COLÉGIO PEDRO II

SECRETARIA DE ENSINO

CONCURSO PARA PROFESSORES DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO
~ 2007 ~

Reservado para Avaliação
1º Examinador: ....
2º Examinador: ....
3º Examinador: ....
4º Examinador: ....

PROVA ESCRITA DISCURSIVA

Antes de iniciar a prova, leia atentamente as seguintes instruções:

- Esta prova contém 9 (nove) questões e uma Dissertação. Verifique se este caderno de questões está completo.
- A prova terá a duração máxima de 05 (cinco) horas.
- Preencha as informações solicitadas no rodapé da folha, abaixo da linha pontilhada, **<u>único local autorizado para a identificação do candidato</u>**, sob pena de desclassificação, conforme previsto no Art. 13.6 do Edital nº 16/ 07.
- O candidato somente poderá retirar-se da sala onde se realiza a prova após decorridos 60 (sessenta) minutos do início da mesma.
- A interpretação dos enunciados faz parte da aferição de conhecimentos e da avaliação, não cabendo, portanto, esclarecimentos adicionais durante a realização da prova.
- **Será eliminado do Concurso Público o candidato que:**
  - **a) UTILIZAR-SE DE QUALQUER ARTIFÍCIO QUE O IDENTIFIQUE <u>EM QUALQUER ESPAÇO FORA DO RODAPÉ DESTA PÁGINA</u>;**
  - **b) usar, durante a realização da prova, máquina de calcular, rádios, gravadores, fones de ouvido, telefones celulares, *pagers*, equipamentos eletrônicos ou fontes de consulta/comunicação de qualquer espécie;**
  - **c) ausentar-se da sala sem assinar a lista de presença, diante do Fiscal.**
- A prova deverá ser respondida, <u>obrigatoriamente, com caneta esferográfica de tinta azul ou preta</u>.
- Os três últimos candidatos, ao entregarem suas provas, permanecerão em sala como testemunhas do encerramento dos trabalhos a cargo do Fiscal de Sala.
- Entregue o **<u>caderno de questões completo</u>** ao Fiscal ao término da prova.

AGUARDE AUTORIZAÇÃO PARA COMEÇAR A RESPONDER ÀS QUESTÕES.

....

Reservado para a Coordenação

NOME: (letra de forma) ....

ÁREA DE ATUAÇÃO/ CONHECIMENTO: MATEMÁTICA Nº DE INSCRIÇÃO: ....

ASSINATURA: ....

COLÉGIO PEDRO II
DIRETORIA GERAL
SECRETARIA DE ENSINO

CONCURSO PÚBLICO PARA PROFESSORES DE 1º E 2º GRAUS
= 2007 =

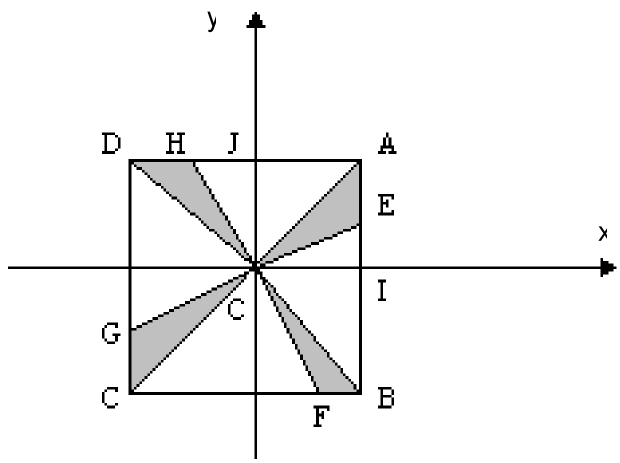
PROVA ESCRITA DISCURSIVA DE MATEMÁTICA

PRIMEIRA PARTE - QUESTÕES DISCURSIVAS (70 pontos)

As questões devem apresentar desenvolvimento lógico, justificando as respostas dadas.

