CIRO BRAGA

O PROCESSO INICIAL DE DISCIPLINARIZAÇÃO DE FUNÇÃO NA MATEMÁTICA DO ENSINO SECUNDÁRIO BRASILEIRO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2003

CIRO BRAGA

O PROCESSO INICIAL DE DISCIPLINARIZAÇÃO DE FUNÇÃO NA MATEMÁTICA DO ENSINO SECUNDÁRIO BRASILEIRO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação do* ***Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente****.*

PUC/SP
São Paulo
2003

Banca Examinadora

AGRADECIMENTOS:

Um galo sozinho não tece uma manhã:
ele precisará sempre de outros galos.
De um que apanhe esse grito que ele
e o lance a outro; de um outro galo
que apanhe o grito que um galo antes
e o lance a outro; e de outros galos
que com muitos outros galos se cruzem
os fios de sol de seus gritos de galo,
para que a manhã, desde uma teia tênue,
se vá tecendo, entre todos os galos.

(João Cabral de Melo Neto)

Este trabalho é resultado do compartilhamento de conhecimentos propiciado pelos professores desse Programa de Pós-Graduação – agradeço a todos.

Especificamente, foram relevantes e enriquecedoras as observações e sugestões feitas, por ocasião da qualificação, pelos professores doutores Mirian Jorge Warde e Paulo Leite – espero ter correspondido.

Em especial, gostaria de registrar o meu reconhecimento pela orientação do Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente – daquelas pessoas que, a cada dia, mais se fazem admirar.

DEDICATÓRIA:

(continuação)

E se encorpando em tela, entre todos,
se erguendo tenda, onde entrem todos,
se entretendendo para todos, no toldo
(a manhã) que plana livre de armação.
A manhã, toldo de um tecido aéreo
que, tecido, se eleva por si: luz balão.

(João Cabral de Melo Neto)

Para Mirian, Marcela, Felipe e Thiago - sem os quais não há beleza nas manhãs.

RESUMO

O objeto de nosso estudo, o processo inicial de disciplinarização de *função* na disciplina *matemática*, está diretamente vinculado à criação, em 1929, de uma nova disciplina escolar denominada *matemática*, resultante da unificação de três outras: a aritmética, a álgebra e a geometria. Essa fusão foi feita a partir de uma referência internacional, cujo epicentro encontrava-se nas idéias do renomado matemático alemão Felix Klein, que propunha, ao lado da introdução do Cálculo Infinitesimal, uma renovação no ensino secundário. Tal transformação estrutural da nossa matemática escolar foi referendada, em 1931, por uma reforma educacional - a Reforma Francisco Campos. O principal mentor e articulador dessa transformação do ensino de matemática no Brasil foi Euclides Roxo que, além de professor e diretor do Colégio Pedro II do Rio de Janeiro, tornou-se autor de vários didáticos que reservavam à *função* um papel de destaque. Para os seus primeiros volumes inovadores, Roxo apropriou-se também de concepções do professor norte-americano Ernst Breslich, que são objetos de estudo no capítulo III. No capítulo seguinte é feita uma análise dos livros didáticos brasileiros mais representativos do período de vigência da Reforma Francisco Campos. Alicerçados, principalmente, nas concepções dos pesquisador francês Chervel sobre o funcionamento das disciplinas escolares e apoiados em levantamentos sobre a recepção dos princípios do movimento modernizador em outros países, como a França e Alemanha, concluímos ser possível estabelecer-se um novo olhar para os resultados da empreita de Euclides Roxo em introduzir *função* entre os conteúdos da nossa matemática escolar secundária.

Palavras-Chave: Função, Cálculo Infinitesimal, Felix Klein, Euclides Roxo e Ernst Breslich

ABSTRACT

The purpose of our study, the disciplinary initial process of the function in the mathematics discipline is linked to the creation, in 1929, of a new school discipline denominated *mathematics*, resulting from the union of other three: arithmetic, algebra and geometry. This merger was done from an international reference, whose epicenter was in the ideas of the well-known German mathematician Felix Klein, who proposed together with an introduction of Infinitesimal Calculation, a renewal in high school teaching. Such structural transformation in our schooling mathematics was attested, in 1931, for an educational reform – Francisco Campos Reform. The main counsellor and articulator of the mathematics teaching transformation in Brazil was Euclides Roxo, who in addition to being a teacher and the principal of Colégio Pedro II in Rio de Janeiro, became the author of several school text-books that had an outstanding role to the *function*. To his first innovative volumes, Roxo has also taken the conceptions from a North American professor, Ernst Breslich, which are the subject matters in chapter III. In the following chapter, it is done an analysis of the most representative Brazilian school books during the period in which Francisco Campos Reform was in effect. Grounded mainly on the conceptions of the French researcher Chervel about the functioning of the school disciplines and supported on surveys about acceptance of modernizing movement principles in other countries, such as France and Germany, we conclude that it is possible to have a new look through the results of Euclides Roxo's work in introducing *function* into the contents of our secundary schooling mathematics.

Keywords: Function, Infinitesimal Calculation, Felix Klein, Euclides Roxo and Ernst Breslich.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente dissertação tem por objetivo primordial estudar como se deu o processo inicial de disciplinarização de *função* na disciplina *matemática* do ensino secundário brasileiro. Talvez não haja nenhum outro conteúdo tão intimamente ligado aos movimentos inovadores do ensino da *matemática* quanto esse, seja na sua introdução, por volta de 1930, seja no contexto estruturalista da Matemática Moderna, ou mesmo, no refluxo desse movimento.

Tal refluxo abriu espaço para a volta da valorização das noções de variação e dependência funcionais, conceitos relevantes por ocasião da inserção de tal tema entre os conteúdos da *matemática* secundária e praticamente abandonados na Matemática Moderna. Ademais, renovou o caráter integrador das diversas representações de função quanto à sua atuação no estabelecimento de conexões com as diversas partes da matemática, com as outras ciências e, também, com situações do cotidiano dotadas de significação real para o educando.

Essa relação de função com a vida cotidiana moderna chegou a tal ponto, que passou a fazer parte de critérios de alfabetismo matemático. A título de ilustração, pode-se citar as classificações utilizadas na pesquisa *Inaf* (Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional) realizada, em novembro de 2002, pelo Instituto Paulo Montenegro, co-organizada pela ONG Ação Educativa, que teve a professora Maria da Conceição Fonseca da Universidade Federal de Minas Gerais como consultora.

O trabalho objetivava conhecer o nível brasileiro de alfabetismo funcional em matemática. Para isso, foi criado o *Inaf* e foram estabelecidos, para avaliar a funcionalidade das habilidades básicas em matemática, os seguintes níveis de referência:

- *analfabetismo matemático*, nível em que as pessoas não demonstram dominar nem sequer as habilidades mais simples e básicas, como ler o preço de um produto ou anotar um número ditado por outras pessoa;

- *nível 1 de alfabetismo matemático*, em que as pessoas conseguem ler as horas, medir com fitas métricas, verificar dias em calendários e outras atividades similares;

- *nível 2 de alfabetismo matemático*, em que, além da habilidades requeridas no nível anterior, as pessoas são capazes de comparar números decimais que se referem a preços, efetuarem operações de adição, subtração e mesmo uma multiplicação, muitas vezes com calculadora, e , por fim, identificar a existência de relação proporcional direta e inversa;

- *nível 3 de alfabetismo matemático*, em que, além das habilidades requeridas nos níveis anteriores, as pessoas conseguem resolver problemas que demandam uma série de operações, fazer cálculos proporcionais e demonstrar certa *familiaridade com algumas representações como mapas tabelas e gráficos*.

O levantamento ouviu 2.000 pessoas de 15 a 64 anos – em uma amostragem de todas as classes sociais e níveis escolares. O resultado da enquete, publicado pelos jornais *O Estado de São Paulo*, em 18 de dezembro de 2002, e *Folha de São Paulo*, em 25 de fevereiro de 2003, é o que se segue:

	Analfabetismo matemático	***nível 1***	***nível 2***	***nível 3***
até 3ª série do fundamental	13%	64%	21%	2%
da 4ª à 7ª série do fundamental	-	38%	50%	12%
ensino fundamental completo ou médio incompleto	-	16%	59%	25%
ensino médio completo ou mais	-	5%	38%	56%
população brasileira	3%	32%	44%	21%

Embora essa pesquisa Inaf tenha um caráter pragmático e primeiro de atender a uma necessidade da Ong Ação Educativa, ela não deixa de revelar a importância conferida às representações funcionais tabular e gráfica ao estabelecer que o *nível 3 de alfabetismo matemático* avalia também uma certa familiaridade do pesquisado com a interpretação de tabelas e gráficos. Esse fato mostra a importância dessas representações de função quanto à inclusão social do indivíduo, a ponto de ele não ser considerado plenamente alfabetizado em termos matemáticos, se não tiver relativo domínio sobre elas. Seguramente, o avanço de um educando em direção a um conhecimento maior do conceito de função, deverá levá-lo a uma compreensão melhor de seu dia-a-dia, disponibilizando-lhe ferramentas úteis ao exercício de sua cidadania. Função, sem dúvida, é um conteúdo de relevância incontestável na matemática escolar.

Cabe ressaltar que as representações tabular e gráfica referidas no *nível 3* historicamente precederam à algébrica. As primeiras idéias de funcionalidade remontam aos babilônios quando do estabelecimento de tabelas sexagesimais de quadrados e raízes quadradas, de cubos e raízes cúbicas, e outras. Já, o embrião da representação gráfica surgiu em 1360, com Nicole Oresme, com a apresentação da latitude das formas que tinha um caráter qualitativo. Essa representação é retomada por Galileu (1564-1642) e, finalmente, assume sua forma consolidada com Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665).

Quanto à representação algébrica de função, o percurso de seu desenvolvimento tem o início vinculado também a Fermat e Descartes que, dispondo das notações de Viète, já afirmava que uma equação em x e y era um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de modo a permitir o cálculo de valores de uma delas correspondendo aos valores da outra.

Em 1673, Leibniz introduz a palavra função e entre as várias contribuições dos matemáticos dos séculos XVII, XVIII e XIX, chegamos, em 1837,por meio de Dirichlet, a uma definição ampla de função:

> Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma

> regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável x. (BOYER, 1974, p. 405).

A definição de Dirichlet e as variações em torno dela atenderam por algum tempo às demandas do desenvolvimento da Matemática. No entanto, já nas últimas décadas do século XIX, sentia-se a necessidade de uma ampliação da definição de função para além dos conjuntos numéricos. Essa carência é suprida com a formalização de uma nova conceituação explicitada pelo grupo Bourbaki através da Teoria dos Conjuntos na segunda metade dos anos 30 do século XX. A partir dessa definição, Bourbaki apresenta uma nova visão das *Operações* e constrói as *Estruturas Algébricas*.

Nos anos 60 do século XX, o movimento da Matemática Moderna adota a concepção estrutural de função de Bourbaki cujas conseqüências no ensino tornaram-se alvo de muitos estudos. Quanto a esses estudos, num breve painel, destacamos primeiramente uma observação de Kieran (1992) assinalando que, com o advento da Matemática Moderna, a idéia de dependência funcional foi, infelizmente, eliminada da definição corrente de função. E acrescenta:

> Em quase todos livros didáticos de Álgebra, uma função é agora definida como uma relação entre elementos de dois conjuntos (não necessariamente numéricos) ou membros do mesmo conjunto, tal que cada elemento do domínio tenha apenas uma imagem. Algumas definições modernas incluem menção a uma regra; porém, a noção de dependência se foi. Assim, o ensino de funções em classes de Álgebra tende a enfatizar interpretações estruturais mais do que processuais. (KIERAN, 1992, p.38).

Kieran prossegue em seu texto relatando que a pesquisadora Sfard planejou um curso meticuloso em que o conceito de função foi ensinado para uma classe de jovens adultos e descobriu que a transição da abordagem processual para a estrutural encontrava resistência e falta de compreensão: a idéia de função não computável, quando mencionada explicitamente, despertava perplexidade e oposição. Sfard chegou a afirmar que:

> [...] nossa tentativa de promover a concepção estrutural não pode ser vista como um sucesso total. [...] a reificação é inerentemente tão difícil que talvez haja estudantes para os quais a concepção estrutural permanecerá fora de alcance qualquer que seja o método de ensino. (SFARD, 1989, p. 158).

Diante das insatisfações, o movimento da Matemática Moderna refluiu e, hoje, as concepções recomendadas de abordagem do conceito de função guardam grande semelhança com as realizadas há mais de setenta anos, quando da sua introdução na disciplina matemática.

Para ilustrar essa convergência de concepções, reproduziremos dois textos, um dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), de 1999, e outro das Instruções Pedagógicas da Reforma Francisco Campos, de 1931.

> O critério central [...] é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático [...].
>
> Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. [...] As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo

de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia.(BRASIL, 1999, p.255)

(PCN – Ensino Médio, 1999)

A Matemática será sempre considerada como um conjunto harmônico cujas partes estão em viva e íntima correlação. A acentuação clara dos três pontos de vista – aritmético, algébrico e geométrico – não deve, por isso, estabelecer barreiras intransponíveis, que impeçam o estudante de perceber as conexões entre aquelas disciplinas.

Para dar unidade à matéria, estabelecendo-se essa estreita correlação entre as diversas modalidades do pensamento matemático, será adotada, como idéia central do ensino a noção de função, apresentada, a princípio, intuitivamente e desenvolvida, nas séries sucessivas do curso, de modo gradativo, tanto sob a forma geométrica como sob a analítica.

[...]O ensino da Matemática será sempre animado com a acentuação dos vínculos existentes entre a matemática e o conjunto das demais disciplinas. Aludir-se-á constantemente às suas aplicações no domínio das ciências físicas e naturais, bem como no campo da técnica, preferindo-se exemplos e problemas que interessam às cogitações dos alunos.(Portaria Ministerial de 30 de junho de 1931, apud BICUDO, 1942, p. 157-158).

(Instruções Pedagógicas – Reforma Francisco Campos,1931)

A identidade de concepções sinalizada por esses dois textos toma mais corpo ainda, se analisarmos um princípio do movimento de modernização do ensino de matemática do início do século XX que consistia em trabalhar de modo paulatino e gradativo com o aluno, ao longo de todo o curso secundário, o *pensamento funcional.* Esse princípio, que será objeto de detalhamento no capítulo III, incluía, entre outros aspectos, desenvolver no educando as capacidades de reconhecer a variação e a dependência entre grandezas, de interpretar as diferentes representações de função e por elas transitar com relativo desembaraço. Tais habilidades inerentes ao pensamento funcional são valorizadas atualmente pelos PCNs e trabalhadas desde o 2º ciclo do Ensino Fundamental -sob o manto do tema *Tratamento da Informação -,* até a 3ª série do Ensino Médio - em *Números e Operações/ Álgebra e Funções*.

O breve painel levantado evidencia, por um lado, as diferentes abordagens por que passou *função* na disciplina *matemática*, e por outro lado sinaliza, de certa forma, um retorno à valorização de concepções vigentes por ocasião de sua implantação. Esse retorno, apesar de estarmos em contextos diferentes, sem dúvida, desperta e aguça o interesse de alguns pesquisadores em conhecer mais profundamente qual o papel inicial assumido e efetivamente desempenhado pelo saber em questão. Assim, cabe perguntar:

Como ocorreu o processo inicial de disciplinarização de *função* na disciplina *matemática* do ensino secundário brasileiro?

