PROVA ESCRITA DISCURSIVA DE MATEMÁTICA

PRIMEIRA PARTE - QUESTÕES DISCURSIVAS (70 pontos)

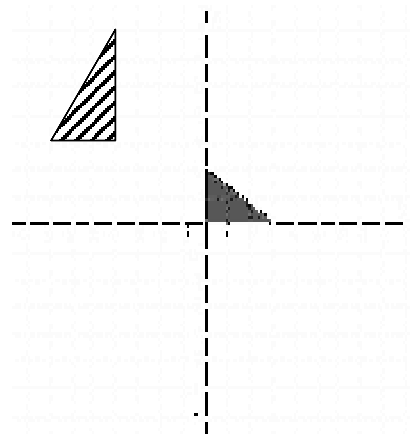
1ª QUESTÃO

Valor do item a: 04 pontos
Valor do item b: 04 pontos
Valor total da questão: 08 pontos

a) $T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$



b) área do triângulo inicial = $\frac{3 \times 2}{2} = 3$

área do novo triângulo = $\frac{3 \times 4}{2} = 6$

det A = $\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{vmatrix} = -2 - 0 = -2$

área do novo triângulo = |det A|×(área do triângulo inicial) = $|-2| \times 3 = 2 \times 3 = 6$

2ª QUESTÃO

Valor do item a: 04 pontos
Valor do item b: 04 pontos
Valor total da questão: 08 pontos

a) A(4, 0, 0) B(4, 4, 0) C(0, 4, 0) D(2, 2, 3)

$\overrightarrow{AD} = D - A = (-2, 2, 3)$ $\overrightarrow{CD} = D - C = (2, -2, 3)$ $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 4, 0)$

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} = (-4, 4, 0)$

$(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}) \times \overrightarrow{AB} = (0, 0, -16)$

$|(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}) \times \overrightarrow{AB}| = 16 = 4 \times 4$ = área do quadrado OABC

b) $\overrightarrow{AD} = (-2, 2, 3)$ e B(4, 4, 0)

Reta:

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-0}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{4-x}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{3}$$

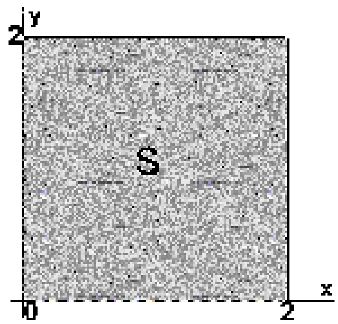
ou

$$\begin{cases} x = -2t + 4 \\ y = 2t + 4 \\ z = 3t \end{cases}, \ t \in R.$$

<u>3ª QUESTÃO</u>

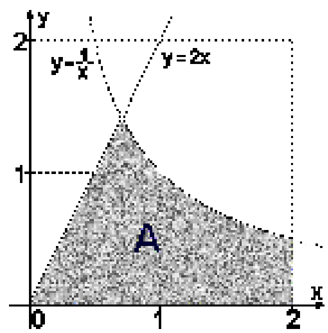
Valor do item a: 04 pontos
Valor do item b: 05 pontos
Valor do item c: 06 pontos
Valor total da questão: 15 pontos

a)



b) $x \cdot y \le 1 \;\Rightarrow\; y \le \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{y}{x} \le 2 \;\Rightarrow\; y \le 2x$

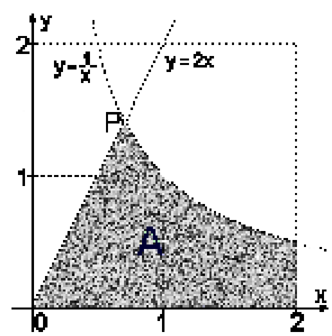


c) O ponto P é a intersecção de $y = 2x$ e $y = \dfrac{1}{x}$

$2x = \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; 2x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Então, $P\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

$P(A) = \dfrac{\text{área de A}}{\text{área de S}}$



$$\text{área de A} = \int_{0^+}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2x\,dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} \frac{1}{x}dx = x^2\Big|_{0^+}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \ell n\, x\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} = \frac{1}{2} + \ell n\, 2 - \ell n\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \ell n\, 2\sqrt{2}$$

área de S = $2 \times 2 = 4$

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2} + \ell n\, 2\sqrt{2}}{4} = \frac{1 + 2\ell n\, 2\sqrt{2}}{8} = \frac{1 + 2\ell n\, \sqrt{8}}{8} = \frac{1 + \ell n\, 8}{8} = \frac{1 + 3\ell n\, 2}{8}$$

4ª QUESTÃO

Valor total da questão: 07 pontos

A correção dependerá da situação-problema apresentada pelo candidato.

5ª QUESTÃO

Valor do item a: 04 pontos
Valor do item b: 05 pontos
Valor do item c: 05 pontos
Valor total da questão: 14 pontos

a) $1 - i = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

$$(1-i)^{15} = \left[\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]^{15} = \left(\sqrt{2}\right)^{15}\text{cis}\left(15\times\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left(\text{cis}\frac{105\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left(\text{cis}\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2^8}{2}(1+i) = 2^7(1+i)$$

b) $\cos 4x + i\,\text{sen}\,4x = (\cos x + i\,\text{sen}\,x)^4 = [(\cos x + i\,\text{sen}\,x)^2]^2 = (\cos^2 x + 2i\,\text{sen}\,x\cos x - \text{sen}^2 x)^2 =$

$= (\cos^4 x - 6\,\text{sen}^2 x\cos^2 x + \text{sen}^4 x) + i\,(4\,\text{sen}\,x\cos^3 x - 2\text{sen}^3 x\cos x)$