1ª QUESTÃO *(Valor total: 12 pontos)*

Na figura abaixo, ABCD e AIOJ são quadrados. Os segmentos AE, BF, CG e DH são congruentes de medidas iguais a $\sqrt{3}$, sendo E o ponto médio do segmento AI.



a) Determine as coordenadas dos pontos A, B, C e D, sabendo que, retirando a região sombreada do quadrado ABCD, a figura restante possui área igual a 60 u.a.

b) Mostre que o quadrilátero determinado pelos pontos EFGH é um quadrado.

c) Obtenha a equação da circunferência circunscrita ao quadrado EFGH.

2ª QUESTÃO *(Valor total: 8 pontos)*

Sejam as funções f : ***R*** → ***R*** e g : ***R*** – {–3} → ***R*** definidas por f(x) = $x^2 + 1$ e g(x) = $\frac{x-2}{x+3}$.

a) Determine a função composta $g \circ f$.

b) Faça um esboço do gráfico da função $g \circ f$, identificando:

I. os zeros;
II. as assíntotas;
III. os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão;
IV. os intervalos de crescimento e decrescimento;
V. o conjunto imagem.

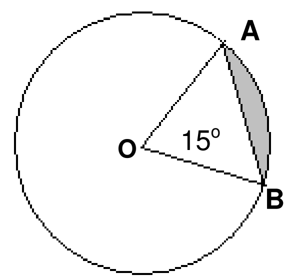
3ª QUESTÃO *(Valor total: 11 pontos)*

Num cone circular reto Ω, as dimensões da geratriz, do raio da base e da altura estão, nessa ordem, em progressão aritmética. Ao calcular o volume de Ω, usou-se, erradamente, a fórmula do volume do cilindro circular reto de mesmo raio e mesma altura do cone, obtendo-se um erro de 4π m^3.

a) Calcule a medida da altura e do diâmetro da base desse cone.

b) Deseja-se inscrever em Ω um cilindro circular reto. Determine as dimensões desse cilindro (raio da base e altura) de modo que seu volume seja máximo.

c) Na circunferência de centro O, base de Ω, marcam-se os pontos A e B tal que o ângulo AÔB mede 15°, conforme mostra a figura abaixo. Calcule a área da região sombreada, compreendida entre o segmento $\overline{AB}$ e o arco AB.



4ª QUESTÃO *(Valor total: 8 pontos)*

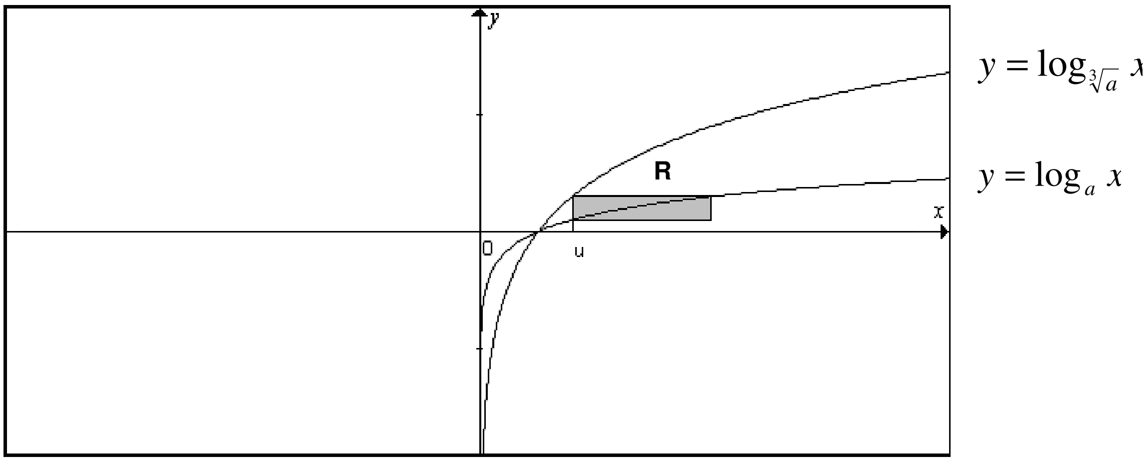
Considere a função quadrática f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, cujo gráfico no plano cartesiano é uma parábola. Determine o lugar geométrico dos pontos que são vértices das parábolas obtidas quando:

a) fixados os valores de a e de b, varia-se o valor de c.

b) fixados os valores de a e de c, varia-se o valor de b.