Tal questão identifica o problema de pesquisa deste estudo. Esperamos que o estudo empreendido neste trabalho com o intuito de responder a essa pergunta represente uma parcela de contribuição para outras pesquisas, de fôlego maior, que intentem estudar processos de escolarização de novos conteúdos da disciplina *matemática*.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

> ***"A teoria em si e por si para nada serve a não ser nos levar a crer na conexão dos fenômenos***."
>
> ***(Goethe)***

O objeto de nosso estudo, o processo inicial de disciplinarização de *função* na disciplina *matemática*, está diretamente vinculado à criação, concretizada no ano letivo de 1929, de uma nova *disciplina escolar* do ensino secundário brasileiro denominada *matemática*, resultante da unificação de três outras, até então, independentes, a aritmética, a álgebra e a geometria. Essa fusão é feita a partir de uma referência internacional, que será alvo de análise no capítulo III, cujo epicentro se encontra nas idéias do renomado matemático alemão Félix Klein, que propõe uma renovação nesse nível de ensino. Essa transformação estrutural da nossa matemática escolar é, em 1931, referendada por uma reforma educacional mais ampla, conhecida como Reforma Francisco Campos.

No texto acima, a exemplo do que irá ocorrer constantemente nesta dissertação, comparece o termo *disciplina escolar*. Sobre a importância de se precisar esse conceito, Bittencourt afirma:

> [...] é imperativo um posicionamento quanto à noção de *disciplina escolar* porque dela depende a fundamentação teórico-metodológica do pesquisador. (BITTENCOURT, 2003, p. 29, grifo nosso).

Nesse sentido, o conceito de *disciplina escolar* que julgamos adequado ao nosso estudo, sobretudo pelas características reinantes em nossa escola no período abarcado, as décadas de 20 e 30 do século XX, é o expresso por André Chervel, pesquisador do Service d'Histoire de l'Education – Institut National de Recherche Pédagogique (INRP), Paris, em *História das Disciplinas Escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa*.

Numa primeira aproximação, poder-se-ia dizer que "disciplinar um conteúdo", pela óptica de Chervel, significaria reconfigurá-lo, ou até mesmo configurá-lo dentro da Escola numa criação própria e original, de modo que possa ser utilizado pelos alunos como exercício intelectual que atenda a certas finalidades. Para isso, a Escola se utiliza de vários recursos, tais como, motivação, exercícios, métodos de avaliação, entre outros. Quanto maior for a adequação do conteúdo configurado ou reconfigurado a esses recursos e maior for o efetivo resultado apresentado no atendimento às finalidades que o instituíram, maior será a possibilidade de sucesso de sua "disciplinarização".

Sobre o termo *disciplina escolar*, Chervel salienta:

> Com ele, os conteúdos de ensino são concebidos como entidades *sui generis*, próprios da classe escolar, independentes, numa certa medida, de toda realidade cultural exterior à escola, e desfrutando de uma organização, de uma economia interna e de uma eficácia que elas não parecem dever a nada além delas mesmas, quer dizer à sua própria história. (CHERVEL, 1990, p. 180).

Chervel ressalta ainda que a palavra disciplina está diretamente relacionada a um modo de disciplinar o espírito, no sentido de lhe dar métodos e regras para abordar os diferentes domínios do pensamento e do conhecimento. E destaca que somente após os primeiros anos do século XX, é que se pode falar em disciplinas como matérias de ensino suscetíveis de servir ao exercício intelectual. Antes disso, não há senão um modo de formar os espíritos, não mais do que uma "disciplina", no sentido forte do termo: as humanidades clássicas permeadas do estudo das línguas antigas.

> Logo após a I Guerra Mundial, enfim o termo "disciplina" vai perder a força que o caracterizava até então. Torna-se uma pura e simples rubrica que classifica as matérias de ensino, fora de qualquer referência às exigências de formação do espírito. Basta dizer o quanto é recente o termo que utilizamos atualmente: no máximo uns sessenta anos. (CHERVEL, 1990, p.180).

De acordo com a conceituação de Chervel, os termos *aluno* e *disciplina escolar* tornam-se exclusivos de utilização no ensino primário e secundário.

> [...] a particularidade das disciplinas escolares consiste em que elas misturam intimamente conteúdo cultural e formação de espírito. Seu papel, elas não o exercem senão nas idades da formação, seja ela primária ou secundária. [...] Nada mais

> significativo deste ponto de vista que o emprego do termo aluno (éléve) para o primário e secundário.
>
> [...] A ligação entre “disciplina “ e aluno é clara. As disciplinas são esses modos de transmissão cultural que se dirigem aos alunos. Foi a existência das disciplinas que historicamente traçou o limite entre o secundário e o superior. (CHERVEL, 1990, p. 186).

Assim, para o pesquisador francês em questão, o uso da denominação *disciplinarização* não deveria ser empregada ao se referir ao ensino superior, já que este, pelo menos em tese, transmitiria o saber sem maiores adaptações.

> O que caracteriza o ensino de nível superior, é que ele transmite diretamente o saber. Suas práticas coincidem amplamente com suas finalidades. O mestre ignora aqui a necessidade de adaptar a seu público os conteúdos de acesso difícil, e de modificar esses conteúdos em função das variações de seu público [...]. Certamente, o ponto de vista um pouco esquemático aqui apresentado não leva em conta o fenômeno recente da “secundarização” do ensino superior. (CHERVEL, 1990, p. 185).

Quando acontece de ocorrer uma disciplinarização no ensino superior, emerge um flagrante declínio de sua qualidade. Sobre isso, Chervel observa que, quando do “tratamento disciplinar” dado à filosofia pela universidade francesa no século XIX, houve uma produção intelectual muito inferior à da filosofia alemã.

Cabe observar que há outros pesquisadores que, mesmo partilhando das concepções de disciplinarização de Chervel, não se revelam tão estritos quanto à acepção da palavra *disciplina*. Sobre essa ocorrência, Bittencourt cita Jean-Claude Forquin e Ivor Goodson:

> [...] os dois termos ‘disciplina’ e ‘matéria escolar’ são com freqüência utilizados indiferentemente, com, entretanto, uma

> nuance de sentido: o termo “matéria” é mais neutro, mais popular, mais “escolar” e mais “primário”, enquanto o termo “disciplina” se aplica mais aos níveis superiores dos cursos e implica sempre uma idéia de exercício intelectual e de formação de espírito. (FORQUIN, 1992, p. 29).

> Para Ivor Goodson existe uma distinção no que se refere ao termo disciplina. Disciplina é entendida como uma forma de conhecimento oriunda da tradição acadêmica e, para o caso das escolas primárias e secundárias, utiliza o termo *matéria escolar (school subjects).* (BITTENCOURT, 2003, p. 23).

Sobre a disciplinarização de um saber, haverá oportunidade, nesse trabalho, de se mostrar como Félix Klein, utilizando concepções do movimento renovador do início do século XX, consegue elaborar uma proposta bem sucedida para “disciplinarizar” o *Cálculo Inifinitesimal* entre os conteúdos do ensino secundário, após décadas de tentativas fracassadas de tal intento.

Em contrapartida, temos um exemplo mais recente no intento frustrado da Matemática Moderna de disciplinarizar as *Estruturas Algébricas* (Grupos, Anéis, Corpos) entre os conteúdos do ensino secundário. Sobre esse tipo de ocorrência, Chervel argumenta:

> [..] quando a escola recusa, ou expulsa depois de uma rodada, a ciência moderna, não é certamente por incapacidade dos mestres de se adaptar, é simplesmente porque seu verdadeiro papel está em outro lugar [...]. (CHERVEL, 1990, p. 182).

Até relativamente pouco tempo atrás, vingava a concepção de que as disciplinas escolares desenvolviam-se apoiadas em dois pilares separados: o primeiro seria constituído pelas combinações de saberes a serem transmitidos que, através de uma certa vulgarização ou simplificação, se tornariam acessíveis aos alunos; o outro pilar seria formado pelos métodos pedagógicos encarregados de “lubrificar” os mecanismos de ensino e aprendizagem.

Tal configuração conceitual é demolida por Chervel que através de uma análise histórica da gramática escolar na França, mostra não ser esse conteúdo uma simples vulgarização científica, mas sim uma criação feita pela escola para atender às suas necessidades. Observa que a gramática escolar não é mais do que um método pedagógico de aquisição da ortografia.

Assim, a pedagogia e os conteúdos escolares estariam entrelaçados. Segundo Chervel:

> Excluir a pedagogia dos estudo dos conteúdos, é condenar-se a nada compreender dos funcionamento real dos ensinos. A pedagogia, longe de ser um lubrificante espalhado sobre o mecanismo, não é senão um elemento desse mecanismo; [...]. (CHERVEL, 1990, p. 182).

Sobre o entrelaçamento entre conteúdo e pedagogia na matemática escolar, o estudo sistematizado dos casos de *fatoração algébrica* parece ser um exemplo típico. Esse assunto não representa diretamente a vulgarização de algum saber matemático específico. Trata-se de um conteúdo configurado pela Escola, para nela ser utilizado com finalidades metodológicas claras. Foi selecionado e estruturado metodicamente com um fim propedêutico: desenvolver um tipo de habilidade necessária para se chegar a patamares mais amplos da álgebra.

A respeito dos conteúdos curriculares, a história das disciplinas reserva-lhes um papel de destaque. Compreender o processo de escolha dos conteúdos estabelecendo relações entre eles e as finalidades que os instituíram é historicamente relevante, assim como a descrição e a interpretação dos resultados decorrentes de tal escolha. Sobre isso, Bittencourt observa:

> A seleção de conteúdos escolares depende intrinsecamente de finalidades específicas e, assim como os métodos, não são decorrentes dos objetivos das ciências de referência. A análise da história da disciplina escolar proposta por Chervel deve ser, então, problematizada relacionando três aspectos: a gênese da disciplina, seu(s) objetivo(s) e seu funcionamento. (BITTENCOURT, 2003, p.26).

Quanto às finalidades do ensino, elas são das mais diferentes ordens: cultural, sócio-política, psicológica, religiosa, comportamental, etc... A identificação, a classificação e a organização dessas finalidades fazem parte das atribuições da história das disciplinas escolares. Sobre a relevância das finalidades no ensino, Chervel salienta:

> A instituição escolar é, em cada época, tributária de um complexo de objetivos que se entrelaçam e se combinam [...]. O conjunto dessas finalidades consigna à escola sua função *educativa*. As disciplinas escolares estão no centro desse dispositivo. Sua função consiste em cada caso em colocar um conteúdo de instrução a serviço de uma finalidade educativa. (CHERVEL, 1990, p. 188).

No entanto, a educação é uma atividade complexa e não se reduz aos ensinamentos explícitos e programados, já que muitas finalidades não se concretizam e outras não constam do textos oficiais de maneira explícita. Além disso, cabe indagar quais intenções estão por trás das finalidades declaradas. Muitas vezes, configura-se uma séria distância entre os textos oficiais e as realidades educacionais. A história das políticas educacionais não é a história das disciplinas escolares. Este fato deve ser considerado pelos historiadores das disciplinas escolares quando da escolha das fontes. Sobre isso, Chervel ressalta:

> O estudo das finalidades não pode, pois, de forma alguma, abstrair os ensinos reais. Deve ser conduzido simultaneamente sobre os dois planos, e utilizar uma dupla documentação, a dos objetivos fixados e a da realidade pedagógica. (CHERVEL, 1990, p. 191).

Quanto ao processo de instauração e funcionamento de uma disciplina, ele se caracteriza por sua precaução, por sua lentidão e por sua segurança. Resulta de um amplo ajuste que envolve uma experiência pedagógica considerável. Por isso, o nascimento e a instauração de uma nova disciplina pode levar décadas.

Outro aspecto a ser observado é o que se refere ao fenômeno de recomposição das disciplinas escolares: algumas são agrupadas, outras segmentadas. Um exemplo que estará presente em quase todos capítulos dessa dissertação é o do agrupamento das disciplinas Aritmética, Álgebra e Geometria em uma nova, a Matemática. Um outro exemplo, mais recente, de agrupamento e segmentação que poderia ser salientado é o ocorrido com as disciplinas Estudos Sociais, História e Geografia.

Esse fenômeno da recomposição decorre de novos interesses, culturais, educacionais, sociais e políticos que definem novas finalidades para as disciplinas envolvidas.

A respeito da relação entre manuais escolares e a história das disciplinas escolares, cabe destacar uma conceituação formulada por Chervel que é a da formação da "*vulgata*". Tal concepção mostra seus préstimos quando do direcionamento a ser seguido na análise dos livros didáticos de um certo período.

Apesar desse termo latino, *vulgata*, num primeiro instante, poder remeter à idéia de vulgarização (trivialização) do saber, parece-nos que Chervel emprestou-o do Latim eclesiástico. Segundo Silveira Bueno:

> **Vulgata** – s. f. A edição da Bíblia, em latim, feita em grande parte por São Jerônimo, tornada mais vulgar na Igreja Católica. Lat. ecles. (*edítio, edição*) vulgata, isto é, divulgada. Veja o verbo vulgar.
>
> **Vulgar** – v. t. O mesmo que divulgar, tornar conhecido, propalar. É forma já em desuso se bem que foi clássica. Lat. vulgare. (SILVEIRA BUENO, 1988, v.8, p. 4297).

A partir dessas acepções, pode-se inferir que uma versão em Latim da Bíblia não a torna mais trivial, mas sim mais adaptada e universal quanto a seu trânsito por esferas de circulação existentes na Igreja Católica e, portanto, com maior potencial de divulgação nesse meio.

Assim, Chervel reserva o termo *vulgata* para indicar a padronização verificada nos manuais didáticos mais propalados de um certo período. Em cada período de estabilidade de uma disciplina escolar, aflora uma convergência de os livros didáticos apresentarem o mesmo corpus, o mesmo modelo de abordagem, os mesmos tipos de exercícios, a mesma terminologia, etc. As variações entre eles passam a ser cada vez menores e aqueles que estiverem distanciados da *vulgata* tenderão a não se propagarem no meio escolar.

Quando, por algum motivo, novas finalidades de ensino se impuserem, abrir-se-á espaço para uma reacomodação da disciplina escolar num outro patamar onde se forjará uma nova *vulgata* que intentará atender aos objetivos recém-fixados e, ao mesmo tempo, ganhar aceitação nas esferas de circulação a que é destinada. Segundo Chervel:

> A experiência elementar de todo historiador das disciplinas lhe ensina que as vulgatas evoluem ou se transformam. As exigências intrínsecas de uma matéria ensinada nem sempre se acomodam numa evolução gradual e contínua. A história das disciplinas se dá freqüentemente por alternância de patamares e de mudanças importantes, até mesmo de profundas agitações. Quando uma nova vulgata toma o lugar da precedente, um período de estabilidade se instala, que será apenas perturbado, também ele, pelas inevitáveis variações. (CHERVEL, 1990, p. 204).

No capítulo V desta dissertação procuraremos determinar a *vulgata* estabelecida nos anos 30 do século XX e analisar como o assunto função nela se acomodou. Sobre a determinação da *vulgata* e a sua importância para os estudiosos da história das disciplinas escolares, pode-se ressaltar a seguinte fala de Chervel:

> Cabe-lhe (ao historiador das disciplinas escolares), se não pode examinar minuciosamente o conjunto da produção editorial, determinar um corpus suficientemente representativo de seus diferentes aspectos. A prática, freqüente, de uma amostra totalmente aleatória não pode conduzir, e não conduz efetivamente, a não ser resultados frágeis, até mesmo caducos.(CHERVEL, 1990, p. 203).

