \text{ise} \\ -2\sin x + C_4 & \dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{3\pi}{2} \quad \text{ise} \\ 2\sin x + C_5 & \dfrac{3\pi}{2} \le x < \dfrac{5\pi}{2} \quad \text{ise} \\ \ldots & \end{cases}$$

Sürekliliğin sağlanması için; $C_3 = C$ seçildiğinde $C_2 = -4 + C$, $C_4 = 4 + C$, $C_1 = -8 + C$, $C_5 = 8 + C$ … olarak seçilmesi gerekir.

$$\int |2\cos x|\,dx = \begin{cases} \ldots \\ 2\sin x - 8 + C & \dfrac{-5\pi}{2} \le x < \dfrac{-3\pi}{2} \text{ ise} \\ -2\sin x - 4 + C & \dfrac{-3\pi}{2} \le x < \dfrac{-\pi}{2} \text{ ise} \\ 2\sin x + C & \dfrac{-\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ise} \\ -2\sin x + 4 + C & \dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{3\pi}{2} \text{ ise} \\ 2\sin x + 8 + C & \dfrac{3\pi}{2} \le x < \dfrac{5\pi}{2} \text{ ise} \\ \ldots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int |2\cos x|\,dx = \underbrace{\left(\begin{cases} \ldots \\ 2\sin x - 8 & \dfrac{-5\pi}{2} \le x < \dfrac{-3\pi}{2} \text{ ise} \\ -2\sin x - 4 & \dfrac{-3\pi}{2} \le x < \dfrac{-\pi}{2} \text{ ise} \\ 2\sin x & \dfrac{-\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ise} \\ -2\sin x + 4 & \dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{3\pi}{2} \text{ ise} \\ 2\sin x + 8 & \dfrac{3\pi}{2} \le x < \dfrac{5\pi}{2} \text{ ise} \\ \ldots \end{cases} \right)}_{F(x)} + C$$

Örnek Problem -10

$f : R \to R;\ \ f(x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$ fonksiyonu veriliyor.

$\displaystyle\int_{-2\pi}^{\frac{13\pi}{4}} f(x)\,dx$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\int \sqrt{2+2\cos 2x}\,dx = \int \sqrt{4\cos^2 x} = \int \left|2\cos x\right| dx$$

f fonksiyonunun esas periyodu π'dir.

$\left[-2\pi, \dfrac{13\pi}{4}\right] = \left[-2\pi, 3\pi\right] \cup \left[3\pi, \dfrac{13\pi}{4}\right]$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\int_{-2\pi}^{\frac{13\pi}{4}} \left|2\cos x\right| dx = \int_{-2\pi}^{3\pi} \left|2\cos x\right| dx + \int_{3\pi}^{\frac{13\pi}{4}} \left|2\cos x\right| dx$$

$$= 5 \cdot \int_{0}^{\pi} \left|2\cos x\right| dx + \int_{3\pi}^{\frac{13\pi}{4}} \left|2\cos x\right| dx$$

$$= 5 \cdot \left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -2\cos x dx \right) + \int_{3\pi}^{\frac{13\pi}{4}} -2\cos x dx$$

$$= 5 \cdot \left[\left(2\sin x \Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} \right) + \left(-2\sin x \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) \right] + \left(-2\sin x \Big]_{3\pi}^{\frac{13\pi}{4}} \right) = 20 + \sqrt{2} \quad \text{bulunur.}$$

2. yol

$$\int \left|2\cos x\right| dx = \underbrace{\left(\begin{cases} \ldots & \\ 2\sin x - 8 & \dfrac{-5\pi}{2} \le x < \dfrac{-3\pi}{2} \text{ ise} \\ -2\sin x - 4 & \dfrac{-3\pi}{2} \le x < \dfrac{-\pi}{2} \text{ ise} \\ 2\sin x & \dfrac{-\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ise} \\ -2\sin x + 4 & \dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{3\pi}{2} \text{ ise} \\ 2\sin x + 8 & \dfrac{3\pi}{2} \le x < \dfrac{5\pi}{2} \text{ ise} \\ -2\sin x + 12 & \dfrac{5\pi}{2} \le x < \dfrac{7\pi}{2} \text{ ise} \\ \ldots & \end{cases} \right)}_{F(x)} + C$$

olduğu bulunur.

$$\int_{-2\pi}^{\frac{13\pi}{4}} |2\cos x|\,dx = F(x)\Big]_{-2\pi}^{\frac{13\pi}{4}} = F\left(\frac{13\pi}{4}\right) - F(-2\pi) = \left(12+\sqrt{2}\right) - (-8) = 20+\sqrt{2} \text{ elde edilir.}$$

Problem -11

$f: R \to R;\ \ f(x) = \sqrt{1+\sin 2x}$ fonksiyonu veriliyor.

