COLÉGIO PEDRO II
DIRETORIA GERAL
SECRETARIA DE ENSINO

CONCURSO PÚBLICO PARA PROFESSORES DE 1º E 2º GRAUS
= 2007 =

PROVA ESCRITA DISCURSIVA DE MATEMÁTICA

PRIMEIRA PARTE - QUESTÕES DISCURSIVAS (70 pontos)

As questões devem apresentar desenvolvimento lógico, justificando as respostas dadas.

1ª QUESTÃO *(Valor total: 12 pontos)*

a) A $(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, B $(2\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$, C $(-3\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ e D $(-3\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

b) E $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$, F $(\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$, G $(-3\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ e H $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

$$\overrightarrow{HE} = (-4\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

$$\left|\overrightarrow{HE}\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+48} = \sqrt{51} = \left|\overrightarrow{EF}\right| = \left|\overrightarrow{FG}\right| = \left|\overrightarrow{GH}\right|$$

$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FG} = 0 = \overrightarrow{FG}.\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GH}.\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{HE}.\overrightarrow{EF} \Rightarrow$ Os vetores são perpendiculares

Logo os ângulos E,F,G e H são retos.

c) $\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{51}{2}$

2ª QUESTÃO *(Valor total: 8 pontos)*

a) gof : ***R*** → ***R*** dada por (gof)(x) = $\frac{x^2-1}{x^2+4}$

b) i) Zeros: x = ± 1

ii) Assíntotas: y=1

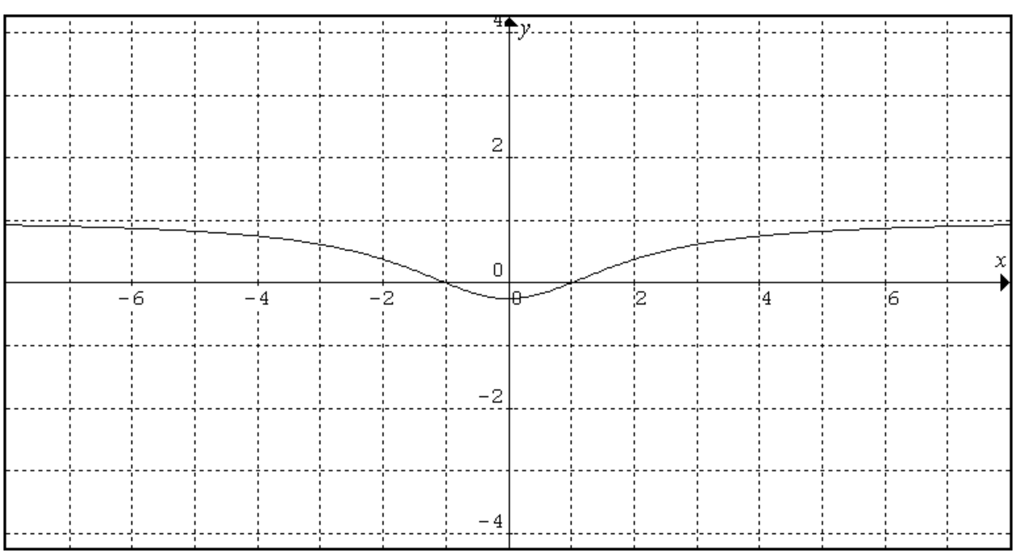
iii) M = (0 , $\frac{-1}{4}$) é um ponto de mínimo ; Não existem pontos de máximo.

I = ($\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{1}{16}$) e J = ($-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{1}{16}$) são pontos de inflexão.

iv) (gof) crescente em $\left]0;+\infty\right[$ e decrescente em $\left]-\infty,0\right[$

v) Conjunto Imagem: $\left[\frac{-1}{4};1\right[$

Esboço do gráfico:



3ª QUESTÃO *(Valor total: 11 pontos)*

a) Altura: 1,5 m e diâmetro: 4m

b) Raio: $\frac{4}{3}$ m e Altura; 0,5 m

c) Área sombreada: $\frac{1}{2}.(\sqrt{2}-\sqrt{6}+\frac{\pi}{3})$

4ª QUESTÃO *(Valor total: 8 pontos)*

a) Reta x = $\frac{-b}{2a}$

b) Parábola y = $-ax^2+c$.