Nesta dissertação, o capítulo IV será reservado para a análise de manuais didáticos. Esses livros devem ser entendidos não apenas como depositários de conteúdos disciplinares, mas principalmente como expressões de numerosos interesses, intenções, influências e intervenções. São produtos de um grupo social e de uma época determinada. Segundo Ossenbach e Somoza:

> Por serem (os manuais) elementos produzidos para serem usados nas escolas, constituem um dos eixos da própria atividade escolar, contêm uma ou várias concepções pedagógicas, tanto do próprio autor como dos que elaboraram a normativa correspondente. (OSSENBACH; SOMOZA, 2001, p. 23, tradução nossa).
>
> Os livros escolares são a resultante do trabalho e da participação do autor, do editor, do desenhista, do distribuidor, do mestre, das autoridades educativas, etc., e constituem um fenômeno pedagógico, porém também cultural, político, administrativo, técnico e econômico. (OSSENBACH; SOMOZA, 2001, p. 15).

Sobre a valorização dos manuais didáticos como fontes de pesquisa, Alain Choppin, do Service d'Histoire de l'Éducation – INRP Paris, salienta que foi no final dos anos 1970 quando se avivou entre os historiadores das disciplinas escolares o interesse por esses livros e, a respeito deles, assinala:

> São, aliás, os suportes das "verdades" que a sociedade crê que é necessário transmitir às jovens gerações. [...] Em outras palavras, o manual didático se apresenta como o suporte, o depositário dos conhecimentos e das técnicas que a juventude deve adquirir para perpetuação de seus valores. Os programas oficiais, quando existem, constituem a estrutura sobre a qual os manuais devem conformar-se estritamente. São vetores, meios de comunicação muito potentes cuja eficácia repousa sobre a importância de sua difusão e sobre a uniformidade do discurso que transmitem. (CHOPPIN, 2000, p. 109, tradução nossa).

A despeito da importância consignada aos livros didáticos pelos textos acima apresentados, cabe ressalvar que eles em si, mesmo ao lado dos planos curriculares e das instruções pedagógicas, espelham uma imagem apenas parcial do que ocorre com a disciplina escolar. Para se ter uma visão mais abrangente, tornar-se-ia relevante tipificar as escolas em que os manuais didáticos foram adotados e também saber como foram efetivamente utilizados, com que intensidade, e quais os resultados produzidos, além de outros aspectos do cotidiano escolar. No entanto, dependendo da época historiada, muitas dessas informações não estão disponíveis.

Assim, os manuais didáticos, os planos curriculares, as instruções pedagógicas, as publicações que lhes podem ter servido de referência e os registros de eventuais críticas e polêmicas passam a assumir grande importância como fontes de pesquisa e caberá ao historiador das disciplinas escolares procurar interpretá-los, relacioná-los e compreendê-los segundo o contexto em que foram concebidos, divulgados e utilizados. Nessa tarefa, caberá ao historiador uma atenção especial quando da instalação de novas finalidades de ensino. Essas, muitas vezes, são inspiradas em concepções de movimentos supra-nacionais. Entender como tais idéias são recepcionadas pelas esferas de circulação envolvidas no meio educacional de uma determinada nação é historicamente relevante. Entre as opções teóricas de abordar esse fenômeno, optamos pelo da “transmissão” de Schubring. Essa escolha deve-se, entre outros fatores, ao seu grande envolvimento com o estudo do movimento internacional de renovação do ensino da matemática secundária do início do século XX. Este movimento, como detalharemos oportunamente, foi determinante no processo inicial de escolarização de função.

Sobre o termo transmissão utilizado por Schubring, é fundamental salientar que ele o utiliza numa acepção muito particular e, para diferenciá-lo do empregado com a conotação usual, o grafaremos entre aspas: “transmissão”.

A transmissão de conceitos entre culturas costuma nos levar a concepções simplistas e equivocadas. Uma delas é de que no processo de transmissão o conceito permanece idêntico, inalterado, ignorando por completo o novo contexto cultural. Uma conseqüência desse modo de pensar é que ele admite implicitamente que há centros mais privilegiados, mais adiantados, que irradiam idéias para outros menos civilizados que apenas absorvem a produção dos polos geradores.

O ponto de vista acima apresenta um caráter reducionista do conceito de transmissão ao qual Schubring se opõe:

> Para vencer o reducionismo da idéia tradicional de transmissão, devemos conceber a “transmissão” como um processo de transformação no qual a parte essencial é desempenhada pelo receptor. Isso significa que o receptor tem de fato um papel ativo. Em geral, não há recepção passiva – ao contrário, o conhecimento transmitido é transformado pelos grupos sociais e culturais receptores de acordo com seus próprios conjuntos de valores ou de acordo com a sua identidade cultural. Dessa maneira, **a “transmissão” deve ser entendida como um processo bipolar: um polo é o conhecimento transmitido, e o outro é a sua transformação segundo a “identidade cultural” dos receptores.** (SCHUBRING, 1999, p. 32, grifo nosso).

Sobre o processo de transformação ocorrido numa “transmissão”, Schubring cita o exemplo da Argentina, que no começo do século XX era assediada por diversas nações ocidentais que manifestavam interesse em influir na emergência da sua matemática moderna e astronomia. Apesar disso, os grupos sociais envolvidos nessa recepção fizeram as suas escolhas de maneira notável, segundo Lewis Pyenson (SCHUBRING, 1999, p.33), migrando de um sistema de referência para outro, conforme as conveniências e ditames do contexto cultural argentino.

Uma outra observação de Schubring, relevante para o nosso trabalho, é a que se refere às intenções inerentes aos movimentos reformadores:

> O movimento de reforma iniciado pelo IMUK (Internationale Mathematische Unterrichtskommission/ Commission Internationale de l’Enseignement Mathématique, CIEM) mostra ter sido um meio poderoso para a transmissão de idéias. Um exame cuidadoso das atividades nacionais mostra também que as idéias transmitidas foram transformadas de maneira marcante segundo o respectivo ambiente cultural e tecnológico. Além disso, **ao lado das intenções “oficiais” explicitamente declaradas, houve intenções subjacentes “ocultas” que constituíram as reais forças motrizes.** Embora intenções ocultas possam permanecer implícitas em seus campo cultural original, elas devem ser mais explicitadas na transmissão a outros ambientes culturais a fim de transferir o significado completo de um conceito de reforma. Portanto, a análise do processo de transmissão permite uma melhor compreensão das intenções explícitas e implícitas envolvidas. (SCHUBRING, 1999, p. 34, grifo nosso).

Nos próximos capítulos, nos ocuparemos do estudo de como o ideário configurado pelo movimento internacional modernizador do ensino da matemática secundária do início do século XX foi transmitido a setores do meio educacional brasileiro e, também, como foi feita sua recepção pelas diversas esferas de circulação envolvidas.

CAPÍTULO II

FELIX KLEIN E OS PRINCÍPIOS DO MOVIMENTO MODERNIZADOR DO ENSINO DA MATEMÁTICA SECUNDÁRIA DO INÍCIO DO SÉCULO XX

"Triste não é mudar as idéias. Triste é não ter idéias para mudar."

(Barão de Itararé)

Para se estudar o processo inicial de disciplinarização de *função* na disciplina *matemática*, torna-se imprescindível analisar as causas, os fatos, as motivações e concepções que preconizaram tal conteúdo como essencial ao ensino secundário.

De início, vamos reportar-nos à emergência, no começo do século XX, do movimento mundial de renovação do ensino da matemática na escola secundária, com raízes principalmente na Alemanha, Inglaterra, França e Estados Unidos. Esse movimento conseguiu, ao longo do tempo, aglutinar, além de professores e psicólogos, grandes matemáticos da época. Entre eles, destaca-se o matemático alemão Felix Klein a quem, pelos seus atributos intelectuais e pelo respeito adquirido na comunidade científica, coube a natural liderança e autoridade para expressar as concepções norteadoras das mudanças pretendidas.

Quanto ao interesse de Christian Felix Klein (1849-1925) pelos assuntos de educação, observam-se referências, já em 1872, quando do pronunciamento da aula inaugural solene que o investia, aos 23 anos de idade, como catedrático de matemática e membro do Conselho da Universidade de Erlanger. Nessa ocasião, ele reservou parte da conferência para expressar suas idéias sobre o ensino da matemática enaltecendo uma visão mais abrangente no sentido de se procurar uma unificação do conhecimento matemático em contraposição a um apego maior pelo aprofundamento de estudos particulares.

Esse modo de pensar estava intimamente relacionado ao seu trabalho de pesquisa matemática apresentado nesse “Programa de Erlanger” – como ficou conhecido o texto referente à citada palestra – que tinha, entre seus objetivos, o de unificar as diferentes geometrias sob o ponto de vista da teoria dos grupos. Esse estudo revela um método de investigação presente também em suas concepções educacionais: a fusão e a combinação de ramos aparentemente separados. Outro aspecto também transposto da sua prática particular como pesquisador para o campo pedagógico é o de pensar a matemática inicialmente de maneira intuitiva – a sistematização caberia a uma fase posterior.

Nos anos de 1881 e 1882, Klein trocou correspondências com outro matemático da corrente intuicionista, talvez o mais representativo dela, que foi Jules Henri Poincaré (1854–1912). Ambos desenvolviam estudos sobre as funções automorfas e entre eles acabou estabelecendo-se um clima de competição, que acabou alijando Klein não só da “disputa” mas também de pesquisas matemáticas mais exaustivas. Conforme o próprio Klein:

> De fato, consegui adiantar-me um pouco a Poincaré... O preço que tive que pagar pelo meu trabalho foi, na verdade, extraordinariamente alto: a falência total da minha saúde... **Minha própria atividade produtiva pessoal, no campo da Matemática teórica, terminou em 1882.** Tudo o que veio a seguir, se refere, ainda que não se trate de simples retoques de um tema, a detalhes. (WUSSING apud BELTRÃO, 2001, p. 14, grifo nosso).

Apesar de Klein abdicar, em 1882, de uma produção mais proeminente em novos campos da pesquisa matemática, o seu lugar na galeria dos grandes matemáticos já estava reservado na história. Segundo Boyer:

> Assim a idade áurea da geometria moderna que começara tão auspiciosamente na França na École Polytechnique com a obra de Lagrange, Monge e Poncelet atingiu o seu zênite na Alemanha, na Universidade de Göttingen, através da pesquisa e inspiração de Gauss, Riemann e **Klein**. (BOYER, 1974, p. 402, grifo nosso).

O excerto acima, por um lado, atesta a condição de Klein como matemático eminente; por outro, revela-se, de algum modo, omisso senão injusto para com Poincaré. Sobre esse prolífico pesquisador francês que extenuou Klein, selecionamos alguns fragmentos do próprio Boyer que visam a não só mostrar a sua fertilidade intelectual, mas também situá-lo em relação a alguns outros grandes matemáticos.

> Quando Gauss morreu em 1855 pensava-se em geral que nunca mais existiria um universalista em matemática – alguém que estivesse à vontade em todos os ramos, puros e aplicados. Se

> alguém a partir daí provou que essa idéia estava errada, esse alguém foi Poincaré, pois ele considerou toda a matemática como seu domínio.
>
> [...] Ambos (Poincaré e Gauss) eram tão férteis em idéias que era difícil para eles rascunhar suas idéias em papel, ambos tinham forte preferência por teoremas gerais em vez de casos específicos, e ambos contribuíram para uma grande variedade de ramos da ciência. (BOYER, 1974, p. 441).
>
> [...] Poincaré, como Riemann, era especialmente hábil no tratar de problemas de natureza topológica, como o de achar as propriedades de uma função sem se preocupar com sua representação formal no sentido clássico, pois eles eram intuicionistas de julgamento sólido. (BOYER, 1974, p. 442).

Se, por um lado, Poincaré, involuntariamente, foi responsável pelo afastamento de Klein das lides em novas pesquisas matemáticas; por outro, acabou empurrando-o para um destino auspicioso que lhe estava reservado junto às questões de ensino e de formação de comunidades científicas. Sobre isso, Parshall e Rowe afirmam:

> Reconhecendo que não podia acompanhar os passos de Poincaré, começou a vislumbrar outras formas de preservar sua posição como diretor de uma importante escola matemática (Klein tinha recusado um convite da Universidade Johns Hopkins). De fato, quando ele chegou ao seu último destino acadêmico, Göttingen, em 1886, já havia se adaptado ao papel principal, que ele reservaria para si durante a década seguinte: “master teacher”. Daí em diante, Klein concentrou-se em várias idéias formadas por ele ainda na juventude. (PARSHALL; ROWE, 1994, p. 187, tradução nossa).

Nos anos vividos em Göttingen, Klein, além da atividade acadêmica – supervisionou quarenta e oito teses -, envolveu-se em diversos projetos, entre eles, o da edição e direção da Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss iher Anwendungen (Enciclopédia das Ciências Matemáticas e suas Aplicações), trabalho esse só concluído em 1935 com a colaboração de mais de duzentos cientistas. Dirigiu o Mathemasche Annalen, participou da criação da Sociedade de Cientista e Médicos Alemães que originou a Comissão Alemã para o Ensino da Matemática e das Ciências (DAMNU, sigla alemã), criou e dirigiu a Associação para o Fomento da Física e Matemática Aplicada, além de ter participado de maneira significativa da emergência da comunidade científica matemática dos Estados Unidos. No final do século XIX, começou a se envolver com as questões do ensino de matemática no ensino secundário e, em decorrência, acabou participando de maneira decisiva da criação da Comissão Internacional de Ensino da Matemática (CIEM / IMUK). Sobre o envolvimento de Klein com o ensino e a sua influência sobre comunidades científicas extra-Alemanha, separamos alguns fragmentos inter-relacionados:

> Desde Monge não existira professor tão influente, pois além de dar aulas entusiasmantes Klein se preocupava com o ensino da matemática em muitos níveis e exerceu forte influência em círculos pedagógicos. Em 1886 ele se tornou professor de matemática em Göttingen, e sob sua liderança a universidade tornou-se a Meca a que estudantes de muito países acorriam. (BOYER, 1974, p. 401).

> Em meados de 1880, qualquer um que quisesse ser “alguém” na matemática americana seria aconselhado a obter pelos menos alguma instrução em universidades alemãs. Notavelmente, os americanos procuravam não apenas uma única universidade alemã, Göttingen, mas um professor alemão em especial, Felix Klein. (PARSHALL; ROWE, 1994, p. 187, tradução nossa).

> Com a volta de Sylvester à Inglaterra em 1883, a Universidade Johns Hopkins perdeu sua vez de ser o centro do ensino matemático avançado. Os americanos desejosos por tal aprendizagem foram a outro lugar buscar inspiração. Eles escolheram como seu mentor um outro estrangeiro, mas desta vez, um que estava no exterior, Felix Klein. Depois de uma década da partida de Sylvester, Klein trabalhou ativamente como dirigente de um grupo dinâmico de matemáticos americanos, muitos deles estudaram sob sua orientação na Alemanha. Sua influência atingiu o ápice em 1893, durante a visita de sete semanas ao Estados Unidos, que começou com uma grande recepção no Congresso de Matemática, realizado em conjunto com a Exposição Colombiana Mundial de Chicago. (PARSHALL; ROWE, 1994, p. 311, tradução nossa).

> Superficialmente, esses três homens (Sylvester, Klein e Moore), separados por geração, ensino matemático e conhecimento cultural, poderiam não ser protagonistas na história do aparecimento de uma comunidade de pesquisa matemática nos Estados Unidos entre 1876 e 1900. [...] Todavia, dentro desse intervalo de tempo relativamente curto, os Estados Unidos obtiveram sucesso em se colocar no mapa matemático, impelidos principalmente pelos esforços de Sylvester, Klein e Moore. (PARSHALL, ROWE, 1994, p. IX, tradução nossa).