$\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$ integralini bulunuz.

Çözüm

$$\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = \int |\sin x + \cos x|\,dx = I$$

İntegrand, esas periyodu π olan bir fonksiyondur. Mutlak değer sembolünün içinin esas periyodu ise 2π'dir.

$$I = \int |\sin x + \cos x|\,dx = \begin{cases} \int (\sin x + \cos x)\,dx & \frac{-\pi}{4} + k\cdot 2\pi \le x < \frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi \ \text{ ise} \\ \int (-\sin x - \cos x)\,dx & \frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi \le x < \frac{7\pi}{4} + k\cdot 2\pi \ \text{ ise} \end{cases}$$

$$I = \int |\sin x + \cos x|\,dx = \begin{cases} -\cos x + \sin x + C_1 & \frac{-\pi}{4} + k\cdot 2\pi \le x < \frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi \ \text{ ise} \\ \cos x - \sin x + C_2 & \frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi \le x < \frac{7\pi}{4} + k\cdot 2\pi \ \text{ ise} \end{cases}$$

İntegral alma işlemi tamamlanmış gibi görünüyor. Bulduğumuz, I fonksiyonlar kümesinin türevinin kuralının $|\sin x + \cos x|$ ya da $\sqrt{1+\sin 2x}$ olacağı açıktır. Ancak; her x reel sayısı için türevin var olabilmesi, I fonksiyonlar kümesinin sürekli fonksiyonlardan oluşmasına bağlıdır. C_1 ve C_2 sabitlerine uygun değerler verilerek sürekli bir fonksiyonlar kümesi aranabilir.

Bu işlemleri kolaylaştırmak için, I fonksiyonlar kümesini k'ya bağlı değil de değişim aralıklarını ayrı ayrı belirterek yazalım:

$$I=\int\left|\sin x+\cos x\right|dx=\begin{cases}\ldots & \\ -\cos x+\sin x+C_1 & \frac{-9\pi}{4}\le x<\frac{-5\pi}{4}\ \text{ ise}\\ \cos x-\sin x+C_2 & \frac{-5\pi}{4}\le x<\frac{-\pi}{4}\ \text{ ise}\\ -\cos x+\sin x+C_3 & \frac{-\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{4}\ \text{ ise}\\ \cos x-\sin x+C_4 & \frac{3\pi}{4}\le x<\frac{7\pi}{4}\ \text{ ise}\\ -\cos x+\sin x+C_5 & \frac{7\pi}{4}\le x<\frac{11\pi}{4}\ \text{ ise}\\ \ldots & \end{cases}$$

Sürekliliğin sağlanması için; $C_3=C$ seçildiğinde $C_2=-2\sqrt{2}+C$, $C_4=2\sqrt{2}+C$, $C_3=-4\sqrt{2}+C$, $C_5=4\sqrt{2}+C$ ... olarak seçilmesi gerekir.

$$I=\int\left|\sin x+\cos x\right|dx=\underbrace{\left(\begin{cases}\ldots & \\ -\cos x+\sin x-4\sqrt{2} & \frac{-9\pi}{4}\le x<\frac{-5\pi}{4}\ \text{ ise}\\ \cos x-\sin x-2\sqrt{2} & \frac{-5\pi}{4}\le x<\frac{-\pi}{4}\ \text{ ise}\\ -\cos x+\sin x & \frac{-\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{4}\ \text{ ise}\\ \cos x-\sin x+2\sqrt{2} & \frac{3\pi}{4}\le x<\frac{7\pi}{4}\ \text{ ise}\\ -\cos x+\sin x+4\sqrt{2} & \frac{7\pi}{4}\le x<\frac{11\pi}{4}\ \text{ ise}\\ \ldots & \end{cases}\right)}_{F(x)}+C$$

I kümesindeki fonksiyonların her biri süreklidir.

Dolayısıyla; $\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx=F(x)+C$ yazılabilir.

Problem -12

$f: R \to R;\ \ f(x) = \sqrt{1+\sin 2x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

$f: R \to R;\ \ f(x) = \sqrt{1+\sin 2x} = |\sin x + \cos x|$

fonksiyonu periyodik bir fonksiyon olup esas periyodu π'dir.