5ª QUESTÃO *(Valor total: 4 pontos)*

Área do Retângulo: $\frac{2a^{\frac{1}{\log_u^a}}}{\log_u^a}.(a^{\frac{1}{\log_u^a}}-1).(a^{\frac{1}{\log_u^a}}+1)$

6ª QUESTÃO *(Valor total: 4 pontos)*

i) Para n = 2 temos: $S_2 = a_1 + a_2 = (a_1 + a_2) . \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ A propriedade é válida para n = 2

ii) Supondo valer para n $\geq$2, prove-se para n+1

$S_{n+1} = a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

Pela hipótese da indução: $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{(a_1+a_n)n}{2} + a_{n+1}$

Como a seqüência é uma PA:
$a_n = a_1 + (n-1).r = a_1 + nr - r$ e $a_{n+1} = a_1 + [\ (n+1) - 1\ ] . r = a_1 + nr$

$\Rightarrow S_{n+1} = \frac{(a_1+a_n)n}{2} + a_{n+1} = \frac{1}{2}[\ (a_1 + a_1 + nr - r\ ) . n] + a_1 + nr = \frac{1}{2}[\ (2a_1 + nr - r\ ) . n + 2a_1 + 2nr] =$

$\Rightarrow S_{n+1} = \frac{1}{2}[\ 2a_1n + n^2r - nr + 2a_1 + 2nr] = \frac{1}{2}[\ 2a_1n + 2a_1 + n^2r + nr] = \frac{1}{2}[\ 2a_1(n+1) + nr(n+1)] =$

$\Rightarrow S_{n+1} = \frac{1}{2}(2a_1 + nr) . (n+1) = \frac{1}{2}(a_1 + a_1 + nr) . (n+1) = \frac{1}{2}(a_1 + a_{n+1}) . (n+1)$

$\Rightarrow$ A propriedade é válida para n+1.
Pelo Princípio da Indução Finita, a propriedade em questão vale para qualquer natural n, n $\geq$2.

7ª QUESTÃO *(Valor total: 11 pontos)*

a) F = (a, 0) e F'=(-a, 0). P é o afixo de z = $r\,cis\,\theta \Rightarrow$ P tem coordenadas $(r\cos\theta, rsen\theta)$
De acordo com a definição da Lemniscata: P $\in$ Lemniscata $\leftrightarrow$ d(P,F) . d(P, F') = a^2

$$\Rightarrow \sqrt{(r\cos\theta - a)^2 + (rsen\theta - 0)^2} \ . \ \sqrt{(r\cos\theta + a)^2 + (rsen\theta - 0)^2} = a^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{r^2 - 2ar\cos\theta + a^2} . \sqrt{r^2 + 2ar\cos\theta + a^2} = a^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(r^2 + a^2)^2 - 4a^2r^2\cos^2\theta} = a^2 \Rightarrow r^4 + 2a^2 r^2 + a^4 - 4a^2 r^2 \cos^2\theta = a^4$$

$$\Rightarrow 2a^2 (2\cos^2\theta - 1) = r^2 \Rightarrow r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$

b) $z = acis\theta$ onde $\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in$ ***Z***

c) Qualquer polinômio que tenha como fatores (x - z_1), (x - $\overline{z_1}$), (x - z_2) e (x - $\overline{z_2}$) onde $z_1 = acis\frac{\pi}{6}$, $\overline{z_1} = acis\frac{11\pi}{6}$, $z_2 = acis\frac{5\pi}{6}$ e $\overline{z_2} = acis\frac{7\pi}{6}$, satisfaz às condições do problema.

8ª QUESTÃO *(Valor total: 4 pontos)*

Probabilidade = $\frac{15}{23}$

9ª QUESTÃO *(Valor total: 8 pontos)*

a) $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

$$P(\frac{p}{q}) = a_0 + a_1 \frac{p}{q} + a_2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 + ... + a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n = 0$$

$$a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + a_2 p^2 q^{n-2} + ... + a_n p^n = 0 \qquad (*)$$

De (*) $\Rightarrow$ $p(a_1 q^{n-1} + a_2 p q^{n-2} + ... + a_n p^{n-1}) = -a_0 q^n$ $\Rightarrow$ p divide $-a_0 q^n$

Como MDC (p,q)=1 então p não divide q^n. Logo p divide a_0

De (*) $\Rightarrow$ $q(a_0 q^{n-1} + a_1 p q^{n-2} + a_2 p^2 q^{n-3} + ... + a_{n-1} p^{n-1}) = -a_n p^n \Rightarrow$ q divide $-a_n p^n$

Como MDC (p,q)=1 então q não divide p^n. Logo q divide a_n

b) Como $a_n = 1$ e pelo item a) q divide a_n. Logo q divide 1. Como q é inteiro, q = $\pm$ 1. Conclui-se que as raízes racionais, se existirem, serão inteiros. Como o grau de P é ímpar, p admite raiz real. Logo, as raízes de P serão inteiras ou irracionais.

c) Raízes: 1, 2 e $\dfrac{-3 \pm i\sqrt{47}}{4}$