As considerações feitas até aqui sobre Klein, julgamos sê-las de fundamental importância para se ter uma compreensão maior de seu papel no movimento internacional de modernização do ensino da matemática secundária do início do século XX, um dos objetos desse capítulo. Assim, ao referirmo-nos a Klein, deveremos sempre considerar que: trata-se de um matemático *intuicionista*; é altamente respeitado pela sua produção matemática que inclui trabalhos que intentam estabelecer a *fusão e a combinação de ramos* aparentemente separados através da teoria dos grupos; é um *professor influente* e muito procurado por estudantes, inclusive norte-americanos; preocupa-se pelas questões de ensino desde a juventude e estabelece um paralelo entre as suas concepções pedagógicas e as de pesquisador matemático; tem *grande capacidade política* demonstrada pelas inúmeras comissões de que participou como criador e/ou dirigente e pelo trânsito junto às diferentes comunidades científicas internacionais e órgãos governamentais.

Com esse perfil de Klein como referência, passaremos a analisar alguns aspectos do movimento modernizador do ensino secundário que tem na sua figura o mais representativo líder. Um dos fatores desencadeadores desse movimento reside na grande diversidade do ensino da matemática escolar verificada nos diferentes tipos de escolas alemãs, fato que pode ser atestado pelo seguinte texto de Schubring:

> No decurso das profundas reformas das décadas de 1810 a 1819 na Prússia, as matemáticas haviam adquirido o status de um dos três principais temas de ensino do Gymnasium, o tipo de escola secundária de maior prestígio.
>
> [...] A "pureza de método" tornou-se a orientação metodológica exclusiva para a instrução matemática, cuja função mudou para a de "Geistes-Gymnastik (treinamento para a mente). Não só os elementos do cálculo, mas também os métodos analíticos em geral e secções cônicas em particular foram banidos. Eventualmente, atingiu-se o regresso à concepção tradicional de geometria euclidiana. **Os professores do Gymnasium agarravam-se a uma visão estática da matemática sem considerar os conceitos funcionais.**
>
> **O outro tipo de escola secundária, a Realschulen, trabalhava com outro tipo de matemática**, em particular nos estados do sul: além da geometria elementar tradicional, ensinava geometria

> descritiva e alguns elementos do novo ramo da geometria sintética. A razão para tal orientação residia no contexto desse tipo de escola: eram escolas técnicas que precisavam compensar de alguma forma as deficiências do ensino usualmente marginal de ciências e matemática no estilo clássico. Na realidade, nos estados do norte como a Prússia, os professores de matemática da Realschulen aderiam à mesma visão estática de matemática de seus colegas do Gymnasium, rejeitando o ensino de funções ou o cálculo. (SCHUBRING, 1999, p. 40-41,grifo nosso).

A diversidade quanto à formação matemática dos alunos do secundário manifestava-se claramente quando do seu ingresso nas Escolas Técnicas Superiores. Segundo o próprio Klein:

> A desigualdade nas culturas prévias entre os ingressantes no ensino superior, constituía naquele momento para os cursos iniciais do primeiro ano, um inconveniente tão grande quanto real. (KLEIN, 1905, p. 101).

A discrepância existente no preparo matemático dos alunos dos diversos tipos de escolas alemãs acaba por não suprir as necessidades do ensino superior, que fica sobrecarregado, e, também, por não atender às mais variadas demandas decorrentes da modernização do novo estado alemão – nas três últimas décadas do século XIX ocorre uma grande expansão da indústria e do sistema educacional. Sobre isso, destacamos os seguintes textos:

> O programa de estudos dos engenheiros nas Escolas Superiores alemãs foi, há várias décadas, calcado no das escolas análogas francesas, no que diz respeito à matemática. Porém na Alemanha, os desenvolvimentos subseqüentes têm reduzido, cortando pedaço por pedaço, o ensino da matemática propriamente dita em benefício de um ensino mais técnico e prático que, desde o início dos estudos monopolizava cada vez mais espaços. As

> matemáticas superiores, seja o cálculo diferencial, o integral, a geometria analítica, se encontram hoje reduzidos a um simples curso de introdução de três semestres.
>
> Este desenrolar dos fatos, que quiçá não tenha chegado a término, foi, depois de tudo, fruto da necessidade. Responde a exigências atuais da indústria alemã que demanda uma grande maioria de engenheiros práticos e só uma minoria de teóricos. (KLEIN, 1905, p. 103).

> Dadas por um lado essa natureza e estrutura do programa de matemática escolar e por outro as novas demandas de pessoal científica e tecnicamente treinado para a indústria, **o atraso da instrução matemática nos diferentes tipos de escolas secundárias tornou-se evidente no último terço do século XIX.** (SCHUBRING, 1999 p. 40-41, grifo nosso).

Os trechos acima apresentados mostram que o sistema escolar alemão exibia toda sua fragilidade por ocasião da transição da educação secundária para a superior. A busca por soluções desse complexo problema de transição leva Klein a se envolver com a matemática do secundário. Segundo Schubring:

> Na segunda fase de suas atividades na década de 1890, Klein levou adiante o seu ponto de vista de que fazer uma reforma da matemática universitária requeria levar em consideração um sistema até mais extenso: o sistema escolar como alicerce básico da educação superior**. Assim, começou a se interessar pelo aperfeiçoamento da formação dos professores**. (SCHUBRING, 1999, p.42, grifo nosso).

Aliás, o envolvimento com a formação de professores, mais que uma preocupação de Klein, era uma exigência das autoridades educacionais, pois ao propor, em 1900, mudanças curriculares ao gabinete ministerial, este, mesmo acatando as justificativas e finalidades dessas alterações, recusou-se a estabelecê-las por decreto e determinou a Klein que iniciasse um processo de convencimento do professorado quanto à relevância da nova proposta.

Ciente de que a mudança estrutural pretendida deveria partir das bases, Klein lançou-se a participar de encontros, congressos, além de elaborar "aulas" dirigidas aos professores, Em 1904, organizou um primeiro curso em que analisava o papel dos diferentes tipos de escolas nos processos de ensino da matemática. As anotações decorrentes dessa explanação foram publicadas e serviram de embrião para um trabalho mais amplo, gestado em um curso de dois semestres também destinado aos professores, que resultou, anos mais tarde, na publicação da coleção *Elementar mathematik von Höheren Standpunkt aus* (Matemática Elementar sob um Ponto de Vista Superior) .

Nessa obra, *Klein* - matemático perfeitamente engajado na comunidade científica e professor influente envolvido com os problemas do ensino superior - expressava suas idéias sobre a matemática escolar do secundário. Essa óptica, consubstanciada no título da coleção, deverá estar sempre presente quando da leitura desses volumes que se tornaram a principal referência do movimento internacional modernizador do início do século XX. Imbuídos desse olhar, procuraremos compreender e interpretar as concepções sobre ensino manifestas no *Matemática Elementar sob um Ponto de Vista Superior*.

Ao invés de estudar essas concepções segundo a ordem em que aparecem no livro, ou segundo o foco do nosso estudo – funções -, nós principiaremos por aquela que recomenda a introdução do Cálculo Infinitesimal entre os conteúdos do ensino secundário. Uma primeira justificativa dessa opção prende-se ao fato de ser difícil imaginar que, se a reforma não tivesse sido liderada por um matemático atuante na Universidade, mas sim por educadores emergentes da escola primária, ou mesmo da secundária, a introdução do referido item programático tivesse o lugar de destaque que lhe foi atribuído ou, até mesmo, constasse da relação dos conteúdos propostos.

Aliás, Klein, em diversos momentos dos volumes, deixa claro a sua grande preocupação com o ensino superior:

> [...] se preocupam muito pouco no ensino secundário de como pode o ensino superior seguir construindo sobre a base que ele proporciona, e no mais das vezes se conformam com definições que no momento quiçá bastam, porém que nada significam frente ao acúmulo de necessidades do ensino superior. (KLEIN, v.1, 1927, p. 207, tradução nossa).

Quanto às referidas necessidades do ensino superior, observa-se que as escolas técnicas superiores, que no início do século XX já gozavam do mesmo status das universidades, estavam sobrecarregadas quanto à instrução matemática. Um dos motivos dessa ocorrência tinha origem na heterogeneidade de seu público, constituído não só por alunos emergentes das Realschulen que apresentavam uma formação matemática mais direcionada para essas instituições, mas também por estudantes oriundos dos Gymnasien de formação mais clássica (lógico-dedutiva) e, ainda, em uma escala menor, encontravam-se alunos vindos das Volksschulen, escolas mais populares em que era privilegiado o cálculo prático. Sobre esse quadro, Schubring salienta:

> [...]Tal flexibilidade exigia mudanças dramáticas na preparação dos estudantes para as escolas técnicas superiores (escolas politécnicas): por um lado, *essas escolas precisavam ser liberadas das partes mais elementares de seu ensino de matemática para que os alunos se concentrassem nas partes de matemática mais*

> *próximas de seus estudos técnicos* – por outro lado, os alunos das escolas secundárias clássicas precisavam de uma instrução que lhes permitisse estudar não apenas nas universidades, mas também nas escolas técnicas superiores. Essa redefinição da transição da educação secundária para os subsistemas da educação superior requeria uma modernização radical da matemática escolar. **O que Klein propôs a partir de 1900 foi de fato introduzir os conteúdos do ensino preparatório de matemática das escolas técnicas superiores como assuntos novos e básicos para os três tipos de escolas secundárias: geometria analítica e os elementos do cálculo diferencial e integral.** (SCHUBRING, 1999, p.43, grifo nosso).

O excerto acima nos dá claros indícios de que a introdução do Cálculo no ensino secundário pode ter sido o objetivo primordial que lançou Klein à empreita do movimento reformador. Tentativas anteriores de incluir esse tópico nos programas do secundário fracassaram. Segundo o próprio Klein:

> [...] e se compreende bem que, como ocorreu, pouco a pouco se originasse uma oposição muito forte contra a introdução do Cálculo Infinitesimal no ensino secundário; oposição que foi se estendendo até culminar nos decênios de 70 e 80 (do século XIX) em **uma proibição oficial do ensino de Cálculo**, até nas Realschulen. (KLEIN, 1927, v.1, p. 298, grifo e tradução nossos).

Essa situação de proibição oficial do ensino de cálculo teria que ser revertida por Klein. Para isso, ele procurou elaborar uma ampla e convincente argumentação e utilizou-se também de uma estratégia política muito bem arquitetada no sentido de desviar o foco das críticas que seriam feitas ao seu objetivo maior, alvo de tal proibição. É com esse olhar que procuraremos entender e interpretar as concepções colocadas no *Matemática Elementar sob um Ponto de Vista Superior*. Observaremos se cada concepção sobre ensino aí expressa não encerra, de alguma forma, uma relação com a introdução do Cálculo no secundário, a despeito dos valores educacionais explícitos que cada uma delas possa conter.

Voltando à argumentação de Klein sobre a necessidade de ter-se o Cálculo entre os contéudos escolares, destacamos alguns trechos:

> [...] Precisamente no campo do Cálculo Infinitesimal é onde a descontinuidade entre o ensino secundário e superior alcança um grau máximo, como repetidamente temos dito. (KLEIN, 1927, v.1, p. 319, tradução nossa).

> É indubitável que este desenvolvimento moderno tem passado de um modo estranho pelo ensino secundário sem deixar nenhum vestígio, como repetidas vezes temos assinalado. Apesar de todas as dificuldades e todos os inconvenientes, todavia hoje se recorre naquele ensino à Análise Algébrica e se evita todo emprego do Cálculo Infinitesimal, não obstante haver desaparecido há bastante tempo o receio que esta disciplina despertara no século XVIII. (KLEIN, 1927, v.1, p. 207, tradução nossa).

> [...] o ensino deve ir ascendendo até chegar aos umbrais do **Cálculo Infinitesimal**, de modo que o naturalista e o técnico de seguros, tomando por exemplo, obtenham da escola o instrumento matemático de que venham a necessitar em seus trabalhos. (KLEIN, v.1, 1927, p. VI, grifo e tradução nossos).

Esse último fragmento procura estabelecer uma relação entre o Cálculo Infinitesimal e as necessidades do cidadão na vida moderna. Apesar de um técnico de seguros, no dia-a-dia, utilizar-se de tabelas e não do referido conhecimento, Klein procura sensibilizar o leitor com a aplicação prática desse conteúdo e, assim, estabelece um princípio para o movimento reformista que é o das *aplicações práticas da matemática*. Ainda, sobre essa concepção do ideário modernizador, Klein salienta:

> [...] uma nova tendência que começou a desenhar-se em 1890, consiste em não prescindir das **aplicações da Matemática** em todos os ramos das Ciências naturais e técnicas, assim como de

> sua significação na vida real. Deste modo se acrescenta algo novo à mera aplicação dos procedimentos intuitivos, pois em vez de utilizá-los com um objeto puramente formal, se aproveitam para fazer o aluno adquirir conhecimentos indispensáveis na prática da vida. **Em relação com estas idéias, estão as proposições da reforma que tem por base a introdução no ensino secundário do conceito de função, os métodos gráficos e elementos de Cálculo Infinitesimal**. (KLEIN, 1931, v.2, p. 313-314, grifo e tradução nossos).

Observa-se no final do trecho acima o que será uma constante no texto do *Matemática Elementar sob um Ponto de Vista Superior :* estabelecer relações entre cada princípio do movimento modernizador e a implantação do cálculo no ensino secundário.

Vários outros princípios foram formulados e agregados por Klein no sentido de dar consistência à sua argumentação e justificar as suas escolhas quanto ao método ideal de abordar o Cálculo no ensino secundário. Sobre o método proposto, selecionamos uma das considerações de Klein:

> [...] Nos estabelecimentos de ensino secundário em que antes se explicava esta disciplina, não se fazia uma exposição precisa da construção científica exata do **Cálculo Infinitesimal por meio do métodos dos limites**, sendo que, quando muito, aparecia este método, de modo mais ou menos difuso, colocando em primeiro plano as operações com quantidades infinitesimais e, algumas vezes, também o cálculo de derivadas no sentido de Lagrange. Naturalmente privava-se, de tal modo, o ensino não só de rigor, mas ainda de clareza; e compreende-se bem que, como ocorreu, pouco a pouco, se originasse uma oposição muito forte contra a permanência do cálculo infinitesimal no ensino secundário. (KLEIN, 1927, v.1, p.298, grifo e tradução nossos).

Apesar de o texto acima nos remeter diretamente à abordagem newtoniana dos limites (ver anexo 2) e, de certa forma, fazer uma ressalva ao processo em que se despreza os infinitamente pequenos (postulado de Leibniz - ver anexo 1), a sugestão de Klein para o ensino de Cálculo consiste em, após uma introdução intuitiva de limites, apresentar a noção de derivada como limite da razão incremental (Newton) para, em seguida, prosseguir o curso utilizando-se das notações e das técnicas operacionais de Leibniz.

Algumas tentativas de introduzir-se o Cálculo exclusivamente pelo método de Leibniz fracassaram devido à dificuldade de se assimilar que os infinitésimos podiam ser desprezados. Aliás, a dificuldade dessa assimilação é histórica: Berkeley, por exemplo, foi um entre os vários filósofos que se insurgiram contra tal processo. Cabe lembrar que o matemático Lázaro Carnot , sobre tal polêmica, chegou a publicar o livro *Refléxions sur la métaphysique du Calcul Inifinitésimal*. Sobre o tratamento inadequado dos infinitésimos no ensino secundário, Klein observa:

> Não se pense que temos alguma coisa a ver com a confusa literatura popular que maneja de modo misterioso os infinitamente pequenos. Um estudo do Cálculo Infinitesimal apresentado por tal face seria, sem dúvida, apropriado a introduzir as piores confusões na cabeça dos alunos. Para quem conhece o assunto, entretanto, o cálculo infinitesimal perdeu, hoje, por completo, aquela situação singular que outrora lhe atribuiam. (KLEIN apud ROXO, 1937, p. 236).