$\sin x + \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

Mutlak değer sembolünün içinin sıfıra eşit olduğu noktaları dikkate alarak, $y = f(x)$ fonksiyonun grafiğini $\left[\frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ aralığında çizip bununla grafiği tamamlayalım:

$x \in \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \quad \Rightarrow \quad \sin x + \cos x \geq 0$ olup bu aralıkta $y = f(x) = \sin x + \cos x$ olur.

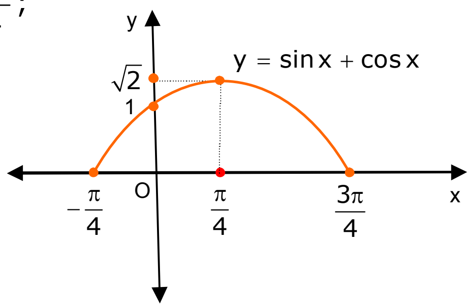
$y' = \cos x - \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4};$

$y'' = -\sin x - \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{\pi}{4}$ ve $x_2 = \frac{3\pi}{4};$

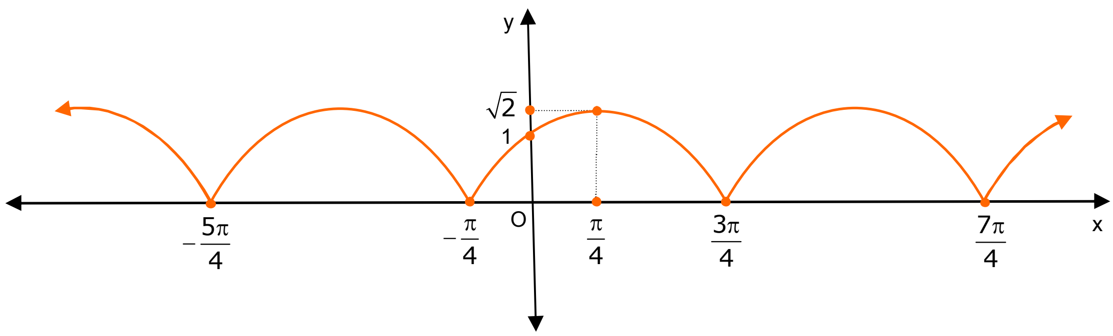
$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0;\quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0;$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2};\quad f''\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0;$

$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2};\quad f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$



$f: R \to R;\ \ f(x) = \sqrt{1+\sin 2x}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:



Problem -13

$f : R \to R;\ \ f(x) = \sqrt{1+\sin 2x}$ fonksiyonu veriliyor.

$\int \sqrt{1+\sin 2x}dx = F(x) + C$ olduğuna göre,

$y = F(x)$ fonksiyonlarından birinin grafiğini çiziniz.

Çözüm

Problem-11'de; $\int \sqrt{1+\sin 2x}dx = \int \left|\sin x + \cos x\right| dx = F(x) + C$ eşitliğini sağlayan bir F fonksiyonunun,

$$F(x) = \begin{cases} \ldots & \\ -\cos x + \sin x - 4\sqrt{2} & \frac{-9\pi}{4} \le x < \frac{-5\pi}{4} \text{ ise} \\ \cos x - \sin x - 2\sqrt{2} & \frac{-5\pi}{4} \le x < \frac{-\pi}{4} \text{ ise} \\ -\cos x + \sin x & \frac{-\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{4} \text{ ise} \\ \cos x - \sin x + 2\sqrt{2} & \frac{3\pi}{4} \le x < \frac{7\pi}{4} \text{ ise} \\ -\cos x + \sin x + 4\sqrt{2} & \frac{7\pi}{4} \le x < \frac{11\pi}{4} \text{ ise} \\ \ldots & \end{cases}$$

olduğunu bulmuştuk.

$y = F(x)$ fonksiyonunun grafiği, $\left[\frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ aralığında tanımlı $F_1(x) = \sin x - \cos x$ fonksiyonunun grafiği ile $\left[\frac{-5\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}\right]$ aralığında tanımlı $F_2(x) = \cos x - \sin x - 2\sqrt{2}$ fonksiyonunun grafiğinin, x ekseni doğrultusunda π birim ve y ekseni doğrultusunda $4\sqrt{2}$ birim ötelenmeleri ile elde edilen grafiklerin birleşimi olur.