5ª QUESTÃO *(Valor total: 4 pontos)*

Para $a > 0$, $a \neq 1$ e $u > 1$, considere os gráficos das funções $y = \log_{\sqrt[3]{a}} x$ e $y = \log_a x$, $x > 0$, apresentados abaixo. Obtenha uma expressão algébrica para a área do retângulo **R,** em função de $\log_u a$.

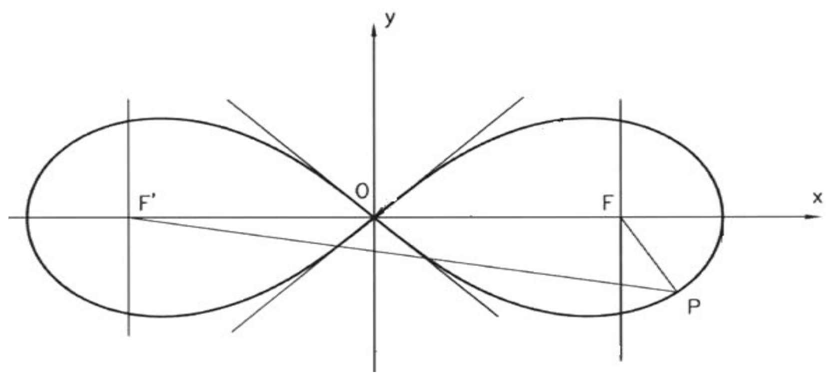


6ª QUESTÃO *(Valor total: 4 pontos)*

Considere a progressão aritmética (a_1, a_2, a_3,..., a_n, ...) . Usando o Princípio da Indução Finita, prove que a soma S_n dos seus **n** primeiros termos é dada por $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, $n \geq 2$.

7ª QUESTÃO *(Valor total: 11 pontos)*

Considere a *Lemniscata* no plano de Argand-Gauss, definida como o lugar geométrico de todos os pontos P para os quais o produto das distâncias a dois pontos fixos F = (a, 0) e F'= (-a, 0) tem valor constante a^2.



a) De acordo com a definição apresentada acima, mostre que a equação da *Lemniscata* é dada por $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$, onde P é o afixo de z = $r\,cis\,\theta$.

b) Obtenha os números complexos determinados pela interseção da *Lemniscata* com o conjunto $\{ z \in \boldsymbol{C} \mid |z| = a \}$.

c) Apresente um polinômio que tenha como raízes os números complexos obtidos no item b.

8ª QUESTÃO *(Valor total: 4 pontos)*

A probabilidade de que minhas férias sejam em janeiro é de 60%. Tirando férias em janeiro, tenho 50% de probabilidade de viajar de avião. Se minhas férias forem em outro mês diferente de janeiro, esta probabilidade cai para 40%. Sabendo que viajei de avião no ano passado, qual a probabilidade de ter tirado férias em janeiro?

9ª QUESTÃO *(Valor total: 8 pontos)*

Considere $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ um polinômio com coeficientes inteiros.

a) Prove que se um número racional $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, $mdc(p,q) = 1$ é tal que $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ então p é um divisor de a_0 e q é um divisor de a_n .

b) Utilize o resultado anterior para concluir que, se $a_n = 1$ e n é ímpar então as raízes de $P(x)$ são inteiras ou irracionais.

c) Resolva, no conjunto dos números complexos, a equação $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 15x + 14 = 0$.

SEGUNDA PARTE - DISSERTAÇÃO (30 pontos)

Desenvolva o tema sorteado sob a forma de Dissertação, utilizando, no mínimo, três páginas e, no máximo, cinco. Se desejar, utilize as folhas de rascunho, sem destacá-las do corpo da prova. Entretanto, **para efeito de avaliação, o rascunho não será considerado**.

TEMAS PARA DISSERTAÇÃO

1) Múltiplos e Divisores
2) Polígonos Regulares
3) Seqüências Numéricas
4) Trigonometria
5) Análise Combinatória
6) Sistemas Lineares
7) Funções Polinomiais
8) Pirâmides
9) Transformações em $\boldsymbol{R}^2$
10) Vetores em $\boldsymbol{R}^3$