Klein, precisava agora de um argumento para justificar a sua escolha por uma mescla de métodos de Newton e Leibinz (ver anexo 3). Para isso, lança mão de uma concepção que ganhava grande circulação no meio científico da segunda metade do século XX: a *lei fundamental biogenética* do naturalista alemão Ernst Haeckel (1834-1919). No falar de Klein:

> [...] **a lei fundamental biogenética**, segundo a qual o indivíduo em seu desenvolvimento percorre, em rápida sucessão, todos os estados de desenvolvimento da espécie a que pertence. Este princípio, creio eu, deveria ser seguido também, ao menos em suas linhas gerais, no ensino da Matemática o mesmo que em qualquer outro ensino; se deveria conduzir a juventude, tendo em conta a sua natural capacidade e disposição, lentamente até chegar a matérias elevadas e, finalmente, a formulações abstratas, seguindo o mesmo caminho pelo qual a humanidade tem ascendido do seu estado primitivo aos altos cumes do conhecimento científico. (KLEIN, v.1, 1927, p. 363, grifo e tradução nossos).

Ora, a formação do Cálculo Infinitesimal, propriamente dito, remonta ao final do século XVII e deve-se a Newton (1642-1727) e Leibniz (1646–1716). Se, segundo a *lei fundamental biogenética*, o desenvolvimento do indivíduo deve recapitular o da sua espécie, então justifica-se plenamente o método escolhido por Klein. Uma vez mais, vemos um princípio do movimento modernizador a serviço da inclusão do Cálculo no secundário.

A opção pelo método de Newton implica automaticamente a aceitação da intuição como recurso para a sua aplicação, já que a noção de limite, a obtenção das equações das tangentes, o cálculo de áreas sob a curva, entre outros conceitos, são trabalhados intuitivamente nessa abordagem e intrinsecamente ligados à idéia de movimento.

Ora, a utilização da intuição no ensino era incompatível com o que prevalecia nos Gymnasien que era a “pureza de método” e o caráter estático da matemática. Assim, para reverter tal quadro Klein lança mais um princípio para o movimento modernizador que é o da *valorização do método intuitivo e indutivo*. Segundo Klein:

> Precisamente no descobrimento e formação do Cálculo Infinitesimal tem exercido um grande papel o *procedimento indutivo* que não se apoia sobre deduções logicamente encadeadas e o recurso heurístico mais eficaz, foi mui freqüentemente, neste caso, a intuição sensível; e me refiro, ao dizer isto, à *intuição sensível* imediata com todas as suas inexatidões [...] (KLEIN, 1927, v.1, p. 280, tradução nossa).

> [...] se bem a intuição joga um importante papel heurístico como princípio estimulante da investigação científica, não se pode desconhecer que, em última análise, a demonstração lógica tem uma importância decisiva. Na escola, não se deve entretanto, entender que se comece desde cedo, com uma exposição lógica e difícil, mas impõe-se completamente o método genético. A intuição forma a base do conhecimento e, a princípio, só lentamente se penetra na consciência da lógica. Se é verdade que, há algum tempo, predominou a exposição sistemática, que acentuava de modo inconveniente o formalismo, isso se tem aos poucos modificado, de algumas décadas a esta parte. (KLEIN, v.2, 1931, p. 31, tradução nossa).

Com o objetivo de reforçar a sua argumentação quanto à importância do método intuitivo, Klein analisa, de uma forma própria, processos evolutivos da Matemática:

> **No processo *A*,** a base é uma concepção particularista da ciência, que trata de decompor todo o campo da mesma em uma série de regiões bem delimitadas, em cada uma das quais se

> opera evitando todo o possível apelar aos recursos das regiões próximas; seu ideal é o de uma bela e lógica cristalização de cada uma destas regiões em um corpo de doutrina isolado.
>
> Contrariamente a isto, **o partidário de *B*** atribui importância a um enlace orgânico das diferentes regiões da ciência e aos numerosos recursos que mutuamente se prestam umas a outras, e prefere, segundo isto, os métodos que permitem abarcar, de um ponto de vista único, a compreensão simultânea de várias regiões. Seu ideal é a concepção de toda a ciência matemática como um todo. (KLEIN, 1927, p. 101, grifo e tradução nossos).

O processo **A** teria um caráter analítico no que tange aos desmembramentos e estritamente lógico quanto ao método. O processo **B** teria um caráter sintético no que se refere às conexões entre os ramos e, segundo Klein, intuitivo-experimental quanto aos recursos heurísticos utilizados para o desencadeamento de sua sistematização.

Na corrente *analítico-lógica*, poder-se-iam situar trabalhos de Euclides, Euler, Lagrange, Cauchy, Weierstrass, entre outros. Na concepção *sintético-intuitiva* estariam localizados Arquimedes, Descartes, Newton, Taylor, Riemann e, principalmente, o próprio Felix Klein.

Sobre o pensamento sintético e o analítico, Klein, no Congresso de Matemática de Chicago, em 1893, já observava:

> Quando contemplamos o desenvolvimento da matemática no século XIX, encontramos algo semelhante ao que acontecia em outras ciências. Os famosos investigadores do período precedente, Lagrange, Laplace, Gauss, foram ótimos o bastante para compreender todas as partes da matemática e suas aplicações. Com a geração sucessora, entretanto, a tendência à especialização se manifesta por si só. O desenvolvimento da

> ciência afasta-se, cada vez mais, do seu escopo e propósito originais, e ameaça sacrificar sua unidade e dividir-se em várias partes. (PARSHALL; ROWE, 1994, p.310, tradução nossa).

A opção pelo processo sintético-íntuitivo (B) foi feita por Klein como pesquisador matemático e, agora como líder reformista, ele a adapta como método de ensino que, aliás, se mostra totalmente coerente com a sua escolha substancialmente newtoniana de iniciar o Cálculo na matemática secundária. Na defesa da aplicação desse processo (B) no ensino, Klein argumenta:

> [...] nos últimos séculos de atividade matemática que registra a história, as duas direções fundamentais A e B do pensamento matemático se têm mostrado como igualmente fecundas; atuando alternadamente, e muitas vezes simultaneamente, fazendo surgir precisamente desta conjunção os maiores progressos que a matemática registra. **No ensino secundário se encontra, desgraçadamente, predominando desde há largo tempo a direção A** (analítico-lógica). **Todo movimento de reforma que se pode ver como saudável deve dar uma entrada mais ampla ao sistema B** (sintético-intuitivo). (KLEIN, 1927, v.1, p.110, grifo e tradução nossos)

A adoção desse ponto de vista (B) no ensino implica, pelo seu caráter sintético, a prática de se estabelecerem *conexões entre as partes da matemática*. Ao prefaciar o volume II do *Matemática Elemental desde um Punto de Vista Superior*, Klein (1931, v.2, p.3) afirma que “ nossa tendência nessas lições, como em todas as de caráter geral, é a fusão da Aritmética com a Geometria, entendendo por Aritmética, não só o estudo dos números, mas também a Álgebra e a Análise”.

A respeito da prática de muitas escolas alemãs desenvolverem esses ramos separadamente, Klein cita:

> [...] um exemplo de até que ponto chega essa separação, é a já mencionada maneira de tratar a teoria das proporções que se costuma ensinar, primeiro aritmeticamente, e depois sem fazer a menor referência a isto, em Geometria. (KLEIN, 1931, v.2, p.284, tradução nossa).

Como já vimos anteriormente (Programa de Erlanger), a unificação e a combinação de ramos aparentemente separados era uma concepção presente na pesquisa matemática de Klein. Sobre isso, Parshall e Rowe destacam uma fala do matemático alemão no Congresso de Matemática de Chicago e complementam com uma observação.

> "Esta tendência de unificação, teórica e puramente original, vem inevitavelmente ampliar as aplicações da matemática em outras ciências."
>
> Para Klein, a base para a unidade interna originou-se do conceito de grupo e da teoria das funções analíticas de variável complexa. (PARSHALL; ROWE, 1994, p.311, tradução nossa).

Como pesquisador matemático, Klein utilizou a teoria dos grupos como recurso para unificar as geometrias; como líder reformista, ele propõe, para entrelaçar e coordenar os diversos ramos da matemática escolar, o conceito de função com suas diversas representações (tabular, algébrica e gráfica).

Aliás, cabe observar que função revelava-se imprescindível para abordagem por ele proposta para o Cálculo, fato este denunciado pela própria nomenclatura de seus elementos constituintes: limite de uma *função*, derivada de uma *função* num ponto, *função* derivada, *função* primitiva, integral de uma *função*, etc..

Dessa forma, o sucesso no ensino do Cálculo está intimamente ligado a um bom domínio de função por parte do aluno. E mais, o entrelaçamento desses dois assuntos só poderá vingar se o educando souber transitar com relativo desembaraço pelas várias representações de função, fato este que não ocorre de um momento para o outro, mas que deve ser trabalhado por um longo período. Configura-se, assim, a necessidade de se desenvolver no aluno um *"pensamento funcional"***.** Sobre isso, Klein argumenta:

> [...] tanto do ponto de vista psicológico, como do cultural, **a inclusão de noções de Cálculo prende-se intimamente ao desenvolvimento da idéia de função***.* Esta não pode atingir um grau suficientemente elevado, sem auxílio dos conceitos, métodos e processos do Cálculo, e este, por sua vez, não poderá ser convenientemente apresentado e eficazmente assimilado pelos educandos que não tenham assaz amadurecido **o pensamento funcional.** (KLEIN, 1907, apud ROXO, 1937, p.224, grifo nosso).

O pensamento funcional, como veremos em estudo detalhado no capítulo III, deveria ser cultivado desde as séries iniciais com a atuação do aluno sobre a idéia de variação e dependência. Aos poucos, com o progressivo e constante trânsito pelas representações tabular, gráfica e analítica de função, o educando caminharia em direção à sua formação funcional. Cabe aqui, uma referência do matemático alemão:

> Só o precoce afeiçoamento à idéia de funcionalidade trará pleno benefício aos colegiais. Sem dúvida, não se cogita, naquelas primeiras séries, de um estudo completo, mas da idéia de uma natural associação de suas séries de valores numéricos

> determinados, da qual, como que nasce insensivelmente, a imagem da continuidade. (KLEIN, 1907, apud ROXO, 1937, p.183).

Para o líder reformista, função não poderia se constituir um capítulo à parte e ministrado num período limitado do curso, mas sim, apresentado e desenvolvido de forma paulatina e gradativa, ao longo de todo o curso secundário, conectando e intermediando, sempre que possível, os conceitos e os processos empregados na Aritmética, na Álgebra e na Geometria. Por esse motivo**,** *o conceito de função* torna-se naturalmente *a idéia central e coordenadora dos diversos assuntos da matemática escolar.* A respeito disso, destaca-se uma fala de Klein:

> Nós, os chamados reformadores, **queremos colocar o centro do ensino no conceito de função** como o conceito da Matemática dos dois últimos séculos que desempenha papel fundamental em todos os campos onde intervêm noções matemáticas. (KLEIN, 1927, v.1, p.5, grifo e tradução nossos).

Esse princípio - centrar o ensino da matemática escolar no conceito de função - tinha também o intuito de pavimentar o caminho para o re-ingresso do Cálculo no secundário. Essa afirmação talvez soe estranha, mas ela adquire sentido se lembrarmos como foi feita a proibição do ensino de Cálculo nesse nível de ensino. Segundo Schubring (1999, p. 40), tal proibição remonta a uma assembléia de professores do ensino secundário alemão realizada em 1864. Nessa ocasião, estabeleceu-se que assuntos da matemática escolar que envolvessem "constantes" seriam tratados no ensino secundário e os que envolvessem "variáveis" seriam deixados para o superior.

Ora, o curso de Cálculo Infinitesimal não prescinde das variáveis. Assim, ao fixar o centro da matemática escolar em função, Klein estaria colocando as variáveis dependente e independente das funções no secundário e disponibilizando, dessa forma, os pré-requisitos necessários para se desenvolver o curso de Cálculo.

Ainda sobre o Cálculo Infinitesimal, cabe observar que o curso proposto por Klein, de caráter intuitivo-sintético, solicita do aluno que ele desenvolva a capacidade de visualizar e trabalhar com alguma naturalidade a mobilidade das figuras geométricas – o Cálculo de inspiração newtoniana está diretamente relacionado à idéia de movimento. Essa percepção dinâmica é de grande valia para toda a extensão do conteúdo, desde as noções iniciais de limite até o cálculo de áreas e volumes passando, ainda, pela interpretação geométrica da derivada e suas aplicações. A respeito dessa *idéia de movimento*, Klein afirma:

> [...]o espírito da Geometria moderna tem como principal fonte de inspiração a idéia de mobilidade de cada figura, que permite chegar ao conhecimento integral da figura, prescindindo de casos particulares. (KLEIN, v.2, p. 284, tradução nossa).

Essa visão cinética das figuras geométricas esbarra no caráter estático da concepção lógico-analítica da geometria euclidiana entronizada em boa parte das escolas da época – no caso da Alemanha, todos os Gymnasien e muitas das Realschulen. Para modificar o *status quo*, Klein propõe um ensino de geometria em que se deveria valorizar a intuição e a experimentação numa primeira abordagem e, só posteriormente, partir-se-ia para uma sistematização. Configura-se, assim, a necessidade da elaboração de uma *geometria propedêutica* que teria por objetivo estabelecer uma ponte entre a experiência comum do aluno sobre o espaço e a geometria demonstrativa. Sobre como fazer isso, Klein recomenda:

> Em geometria, o ensino deve começar pelos sólidos simples, de que se farão derivar os conceitos fundamentais, as relações de posição de retas e planos e as principais figuras geométricas. As definições científicas devem ser evitadas. Por métodos empíricos (translação, rotação, dobramento e medida) obtêm-se as principais proposições relativas angulares, áreas e circunferências. Haverá uma transição gradual da **intuição** para a demonstração.
>
> Desde o início, as figuras geométricas não devem ser consideradas rígidas. Recomenda-se um largo uso do movimento para o fim de ilustrar e sugerir relações geométricas importantes. (KLEIN, 1900, apud ROXO, 1937, p. 213, grifo nosso).

> [...] As bases da reforma foram formuladas no plano de estudos de 1882, em virtude do qual se criou **um curso geométrico preparatório** para a classe de quinta com o objetivo de proporcionar aos alunos um **conhecimento intuitivo** das coisas, que logo sirva de base ao edifício geométrico. (KLEIN, 1931, v.2, p. 312, grifo e tradução nossos).

> [...] Exigem os planos da comissão de ensino que na classe de quinta se dedique uma hora à **Geometria Propedêutica** enquanto que atualmente se faz isto já na quarta. (KLEIN, 1927, v.1, VI, grifo e tradução nossos)

Esse uso da intuição sensível *valoriza o aspecto psicológico* da abordagem dos assuntos matemáticos, pois se a lógica deve ser desprovida de todo e qualquer caráter pessoal, a percepção e a intuição, em contrapartida, são intrínsecas ao psicológico. Sobre isso, Klein (1927, v.1, p. IV) faz uma referência taxativa: "*a exposição na escola deve ser, empregando uma palavra que sintetiza nosso pensar: psicológica, não sistemática*".

O matemático alemão, nessa linha, prossegue:

> [...] o ensino não pode depender somente da matéria objeto de ensino, mas sobre todo o sujeito a quem se ensina. Uma mesma coisa deve ser apresentada de modo distinto a um menino de 6 anos que a um de dez e a esse que a um homem maduro. No que se refere especialmente à Geometria, esta deve reduzir-se no ensino secundário à intuição concreta, e passar depois, pouco a pouco, aos elementos lógicos: de uma maneira geral pode-se dizer que o método genético é o único apropriado, porque permite ao aluno ir penetrando nas coisas sem esforço. (KLEIN, 1931, v.2,p. 282, tradução nossa).