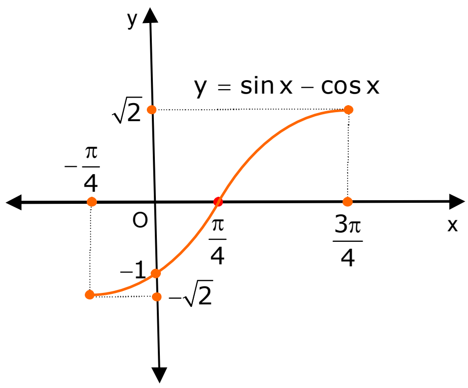
$F_1(x) = \sin x - \cos x = 0$ ise $x = \frac{\pi}{4}$;

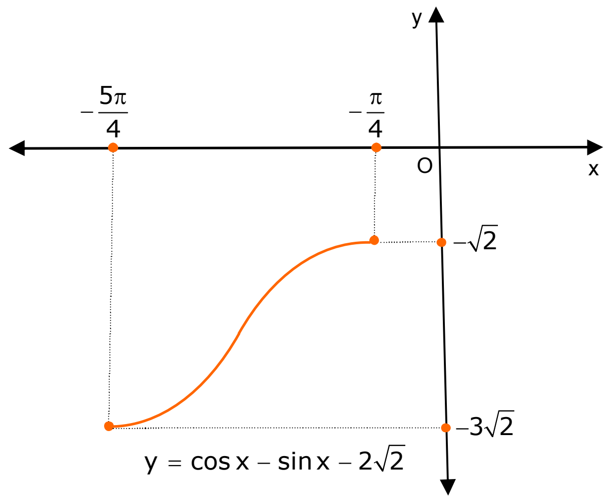
$F_1'(x) = \cos x + \sin x = 0$ ise $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ ve $x_2 = \frac{3\pi}{4}$;

$F_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$; $F_1'\left(\frac{-\pi}{4}\right) = F_1'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$; $F_1\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$; $F_1\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$;

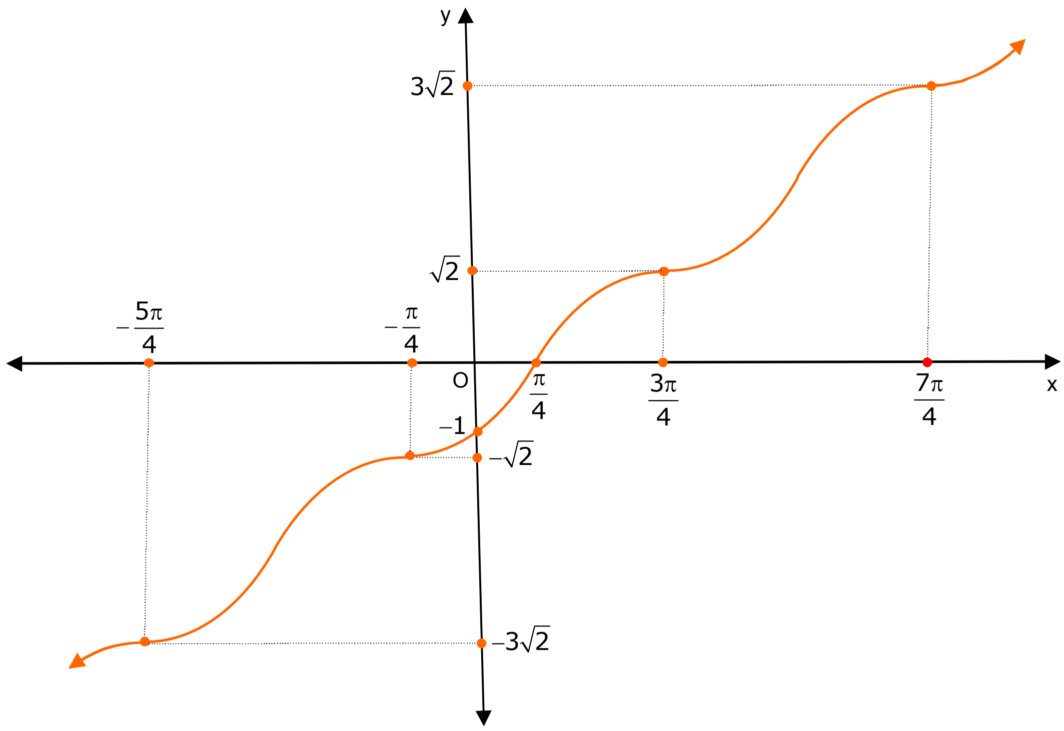
$F_2(x) = -F_1(x) - 2\sqrt{2}$

Buna göre; $y = F_1(x)$ ve $y = F_2(x)$ eğrilerinin grafikleri aşağıdaki gibi olurlar:





$y = F(x)$ fonksiyonunun grafiği de aşağıdaki gibi olur:



Problem -14

$f : R \to R;\ \ f(x) = \sqrt{1+\sin 2x}$ fonksiyonu veriliyor.