Então,

$\cos 4x = \cos^4 x - 6\,\text{sen}^2 x\cos^2 x + \text{sen}^4 x = \cos^4 x - 6(1 - \cos^2 x)\cos^2 x + (1 - \cos^2 x)^2 =$

$= \cos^4 x - 6\cos^2 x + 6\cos^4 x + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

c) Para n = 0:

$(\cos x + i\ \text{sen}\,x)^0 = \cos(0x) + i\ \text{sen}(0x)$

$1 = \cos(0) + i\text{sen}(0) = 1 + i\cdot 0 = 1 + 0 = 1$

Supondo a expressão válida para n, prove-se que valerá para $n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Pela hipótese da indução: $(\cos x + i\ \text{sen}\,x)^n = \cos(nx) + i\ \text{sen}(nx)$

Temos

$$(\cos x + i\ \text{sen}\,x)^{n+1} = (\cos x + i\ \text{sen}\,x)^n(\cos x + i\ \text{sen}\,x) = (\cos nx + i\ \text{sen}\,nx)(\cos x + i\,\text{sen}\,x) =$$

$$= (\cos nx\cdot\cos x - \text{sen}\,nx\cdot\text{sen}\,x) + i(\cos nx\cdot\text{sen}\,x + \cos x\cdot\text{sen}\,nx) =$$

$$= \cos(x + nx) + i\text{sen}(x + nx) = \cos(n+1)x + i\text{sen}(n+1)x$$

ou seja, a fórmula é válida vale para $n + 1$.

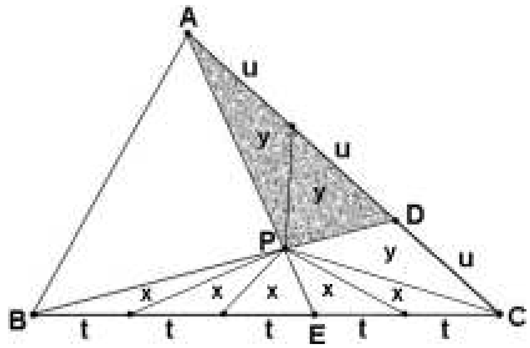
Então, pelo Princípio da Indução Finita, vale para $\forall n \in \mathbb{N}$.

6ª QUESTÃO

Valor total da questão: 07 pontos

1ª solução:

Com vértice no ponto P, temos 5 triângulos de base t, cuja área é x e temos 3 triângulos de base u, cuja área é y.



Observa-se que:

área do triângulo BCD = $\frac{1}{3}\Delta \quad \Rightarrow \quad 5x + y = \frac{1}{3}\Delta$

área do triângulo ACE = $\frac{2}{5}\Delta \quad \Rightarrow \quad 2x + 3y = \frac{2}{5}\Delta$

Temos o sistema:

$$\begin{cases} 5x + y = \frac{1}{3}\Delta \\ 2x + 3y = \frac{2}{5}\Delta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{65}\Delta \ \text{ e } \ y = \frac{4}{39}\Delta$$

A área pedida é $\delta = 2y = \frac{8}{39}\Delta$

2ª solução:

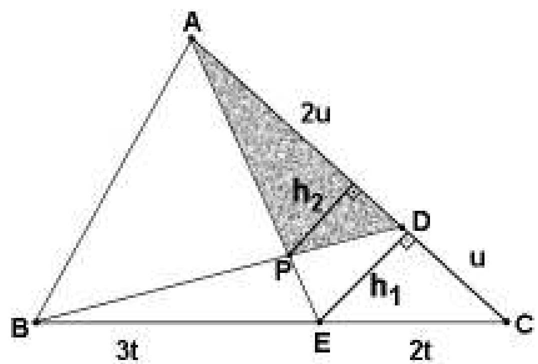
Aplicando o Teorema de Menelaus (triângulo AEC, segmento $\overline{BD}$):

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{PE}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = 1$$

$$\frac{2u}{u} \cdot \frac{\overline{PE}}{\overline{PA}} \cdot \frac{5t}{3t} = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{PE} = \frac{3}{10}\overline{PA}$$

$$\overline{AE} = \overline{PA} + \overline{PE} = \overline{PA} + \frac{3}{10}\overline{PA} = \frac{13}{10}\overline{PA}$$

$$\frac{AE}{PA} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{13}{10}$$



$$\frac{\text{área APD}}{\text{área AEC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2u \cdot h_2}{\frac{1}{2} \cdot 3u \cdot h_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{13} = \frac{20}{39} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{20}{39} \cdot \frac{2}{5}\Delta \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{8}{39}\Delta$$

7ª QUESTÃO

Valor do item a: 05 pontos
Valor do item b: 06 pontos
Valor total da questão: 11 pontos

a) Considere x_1 e x_2 números reais positivos. Então, temos que:

$$\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + x_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

b) $4x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{5}{4}$

Considere os números $\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{4}, \frac{r_3}{5}$ e $\frac{r_4}{8}$.

A média geométrica desses números é $\sqrt[4]{\frac{r_1}{2} \cdot \frac{r_2}{4} \cdot \frac{r_3}{5} \cdot \frac{r_4}{8}} = \sqrt[4]{\frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4}{320}} = \sqrt[4]{\frac{5/4}{320}} = \sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \frac{1}{4}$

A média aritmética desses números é $\frac{1}{4}\left(\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8}\right) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$

Como as duas médias são iguais, temos que $\frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{4} = \frac{r_3}{5} = \frac{r_4}{8} = \frac{1}{4}$

Assim,

$\frac{r_1}{2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{1}{2}$

$\frac{r_2}{4} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad r_2 = 1$

$\frac{r_3}{5} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad r_3 = \frac{5}{4}$

$\frac{r_4}{8} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad r_4 = 2$