Dessa forma, no ideário do movimento reformista, o raciocínio lógico-dedutivo deixava de ser o objetivo principal a ser perseguido no ensino da matemática, e ganhava espaço a preocupação com uma formação mais ampla do educando em que a capacidade de indução e intuição assumia também papel de relevo.

Com base no que foi exposto até aqui, podemos resumir as principais concepções orientadoras do movimento reformista, segundo a óptica de Klein, no elenco que se segue:

I) Introduzir noções de Cálculo Infinitesimal entre os conteúdos da escola secundária;

II) Incluir o conceito de função com o papel de idéia coordenadora dos diversos assuntos da matemática escolar;

III) Procurar desenvolver o “pensamento funcional” do aluno desde as séries iniciais;

IV) Fomentar as conexões entre as diversas partes da Matemática;

V) Trabalhar, sempre que possível, com a idéia de movimento na Geometria;

VI) Apresentar e desenvolver nas primeiras séries uma geometria propedêutica;

VII) Explorar no dia-a-dia da matemática escolar aplicações práticas de significação real na vida moderna;

VIII) Valorizar a indução e a intuição, inclusive como recursos heurísticos, para se chegar a conhecimentos que possam ser oportuna e posteriormente sistematizados;

IX) Dar atenção especial à *lei fundamental biogenética* no processo de ensino;

X) Priorizar o ponto de vista psicológico na aprendizagem.

Os dez princípios acima relacionados são os explicitados nos volumes do *Matemática Elementar sob um Ponto de Vista Superior*, gestados em cursos destinados a professores de matemática. Para outras esferas de circulação que saem da área específica da matemática, Klein reduziu essas dez concepções a três formulações mais gerais e revestidas de um caráter educativo e sensibilizador quanto à modernidade:

1 – Predominância essencial do ponto de vista psicológico;

2 – Escolha da matéria a ensinar em dependência com as aplicações da matemática ao conjuntos das outras disciplinas;

3 – Subordinação da finalidade do ensino às diretrizes culturais da nossa época.

Cabe observar que, com as concepções 2 e 3, Klein constrói uma base argumentativa para justificar o Cálculo entre os conteúdos do secundário. Este fato pode ser observado nos seguintes fragmentos:

> No meu entender, **o Cálculo Infinitesimal, como desenvolvimento da idéia de função**, já pertence hoje à formação matemática geral, que se deve exigir de todo homem culto e, de futuro, cada vez mais, assim o será.
>
> [...] Um estudo básico e proveitoso da noção de função, bem como as idéias fundamentais da mecânica, implica certamente a inclusão do Cálculo Infinitesimal elementar no ensino secundário.
>
> [...] Só nos devemos admirar de que ainda haja matemáticos, dignos desse nome, com a opinião de que o Cálculo Infinitesimal não pertence à cultura geral, mas seja indispensável apenas a alguns indivíduos, como preparo para seus estudos profissionais.
>
> Estou, ao contrário, convencido de que se trata de noções indispensáveis a uma formação mental eficiente – indispensáveis a quem quer que, como **homem moderno**, queira penetrar de espírito aberto, no desenvolvimento da nossa vida cultural. (KLEIN apud ROXO, 1937, p. 221-222, grifo nosso).

> Uma nova tendência que começou a desenhar-se em 1890, consiste em não prescindir das aplicações da Matemática em todos os ramos das Ciências naturais e técnicas, assim como de sua significação na vida real. [...] Em relação com esta idéia, estão as proposições da reforma que tem por base a introdução no ensino secundário do conceito de função, os métodos gráficos e elementos de Cálculo Infinitesimal. (KLEIN, 1931, v.2, p. 313-314, tradução nossa).

Os dois primeiros fragmentos exprimem também a estratégia de Klein em colocar o Cálculo como uma conseqüência natural e necessária do curso de funções. E mais, ele, também em outras oportunidades, argumenta que o curso de funções não atingiria a sua finalidade se não interviesse no ensino do Cálculo, *ainda no secundário*. Sobre isso, novamente cabe destaque o excerto:

> Tanto do ponto de vista pedagógico, como do cultural, a inclusão das noções de cálculo prende-se intimamente ao desenvolvimento da idéia de função. **Esta não pode atingir a um grau suficientemente elevado, sem auxílio dos conceitos, métodos e processos do Cálculo**, e este, por sua vez, não poderá ser convenientemente apresentado e eficazmente assimilado pelos educandos que não tenham assaz amadurecido o pensamento funcional. (KLEIN apud ROXO, 1937, p. 225, grifo nosso).

Ora, essa argumentação de que para uma boa abordagem de função é imprescindível um curso Cálculo no secundário revela-se frágil, pois é perfeitamente cabível desenvolver-se função no secundário atendendo aos demais princípios propostos pela reforma e deixar o Cálculo para o nível superior.

O exposto até o momento, torna possível formular a hipótese de que, entre os dez princípios específicos formulados por Klein, o primordial, para ele, era o da introdução do Cálculo entre os conteúdos do secundário. As demais concepções, em maior ou menor grau, prestaram-se para viabilizar a concretização de seu objetivo maior que não podia, pelas restrições já comentadas, ser explicitado para boa parte do professorado e educadores. Diante disso, Klein deslocou o foco das atenções do Cálculo para *função* ao adotá-la estrategicamente como idéia central do ensino. Sobre a intencionalidade de Klein, Schubring observa:

> Quais eram os objetivos desse movimento de reforma? Por que Felix Klein, um eminente matemático, se envolveu tão ativa e intensamente em uma questão de instrução escolar?

> As declarações oficiais indicavam dois conjuntos de objetivos: o primeiro era “a penetração – começando numa idade jovem – das noções básicas de quantidades variáveis e dependência funcional nos temas do ensino de matemática”. O segundo era a reorientação dos métodos de ensino no sentido da intuição e das aplicações.
>
> Comecei a duvidar se esses objetivos de reforma de fato expressavam as verdadeiras intenções de seus líderes quando li uma nota nos escritos de F. Klein de 1913, enquanto preparava a sessão do IMUK de 1914. (SCHUBRING, 1999, p. 38).

Aliás, nessa sessão do IMUK, ocorrida em Paris, em 1914, configura-se explicitamente a preocupação obsessiva de Klein com a introdução do Cálculo no secundário:

> Em Paris, o tema que atraiu mais atenção e participação foi “a avaliação da **introdução do cálculo nas escolas secundárias**”. Esse tema foi debatido calorosamente, e o relatório a ele referente foi o mais volumoso de todos os relatórios internacionais do IMUK. Foi ainda o **tópico que Klein havia preparado mais cuidadosamente do que qualquer outro**. Klein não só ajudou a planejar o questionário internacional que envolvia o assunto, mas também escolheu o seu coordenador e relator, Emanuel Beke, um pesquisador húngaro e seu antigo aluno, e um dos mais ardorosos adeptos de seu programa. (SCHUBRING, 1999, p. 45, grifo nosso).

O próprio Emanuel Beke, dirime todas as dúvidas a respeito da intencionalidade de Klein, num relatório da CIEM dessa sessão de Paris, onde deixa escapar o seguinte comentário:

> O trabalho que eu assumi, sob convite da Presidência da Comissão Internationale, é o de traçar um quadro dos resultados produzidos pela **introdução do Cálculo Diferencial e Integral,**

> **objeto principal do nosso movimento reformista,** [...] (BEKE, 1914, 247, grifo e tradução nossos).

Sobre a estratégia de se tirar o Cálculo do foco das críticas, Schubring observa o papel desempenhado pelo "pensamento funcional" no seguinte trecho:

> [...] (Klein) prosseguiu seu trabalho cunhando a frase chave que a seguir serviria como o *slogan* de seu programa de reforma, mas que também ajudava a transmitir a impressão de que esse programa era motivado exclusivamente por um desejo de aperfeiçoar a educação nas escolas. **Tal *slogan* era a famosa noção do pensamento funcional**, ou – para dizê-lo mais concretamente – a idéia de que o conceito de função deveria impregnar todas as partes do currículo de matemática. Walter Lietzmann (1880-1959), o principal assistente de Klein na organização do movimento de reforma, recordou posteriormente de maneira vívida o papel que essa idéia desempenhava como um **instrumento estratégico**. Lietzmann observou que o sucesso do movimento de reforma dependia de se encontrar uma idéia fundamental que funcionasse como um ponto de convergência e que ao mesmo tempo levasse o cálculo para o currículo do Gymnasium automaticamente. Esse **ponto básico de convergência** foi o conceito de função, que, de acordo com o programa de Klein, já deveria ser introduzido nas classes iniciais. (SCHUBRING, 1999, p. 44, grifo nosso).

Como já observamos anteriormente, na segunda metade do século XIX, as escolas alemãs estavam estruturadas em três tipos: as *Humanistiche Gymnasien*, em que a matemática era apresentada segundo o padrão lógico-dedutivo; as *Realschulen*, em que prevalecia o caráter de matemática aplicada; as *Volksschulen*, as mais populares, em que se privilegiava o cálculo prático.

A introdução do Cálculo se deu primeiro nas Realschulen. Os Gymnasien ofereciam resistência, cuja quebra passou a ser, de certa forma, uma obsessão para Klein. Sobre isso, Schubring faz a seguinte análise:

> Em outras escolas, professores ativistas (preparados por Klein e assessores) também introduziram mudanças curriculares que incorporavam o espírito do conceito de função. Na verdade, em todas essas escolas, o objetivo dos professores era introduzir os elementos do cálculo diferencial e integral. Deve ser enfatizado, contudo, que uma das tarefas mais complicadas no interior do programa de Klein era **estender as reformas não apenas às escolas "realistas" (Realschulen), mas também às escolas "humanistas" (Gymnasien).** (SCHUBRING, 1999, p. 44, grifo nosso).

Os Gymnasien eram as escolas de maior prestígio e incorporá-las ao movimento de reforma passou a ser uma questão de honra para Klein. Para atingir seu intento, ele, utilizando-se da sua grande influência nos meios matemáticos, lançou-se a ganhar adeptos para as suas concepções fora da Alemanha, acreditando que assim, como de fato ocorreu, os Gymnasien cedessem à sua argumentação, agora com respaldo internacional.

Klein, a despeito de informações controversas sobre sua personalidade, era, segundo Schubring, um organizador e administrador talentoso. Estas características, aliadas ao grande respeito de que gozava como matemático, fez com que suas consistentes e modernas concepções ganhassem circulação internacional. A presidência do IMUK é uma constatação do alcance da sua influência.

Quanto à sensibilidade de Klein como educador, cabe observar a sua visão sobre o ensino da Teoria dos Conjuntos no secundário:

> Para terminar estas considerações sobre a Teoria dos Conjuntos temos de formular a pergunta que sempre tem nos acompanhado, no curso destas lições: Como servir-se dela no ensino médio?
>
> Do nosso ponto de vista pedagógico-matemático, naturalmente, a resposta deve ser absolutamente negativa, pois não devem dar-se de pronto ao aluno coisas demasiado abstratas e difíceis. Para precisar bem minha opinião neste ponto, hei de recordar **a lei fundamental biogenética,** segundo a qual o indivíduo em seu desenvolvimento recorre em rápida sucessão todos os estados de desenvolvimento da espécie a que pertence. (KLEIN, 1927, v.1, p. 363, grifo e tradução nossos).

A mesma lei fundamental biogenética é levada em consideração por Klein quando da abordagem ideal do conceito de função no secundário. Nos fragmentos abaixo, primeiramente destacamos o conceito último de função que ele apresentava no curso de professores ao analisar a sua evolução histórica e , em seguida, o que propunha para os alunos:

> [...] se diz, de um modo geral, que y é função de x se a cada elemento de um conjunto de coisas corresponde um elemento de um conjunto y.
>
> [...] Antes de mais nada, digamos que não só é desculpável mas perfeitamente justificado, que no ensino secundário se mantenha retardado um certo tempo, digamos alguns decênios, em relação aos progressos mais recentes da ciência. [...] E o que pedimos nessa reforma é realmente bem modesto, comparado ao estado atual da ciência. Desejamos somente que o conceito geral de função de Euler em sua forma restrita ou mais ampla penetre como um fermento em todo o ensino médio. [...] Claro é que se há de exigir mais do professor, a quem seria conveniente, pelo

> menos, conhecesse os elementos da Teoria das Funções de Variável Complexa e, também, as mais recentes concepções da Teoria dos Conjuntos. (KLEIN, 1927, v.1, p. 275-276).

> Em Euler, por volta de 1750, encontramos duas definições distintas da palavra função:
>
> a) *Em seu "Introductio" define y como função de x a toda expressão analítica de x*, isto é, a toda expressão composta de potências, logaritmos, funções trigonométricas, etc., da variável *x*.
>
> b) Junto a isto se vê que, para Euler, estava também *definida uma função y = f(x) quando, referindo-a a um sistema de eixos coordenados, xy, se faz o traçado de uma curva qualquer "libero manus ductu".* Euler não estabelece relação alguma entre ambas definições. (KLEIN, 1927, p. 269, tradução nossa).

Os excertos acima mostram que Klein, apesar de utilizar, como matemático, um conceito mais amplo de função na Teoria dos Grupos - uma das inspiradoras do movimento Bourbaki -, ele tem um claro discernimento quanto à inadequação dessa abordagem mais abstrata de função, envolvendo a Teoria dos Conjuntos, no secundário.

CAPÍTULO III

FUNÇÃO E A DISCIPLINA MATEMÁTICA EM TEMPOS DA REFORMA FRANCISCO CAMPOS

“Se os seus sonhos estiverem nas nuvens, não se preocupe, pois eles estão no lugar certo: agora construa os alicerces.”

(Shakespeare)

O ano letivo de 1929 ficou marcado no Colégio Pedro II do Rio de Janeiro como o da implantação de uma nova disciplina escolar, a *matemática*, resultante da unificação da aritmética, álgebra e geometria. Tal ocorrência assume significação nacional devido ao fato de esse colégio ser considerado padrão para os demais estabelecimentos de ensino do país.

Para o ensino da recém-criada disciplina, a Congregação do Colégio Pedro II aprovou o programa do 1º ano seguido das instruções para a sua execução que reservavam para *a noção de função* um papel nunca antes assumido no ensino das matemáticas. Atendendo a essas instruções, em meados do 2º semestre de 1929, é publicado o volume I do *Curso de Matemática Elementar* de Euclides Roxo, uma manual considerado revolucionário para o padrão da época. Antes dessa edição, podem ser observadas, em poucos manuais como, por exemplo, os de Álgebra das coleções FIC e FTD, incursões no referido tema mas que não propiciavam a manifestação do amplo caráter metodológico preconizado pelas instruções agregadas ao programa da nova disciplina.

O autor do volume inovador, Euclides Roxo (1890-1950), era catedrático do Colégio Pedro II e, nessa ocasião, diretor do externato dessa instituição. Foi, também, o principal mentor e articulador do processo que intentava implantar em nosso país as concepções do movimento mundial de modernização da matemática secundária do início do século XX. Esse movimento teve no IV Congresso Internacional de Matemática, realizado em 1908, em Roma, um marco significativo, quando da criação da Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM / IMUK) cujo comitê dirigente era constituído pelo suíço Henri Fehr, o inglês George Greenhil e o alemão Felix Klein, eleito presidente. Segundo Lietzmann, colaborador próximo de Klein:

> Até o Congresso seguinte (Cambridge em 1912), o comitê deveria preparar relatórios a respeito do estado de instrução matemática

> nas escolas secundárias dos países mais desenvolvidos. Essa tarefa era em grande parte um trabalho de documentação, compreendendo uma comparação de métodos e dos programas da instrução matemática em países diferentes a fim de apresentar um relatório geral em Cambridge (LIETZMANN, 1917 apud SCHUBRING, 1999, p. 35).