$\int\limits_{-\pi}^{\frac{9\pi}{4}} \sqrt{1+\sin 2x}dx$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$\int \sqrt{1+\sin 2x}dx = \int \left|\sin x + \cos x\right| dx$ olup f fonksiyonunun esas periyodu π'dir.

$\left[-\pi, \frac{9\pi}{4}\right] = \left[-\pi, 2\pi\right] \cup \left[2\pi, \frac{9\pi}{4}\right]$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\int\limits_{-\pi}^{\frac{9\pi}{4}} \left|\sin x + \cos x\right| dx = \int\limits_{-\pi}^{2\pi} \left|\sin x + \cos x\right| dx + \int\limits_{2\pi}^{\frac{9\pi}{4}} \left|\sin x + \cos x\right| dx$$

$$= 3 \cdot \int\limits_{0}^{\pi} \left|\sin x + \cos x\right| dx + \int\limits_{2\pi}^{\frac{9\pi}{4}} \left|\sin x + \cos x\right| dx$$

$$= 3 \cdot \left(\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\sin x + \cos x\right) dx + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \left(-\sin x - \cos x\right) dx \right) + \int\limits_{2\pi}^{\frac{9\pi}{4}} \left(\sin x + \cos x\right) dx$$

$$= 3 \cdot \left[\left(\sin x - \cos x\right)\Big]_0^{\frac{3\pi}{4}} + \left(\cos x - \sin x\right)\Big]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \right] + \left(\sin x - \cos x\right)\Big]_{2\pi}^{\frac{9\pi}{4}}$$

$$= 1 + 6\sqrt{2} \ \text{ bulunur.}$$

2. yol

$$\int |\sin x+\cos x|\,dx=\underbrace{\begin{cases} \ldots & \\ \cos x-\sin x-2\sqrt{2} & \dfrac{-5\pi}{4}\le x<\dfrac{-\pi}{4} \text{ ise} \\ -\cos x+\sin x & \dfrac{-\pi}{4}\le x<\dfrac{3\pi}{4} \text{ ise} \\ \cos x-\sin x+2\sqrt{2} & \dfrac{3\pi}{4}\le x<\dfrac{7\pi}{4} \text{ ise} \\ -\cos x+\sin x+4\sqrt{2} & \dfrac{7\pi}{4}\le x<\dfrac{11\pi}{4} \text{ ise} \\ \ldots & \end{cases}}_{F(x)}+C$$

olduğu bulunur.

$$\int_{-\pi}^{\frac{9\pi}{4}} |\sin x+\cos x|\,dx=F(x)\Big]_{-\pi}^{\frac{9\pi}{4}}=F\left(\frac{9\pi}{4}\right)-F(-\pi)=\left(4\sqrt{2}\right)-\left(-1-\sqrt{2}\right)=1+6\sqrt{2}$$ elde edilir.

Son Söz

Belirsiz integral kavramı **belirli integral**in hesaplanmasında büyük kolaylıklar sağlar. Ancak; parçalı tanımlı fonksiyonların belirli integrallerinin hesaplanmasında fonksiyonun tanım aralığının tamamında, belirsiz integralden yararlanmak uygun olmaz. Yani; f parçalı tanımlı iken, doğrudan doğruya $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ eşitliğini kullanabilmek amacıyla f fonksiyonunun ters türevi olan F fonksiyonunu bulmaya çalışmak çözümü uzatır. Bunu örneklerde gördük. Böyle integrallerde, tanım kümesinin tamamında değil de parçalarında ters türevden yararlanılmalıdır. Bunun da örneklerini verdik.

Parçalı fonksiyonların belirsiz integrallerini bulmak birer matematik problemi olarak sorulabilir tabii. Böyle sorulduğunda da işe belirli integral tarafından bakmamak gerekir.