Nesse congresso de 1912, realizado na Inglaterra, o Brasil participa como país convidado sem direito a voto e tem por delegado o professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia, do Colégio Pedro II. No decorrer do evento, Gabaglia assume o compromisso de enviar relatórios sobre o ensino da matemática no Brasil para a CIEM. Em 1920, Henri Fehr, secretário geral da Comissão, menciona que de 1908 a 1920, foram entregues 310 relatórios, dos quais havia um único da América do Sul, o da Argentina – nenhum do Brasil, apesar do compromisso assumido por Gabaglia em 1912.

O professor Gabaglia foi diretor do Colégio Pedro II no biênio 1913-1914 e criou o Anuário do Colégio, onde publicou vários artigos, mas nenhum deles fazia referências aos trabalhos desenvolvidos pela CIEM. Não se tem registro, em atas da Congregação do Pedro II, de que as concepções da CIEM tivessem chegado à discussão em suas reuniões. Em suma, segundo a fala de Valente:

> O resultado final é que, pelas mãos de Gabaglia, único brasileiro a ter tido oportunidade de presenciar as discussões internacionais sobre a modernização do ensino de matemática, nada parece ter sido trazido para o Brasil. (VALENTE, 2003, p. 58).

Sobre o não-envolvimento de Gabaglia com o movimento modernizador da CIEM, uma hipótese a ser levantada é a de seu desacordo convicto com as concepções inovadoras, mas, ao lado dessa possível convicção, ganha força o fato de ele ser o responsável pela tradução e adaptação de vários livros da Coleção FIC (Irmãos da Instrução Cristã) que continuavam a ser recomendados pela Congregação do Colégio Pedro II nas primeiras décadas do século XX. Com referência a isso, Valente observa:

> [...] Gabaglia, é possível pensar também, teria interesses menos idealistas e mais pragmáticos: divulgar e dar uso aos livros F.I.C., que traduziu pela Garnier – livros que seriam considerados ultrapassados, face ao ideário da modernização proposto pela reforma internacional. (VALENTE, 2003, p.58-59)

Cabe observar que, na segunda metade da primeira década do século XX, Gabaglia dividia as aulas de matemática do Externato do Pedro II com o também catedrático Joaquim Inácio de Almeida Lisboa, professor este, conhecido pela sua ortodoxia em relação ao ensino da matemática e que primava por seguir à risca o método lógico-dedutivo. A aversão de Almeida Lisboa pelas concepções modernizadoras internacionais podem ser avaliadas no texto de sua autoria, publicado em 1930 no Jornal do Commercio, quando das polêmicas travadas com Roxo, de quem se tornou ferrenho crítico:

> Na qualidade de mais antigo professor catedrático de Matemática do Colégio Pedro II, declaro não ter colaborado, nem de leve, nos seus atuais programas de Matemática.
>
> Sou fundamentalmente contra eles: não os considero sequer programas de ensino, porque tudo destroem. Desde 1902, nos já distantes tempos em que fiz concurso, sempre fui partidário de uma reforma completa do ensino da Matemática, mas em moldes opostos à atual.
>
> [...] Os livros em que o Sr. Euclides Roxo expõe o seu programa são excessivamente infantis. [...] Desapareceu o raciocínio

> modelar, característico de uma demonstração e da própria Matemática. (LISBOA, JORNAL DO COMMERCIO, 1930, apud CARVALHO, 2003, p. 130).

Em vista dos perfis e interesses desses dois influentes professores, Almeida Lisboa e Raja Gabablia, torna-se possível supor que eles tenham se constituído num fator de inibição quanto ao surgimento de discussões mais amplas sobre a modernização do ensino de matemática no ambiente do Colégio Pedro II. Diante desse quadro, ganha muita significação o empreendimento quase quixotesco - pela convicção, pela determinação, pela luta solitária - do professor Euclides Roxo de inserir o Brasil no contexto mundial vanguardista do ensino secundário de matemática. É factível conjecturar que, para ter o projeto de unificação curricular das matemáticas aprovado na Ata da Congregação do Colégio Pedro II de 14 de novembro de 1927, Roxo tenha desenvolvido uma árdua tarefa, também em bastidores, de convencimento de seus pares, em que tenha pesado, além da sua função de diretor da instituição, a canalização de um trabalho que vinha sendo realizado, de forma um pouco subliminar, pelo professor Arthur Thiré (1853-1924). Sobre este, Valente informa:

> [...] Nascido em Caen (França), formado pela École Polytechnique, foi contratado junto a um grupo de outros franceses pelo imperador Pedro II, para trabalhar na Escola de Minas de Ouro Preto. Transferindo-se posteriormente para o Rio de Janeiro, foi professor das disciplinas de Cálculo e Geometria Analítica da Escola Politécnica. Foi, ainda, professor de matemática de escolas secundárias como o Liceu Francês do Rio de Janeiro. Em abril de 1910, ingressa no Colégio Pedro II, onde permanece até seu falecimento em 1924. (VALENTE, 2003, p. 54).

Dois anos após ter ingressado no Colégio Pedro II, Thiré, em reunião da Congregação, já manifesta aos demais professores seu grande interesse por uma atualização do ensino no Colégio e propõe que se criem condições, junto ao governo, para que o Dr. Raja Gabaglia participe como delegado do Brasil do Congresso Internacional de Matemática de Roma. Thiré aparentava estar atento às modernas concepções de ensino que circulavam principalmente na França. Sobre isso, Valente destaca a sua participação num congresso de ensino primário e secundário realizado na cidade de Belo Horizonte, em 1912:

> [...] Sumariando a conferência pronunciada por Backheuser, Thiré destaca que seu tema foi "O método Laisant no ensino intuitivo das matemáticas", a partir da obra *Initiation mathématique*. Thiré assinala que o auditório estava preparado para apreciar a conferência de Backheuser, pois os alunos da Escola Normal da cidade estavam bem informados das idéias modernas relativas aos métodos intuitivos no ensino.
>
> Como se pode notar, o professor Arthur Thiré estava atento às discussões internacionais sobre o ensino da matemática. No entanto, por esse tempo, as novas propostas parecem serem muito mais incorporadas ao ensino primário que ao secundário. (VALENTE, 2002, p. 59-60)

As concepções de Thiré, cedo ou tarde, encontrariam oposição por parte do conservador Almeida Lisboa. Realmente, uma proposta de Thiré - de modificar o programa de álgebra - é derrotada em votação na Congregação do Colégio em 1920, devido a uma série de objeções levantadas por Lisboa. Sobre isso, Roxo, em 1930, rememora em polêmica com Almeida Lisboa, através do Jornal do Commercio:

> Crime de que me vexo perpetrei-o, de fato, aprovando um sesquipedal programa apresentado pelo Professor Lisboa, e

> contrariando o voto sensato do eminente Professor Arthur Thiré! (ROXO, 1930, apud CARVALHO, 2003, p. 139).

O que foi dito sobre Thiré, Gabaglia e Lisboa dá-nos indícios do quadro de dificuldades que deveriam ser vencidas por Roxo para implantar um processo de modernização no Colégio Pedro II. Agravando, ainda mais, tal quadro se coloca uma disputa desgastante entre Roxo e Thiré para assumir a cátedra que ficou disponível com a morte de Raja Gabaglia. Sobre esse episódio, VALENTE relata:

> 1919. Com a morte do professor Eugenio de Barros Raja Gabaglia, fica imediatamente aberta uma discussão sobre o preenchimento dessa cátedra de matemática do Colégio. O professor Arthur Thiré, no intuito de obter a vaga, pede a sua transferência do Internato para o Externato. Euclides Roxo reage, objetando que a vaga lhe pertence em face da lei e do Regulamento Interno do Colégio Pedro II. Pondera, ainda, que é o substituto e assim se coloca em primeiro lugar para a vaga aberta. Ao final, Roxo vence a discussão e é nomeado catedrático interino de matemática do Colégio, a partir de março de 1919. No mesmo ano, o presidente Epitácio Pessoa torna Euclides Roxo professor catedrático do Colégio Pedro II. (VALENTE, 2003, p. 62).

Apesar do mal-estar produzido por tal contenda, a verdade é que, com a morte de Thiré em 1924, Roxo se vê sem eco e sem apoios explícitos quanto à gestação de um processo de renovação do ensino de matemática no âmbito do Colégio.

O caráter individual e quase solitário da empreitada de Euclides Roxo em direção à modernização do ensino se revelará de forma concreta, quando do surgimento das primeiras críticas antagônicas às mudanças implantadas. Vê-se aí, no desenrolar das polemizações levantadas, que não havia grande envolvimento, nem real comprometimento dos professores que lhe eram próximos, pois foram poucos os que se lhe aliaram efetivamente na defesa das novas propostas de ensino.

Aliás, para o convencimento da maioria dos professores do Colégio Pedro II, quanto à aceitação da proposta de reformulação do ensino da matemática, pode-se dizer que Roxo, além de seus inegáveis atributos intelectuais, dispôs de um ideário renovador consistente respaldado pelos mais renomados matemáticos internacionais, como veremos ainda nesse capítulo. Além disso, um passo importante em direção à anuência de seu projeto modernizador na votação da Congregação, em 1927, pode ter sido dado em 1923, por ocasião do lançamento de seu livro *Lições de Aritmética*, em atendimento a sugestões de Arthur Thiré. Esse compêndio teve razoável receptividade – em 1928, encontrava-se na 7ª edição – e nele, Roxo já fazia pequenas incursões inspiradas no ideais do movimento reformista mundial. Observa-se nesse manual de aritmética, algumas conexões com a álgebra, com a geometria e também noções de variável no capítulo que tratava de grandezas. Não se mostrava um compêndio realmente revolucionário e talvez, também por esse motivo, tenha tido uma progressiva e natural aceitação. Não causava inquietações, nem grandes mudanças nas práticas educativas de então.

No entanto, esse livro, em relação ao didático *Elementos de Aritmética por FIC*, obra indicada no programa de ensino do Colégio Pedro II até 1922, representava um avanço extraordinário em direção aos princípios norteadores do movimento internacional de renovação. Para se ter uma idéia da distância em que o manual de origem francesa se encontrava das concepções modernizadoras de Roxo, pode-se observar o seguinte texto de Valente:

> Outra observação a ser feita sobre os Elementos de Aritmética por FIC é a preocupação de não incluir elementos algébricos no tratamento dos temas da Aritmética. Não há emprego da notação literal ao longo do livro. Isso possivelmente reflete o que bem notou Glaeser (1984, p.131) nos Exercices d'Arithmétique par FIC onde é possível ler o seguinte pensamento do abade Moigno: "A invasão dos procedimentos algébricos no ensino da Aritmética será um malefício, pois a Álgebra torna preguiçosos e superficiais os espíritos que o estudo da Aritmética tornaria ativos e profundos." (VALENTE, 1999, p. 186-187).

A aceitação do livro *Lições de Aritmética*, ao lado do trabalho de bastidores realizado por Roxo junto aos demais professores do Colégio Pedro II, pavimentou o caminho em direção à aprovação da proposta audaciosa da unificação das matemáticas por dois terços dos integrantes da Congregação em 14 de novembro de 1927. A proposta aprovada, muito mais do que uma fusão da Aritmética, Álgebra e Geometria, trazia, em seu bojo, uma reformulação dos métodos de ensino que incorporavam os ideais do movimento internacional de modernização.

Em 15 de janeiro de 1929 é assinado o Decreto 18 564 que oficializa o aceite da proposta renovadora e, em 15 de março do mesmo ano, a Congregação aprova o programa de matemática do 1º ano, que tem aplicação imediata. A cronologia das mudanças a serem implementadas é enviada por Roxo ao Diretor Geral do Departamento Nacional de Educação:

> "Na cadeira de matemática fez-se uma completa renovação, de acordo com as atuais diretivas pedagógicas dominantes, quanto a essa disciplina, em quase todos os países civilizados. **Adotados**

> **somente para o 1º ano em 1929, será a nova orientação estendida, em 1930, ao 2º ano e, assim sucessivamente, a todos os anos do curso.** Em conseqüência dessa reforma, deverão os alunos, ao invés de um exame final de Aritmética, outro de Álgebra e um terceiro de Geometria, fazer, no 4º ano, um exame final único de Matemática, sendo os do 1º, 2º e 3º de simples promoção." (ROXO apud TAVARES, 2002, p. 105, grifo nosso).

No ano de 1929, a reforma deveria restringir-se ao âmbito do Colégio Pedro II e, para a sua aplicação não havia um livro didático específico com esse fim. Somente, em meados do segundo semestre desse ano, é publicado o primeiro volume da coleção *Curso de Matemática Elementar* de autoria de Euclides Roxo, elaborado em total consonância com o novo programa e o novo método de ensino. Em 1930, é editado o volume II destinado aos alunos do segundo ano.

O processo de implantação dos novos programas do Pedro II, que deveria ser realizado de maneira progressiva, sofre uma ruptura em virtude da eclosão da Revolução Vargas que, em 1931, decreta uma reforma ampla do sistema educacional brasileiro - a Reforma Francisco Campos. Sobre o ministro Francisco Campos e as alterações produzidas por tal reforma no secundário, observemos uma fala de Aranha:

> O ensino secundário passa a ter dois ciclos: um fundamental, de cinco anos, e outro complementar, de dois anos, este último visando à preparação para o curso superior. Com isso, pretendia-se evitar que o ensino secundário permanecesse meramente propedêutico, descuidando-se da formação geral do aluno. Todas as escolas se equiparam ao Colégio Pedro II, até então considerado modelo. (ARANHA, 1996, p. 200-201).

> [...] **Dentre os adeptos da escola nova,** que na década de 20 tinham empreendido reformas de ensino, destaca-se Francisco Campos, cuja atuação já era conhecida no estado de Minas Gerais. Ao assumir o Ministério da Educação e Saúde, recém criado pelo governo provisório de Getúlio Vargas, **imprime uma tendência renovadora** nos diversos decretos de 1931 e 1932. (ARANHA, 1996, p. 200-201, grifo nosso).

Aliás, a respeito da escola nova e a modernização do secundário, cabe destacar o papel de Everardo Backheuser. Nesse mesmo capítulo, já nos referimos a esse professor quando da apresentação de um fragmento que fazia menção a uma palestra proferida por ele, em Belo Horizonte, sobre métodos intuitivos de ensino. Autor do livro "Aritmética na Escola Nova", Backheuser era membro de várias associações de caráter educacional, além de diretor do Instituto de Pesquisas Educacionais do Distrito Federal. Seus juízos, ao que tudo indica, circulavam nas esferas que envolviam o ministro Francisco Campos. Por esse motivo, torna-se relevante conhecer as suas considerações sobre Roxo. Entre elas, há uma veiculada no Jornal do Commercio de 25 de setembro de 1930, em que Roxo é citado por:

> [...] haver corajosa e brilhantemente empreendido a publicação de uma obra de Matemática, pondo a causa didática de acordo com a mais moderna e melhor orientação do ensino da disciplina.(VALENTE, 2002, p. 45-46).

Contrapondo ao elogio de Backheuser, proliferavam inúmeras e desmedidas críticas aos livros e programas de Roxo. Muitas delas foram feitas pela imprensa com a publicação de acalorados debates no Jornal do Commercio, no período de junho de 1929 a fevereiro de 1931. Entre os polemizadores, estão os professores Sebastião Fontes, Ramalho Novo e Almeida Lisboa, o já referido catedrático de matemática do Colégio Pedro II.

Apesar das críticas que Euclides Roxo vinha recebendo, Francisco Campos convida-o para participar da reformulação do ensino de matemática do secundário. Provavelmente o ministro entendeu que tais críticas partiam de setores reacionários a uma modernização do ensino. Segundo Miorim:

> Francisco Campos, o primeiro-ministro do recém-criado Ministério da Educação e Saúde Pública – que havia remodelado o ensino primário e normal de Minas Gerais, de acordo com as idéias do movimento renovador da educação – **acatou, em sua reforma para o ensino secundário, todas as idéias modernizadoras presentes na proposta da Congregação do Colégio Pedro II, na parte relativa ao ensino de Matemática**. (MIORIM, 1998, p. 93, grifo nosso).

Assim, Roxo organiza os programas e as respectivas instruções pedagógicas, a partir dos estabelecidos no Colégio Pedro II, só que para todas as séries do secundário e com abrangência nacional. Em portaria ministerial de 30 de junho de 1931, é instituído o novo programa.

As concepções modernizadoras de ensino, que Roxo imaginava concretizá-las primeiramente no âmbito do Colégio Pedro II com as eventuais e necessárias correções de rota impostas pela realidade da sala de aula, tomam, então, proporções nacionais e mais, impostas, via decreto, sem uma discussão prévia mais ampla - ambiente totalmente oposto ao que Klein teve na Alemanha, onde as mudanças foram feitas de forma gradativa e a partir do convencimento e da preparação dos professores.

O quadro acima, aliado às concepções reinantes entre os nossos professores, à dimensão continental de nosso país, à disparidade cultural e social encontrada em todos os níveis, à estrutura organizacional do nosso sistema educacional, às práticas verificadas em nossas salas de aula, entre outros aspectos, mostram que a recepção das idéias de Klein será feita de forma particularíssima.

Na questão da geometria, por exemplo, houve as mais diversas apropriações das Instruções Pedagógicas por parte dos autores didáticos, conforme veremos no capítulo IV. Na esfera dos professores e alunos, a geometria intuitiva e propedêutica nas primeiras séries, que na escola alemã era praticada desde as últimas décadas do século XIX, aqui, apesar do cuidado com que foi tratada pelos livros didáticos de Roxo, passou a ser alvo das mais contundentes críticas. Grassava, ainda, em nossas escolas, o culto excessivo ao rigor euclidiano. Dessa forma, as concepções de Klein sobre geometria escolar, que na Alemanha já faziam parte do cotidiano escolar e constavam dos *planos de estudos* oficiais desde 1882, aqui no Brasil ganham maior relevância e acendem polêmicas de proporções desmesuradas. A título de ilustração, separamos um trecho de artigo de Almeida Lisboa, publicado no Jornal do Commercio de 21 de dezembro de 1930:

> Os livros em que o Sr. Euclides Roxo expõe o seu programa são excessivamente infantis. Suas aplicações práticas são ilusórias e de nenhum alcance. Neles não há vestígio das mais simples demonstração de qualquer teorema, por mais elementar que seja; existem apenas verificações materiais, e portanto imperfeitas e grosseiras. Desapareceu o raciocínio modelar, característico de

> uma demonstração e da própria Matemática. (LISBOA, JORNAL DO COMMERCIO, 1930 apud CARVALHO, 2003, p. 133).

Outro ponto, também alvo de muitas críticas por parte dos opositores de Roxo, é o que se refere às constantes conexões entre os diversos ramos da matemática verificadas em seus didáticos. No capítulo IV, nos ocuparemos em examinar como foi realizada a apropriação dessa concepção por autores didáticos.

Quanto a Roxo, embora inspirado na concepção de Klein sobre entrelaçamento dos diversos ramos da matemática escolar, ele o realiza na escrita de seu didático espelhado, principalmente, num manual norte-americano redigido por Ernst Breslich. Sobre isso, destacamos alguns trechos do prefácio do volume I do *Curso de Matemática Elementar* de Roxo:

> Nenhuma tentativa, entretanto, se nos afigura tão interessante e eficaz, como a que foi levada a cabo pela "School of Education", da Universidade de Chicago, onde um grupo de professores iniciou, em 1903, sob a direção de Georges Myers, a experiência de um programa e de um compêndio "*along fusion lines*", segundo a expressão americana.
>
> Esse compêndio, sucessivamente revisto e modificado, durante 25 anos, de acordo com os conselhos da prática e as reações dos alunos, foi definitivamente redigido por Breslich, um dos professores acima referidos, e adotado em muitos colégios da América do Norte. Vários outros compêndios têm sido ali publicados de acordo com a orientação moderna, mas os de maior sucesso são justamente aqueles que adotaram o plano de Breslich.
>
> De fato, não nos parece que nenhum outro tenha de maneira mais feliz harmonizado quase todas as tendências da grande reforma.

> Não hesitamos, por isso, em tomá-lo para modelo deste modesto trabalho. Assim, os capítulos IV, V, VII, VIII, IX, X e XIII, onde se procuram dar as primeiras lições de Álgebra com apoio concreto da Geometria, foram moldados por Breslich, com a necessária adaptação ao nosso meio e à mentalidade dos nossos adolescentes .(ROXO, 1929, p. 11).

Sobre essa fusão dos ramos da matemática, os contestadores das idéias defendidas por Roxo, a ela se referiam como “confusão” de assuntos, fato que chegou a ser aludido em prefácios de alguns livros didáticos concorrentes. Breslich preferia a expressão “Correlated Mathematics”. Segundo Sigurdson:

> Breslich, mais do que qualquer outra pessoa, usava o termo “Correlated Mathematics” para referir-se ao seu curso, provavelmente porque ele tinha um forte laço com o movimento de Chicago. (SIGURDSON, 1962, p. 270, tradução nossa).

Ainda sobre Breslich, cabe ressaltar que as suas concepções sobre o papel de função no ensino secundário também tiveram um grande peso na escrita dos manuais de Roxo. Aliás, sobre as apropriações feitas por Roxo das interpretações e re-interpretações dos princípios do movimento modernização que circulavam internacionalmente, dispõe-se de uma ótima referência que é o livro *A Matemática na Escola Secundária*, de sua autoria. Embora publicado em 1937, tudo indica que o seu corpo já se encontrava concluído em 1931, pois, nessa data, já aparecia anunciado no seu volume didático da 3ª série como estando no prelo. Nesse livro, Roxo, com grande riqueza de citações - retiradas de 99 livros, artigos e relatórios -, expressa o seu pensamento e a sua interpretação sobre o ideário renovador internacional. No caso particular do papel de função no secundário, Roxo revela que tanto ele como Breslich aceitavam a concepção veículada por Klein, *ipsis litteris*. Conforme vimos no capítulo anterior, Klein, com objetivo de tirar o Cálculo Infinitesimal do foco das atenções, reservou estategicamente para função o lugar de protagonista do ensino de matemática. É com essa magnitude que Breslich, nos EUA, e Roxo, no Brasil, encampam tal concepção. Este fato, transparece em várias oportunidades no *Matemática na Escola Secundária*, de onde extraímos dois fragmentos, um deles, do próprio Breslich:

> Se o professor prestar atenção sistemática às relações funcionais em todo o curso de matemática, a verdade da afirmação de KLEIN de que **função é a alma da matemática** tomará uma significação cada vez maior. (BRESLICH apud ROXO, 1937, p. 193, grifo nosso).
>
> A noção de função deve ser adotada como idéia axial no ensino da matemática, capaz de estabelecer um elo unificador dos vários assuntos tratados na escola secundária e de modo a ser **a alma do corpo em que se organiza toda a matéria**. (ROXO, 1937, p. 193-194, grifo nosso).

Outra referência significativa a esse respeito é encontrada nas Instruções Pedagógicas que acompanhavam o programa de matemática elaborado por Roxo, por ocasião da Reforma Francisco Campos:

> Para dar unidade à matéria, estabelecendo-se estreita correlação entre as diversas modalidades do pensamento matemático, **será adotada como idéia central do ensino a noção de função.** (Instruções Pedagógicas – Reforma Francisco Campos, 1931, apud ROCHA, 2001, p. 210, grifo nosso).

A mesma dimensão atribuída à função como idéia coordenadora da matemática escolar é dada por Roxo e Breslich também ao *pensamento funcional.* Como vimos no capítulo anterior, Klein percebeu o poder dessa concepção em tornar-se um polo de convergência entre diferentes correntes e a utilizou como bandeira do movimento modernizador. Trechos também extraídos do *Matemática na Escola Secundária*, confirmam essa avaliação:

> [...] Muitos desses objetivos disciplinares podem ser incluídos no âmbito mais geral da idéia de relação e dependência – naquilo que o matemático, no seu vocabulário mais técnico, designa por “função” de uma ou mais variáveis. **O treino no “pensamento funcional”, isto é, na capacidade de pensar em termos de relações e por meio de relações, é um dos objetivos disciplinares mais fundamentais do ensino da matemática.** (Committee on Mathematical Requirements, 1927, apud ROXO, 1937, p. 126, grifo nosso).

Curiosamente, o *pensamento funcional*, que seria um dos princípios mais relevantes do movimento reformista no Brasil, não chegou a ser alvo de críticas diretas, ao contrário de outras concepções que se prestaram a inflamadas polemizações.

Cabe observar que, a respeito dos artigos publicados por Roxo no *Jornal do Commercio* em que expunha *os principais escopos e diretivas do movimento de reforma*, o diretor do Colégio Pedro II reservou o de ordem XII, editado em 22 de fevereiro de 1931 (CARVALHO, 2003, p. 157), para tratar do conceito de função como idéia axial de ensino. Após essa data, não há registro de nenhuma réplica feita pelos seus contestadores, assim como nas anteriormente feitas não se observam críticas explícitas ao pensamento funcional.

Esse fato revela que os críticos da reforma talvez não se tivessem inteirado de uma forma mais aprofundada do ideário do movimento modernizador, ou então, entre outras hipóteses, silenciaram-se ao sucumbir ao fascínio dos argumentos de tal concepção. Segundo Walter Lietzmann, assistente de Klein, o pensamento funcional desempenhava esse papel estratégico, como já vimos no capítulo II.

Um educador que explorou ao máximo o potencial educativo do pensamento funcional foi Ernst Breslich, da Universidade de Chicago, a quem Roxo se referiu, no prefácio do volume I de sua coleção, como autor do compêndio que serviu de modelo para vários capítulos de seu didático. Sobre esse professor norte-americano, destacamos alguns dados levantados por Carvalho:

> Ernst Breslich nasceu em 30 de agosto de 1874 na Alemanha e tornou-se cidadão americano em 1896. Não se sabe quando chegou aos Estados Unidos. Em 1900, recebeu o título de mestre pela Universidade de Chicago. De 1913 a 1920 foi diretor do Departamento de Matemática das escolas-laboratório da Universidade de Chicago. Continuou como professor nestas escolas até 1925. Em 1926, doutorou-se pela Universidade de Chicago. Morreu em 1966. (VALENTE, 2002, p. 45).

Muitas das idéias de Breslich a respeito do pensamento funcional estão expressas no artigo *Developing Functional Thinking in Secondary School Mathematics* de 1928, cuja análise faremos a seguir.

Nesse artigo, Breslich ressalta a importância da utilização do conceito de função como princípio unificador para a reorganização do ensino secundário nos Estados Unidos. Essa importância está diretamente relacionada ao caráter prioritário que assume o desenvolvimento do pensamento funcional na formação do aluno, no sentido de lhe dar uma visão e uma compreensão da matemática adequadas ao mundo contemporâneo de então. Para ilustrar e referendar esta convicção, o autor, no início e ao final de seu texto, apresenta uma citação do renomado matemático alemão Félix Klein: “função é a alma do ensino da matemática”.

Breslich prossegue afirmando que, apesar de a abordagem funcional ser exultada cada vez mais por professores, revistas americanas e comitês da época, o pensamento funcional não vinha tendo a devida atenção, quando não, um tratamento equivocado. Ilustra esse fato apresentando no artigo a análise de diversos manuais didáticos.

Segundo ele, as relações funcionais devem ser estabelecidas, sempre que possível, em e entre todos os campos da matemática, da aritmética à trigonometria. Se o seu estudo ficar restrito a certos tópicos, os resultados produzidos deixarão a desejar. Havendo alguma oportunidade, a qualquer altura do curso e em qualquer parte da matemática, onde a variação e a dependência de grandezas se façam presentes, a interpretação e a relação, via função, deverão ocorrer. Somente assim, através do trato constante de numerosos exemplos, em diversas situações, o senso funcional estaria sendo exercitado e incorporado pelo educando. Na fala de Breslich:

> Enquanto restringirmos o ensino das relações funcionais a certos pontos, tais como gráficos, mudanças em figuras geométricas, razão e proporção, não se podem esperar resultados satisfatórios. Não se deveria perder nenhuma oportunidade de chamar a atenção dos alunos para as relações (relationships) onde quer que elas ocorram, se se quiser realmente cultivar o pensamento funcional. (BRESLICH, 1928, p. 45, tradução nossa).

Dessa forma, as conexões entre os diversos ramos da matemática – característica marcante exteriorizada na abordagem advogada por Breslich –

passam a compor uma prática imprescindível ao desenvolvimento do pensamento funcional. Pela natureza das diferentes representações de função, as linguagens aritmética, algébrica e geométrica tornam-se ferramentas de uso constante para se realizar o trânsito entre elas. Além disso, essa capacidade de o conceito de função envolver em suas representações as diferentes linguagens o faz ímpar como elemento integrador e coordenador dos diversos ramos da matemática.

Apesar de as oportunidades de se estabelecerem relações funcionais serem inúmeras, elas nem sempre são realizadas. Nos problemas verbais, por exemplo, freqüentemente a atenção do aluno é focada na montagem da equação, não havendo, em geral, nenhuma menção, nem questionamento quanto à variação e à relação de dependência das grandezas envolvidas. Segundo Breslich:

> [...] Os professores, contudo, geralmente ignoram os aspectos funcionais nos problemas verbais e passam diretamente para o estabelecimento da lei matemática e dela para a solução da equação. O aluno, por isso, é privado do treino funcional. (BRESLICH, 1928, p. 45, tradução nossa).

Uma representação rica no âmbito de educação funcional é a tabular. Uma tábua trigonométrica pode se apresentar ao aluno como mera tabela para se extrair alguns dados – uma visão estática. Segundo Breslich, cabe ao professor desenvolver no aluno a habilidade funcional de perceber, observando essa tábua, que, por exemplo, o seno cresce mais rapidamente de 0° a 45° do que de 45° a 90°; que, próximo a 90°, a variação é muito “lenta”; que os seus valores não excedem a 1; e assim por diante. Tabelas envolvendo valores de um polinômio podem mostrar ao aluno diversos fatos sobre o seu comportamento (“rapidez” de crescimento ou decrescimento, intervalos de localização das raízes, variação de sinal, etc.) que ficariam perdidos sem uma interpretação funcional.

Até mesmo, nas tabelas onde não se consegue estabelecer uma lei de dependência, pode-se solicitar uma análise ou rearranjo, tratando as informações sob os mais diferentes critérios de variação. Dessa forma, muitas tabelas vivenciadas no dia-a-dia passam a ser objeto do pensamento funcional.

Além dos exemplos acima apresentados, Breslich ilustra outros tipos de tabelas (definidas por leis matemáticas, por coletas de dados empíricos, etc.) onde também poderiam ser enfatizados aspectos funcionais e que habitualmente não o são. Dessa forma, a representação tabular acaba perdendo muito do seu potencial representativo no curso secundário.

Outra crítica levantada pelo professor de Chicago, refere-se ao tratamento dado às fórmulas algébricas pela matemática escolar. A fórmula algébrica é freqüentemente encarada como um recurso em que, através da substituição de algumas variáveis, calcula-se um valor desconhecido. Não se costuma fazer, em sua abordagem, menção à relação de dependência das variáveis que ela envolve, o que poderia ser feito, até mesmo antes da sua efetiva descoberta ou apresentação, numa atividade preambular. Segundo Breslich:

> Fórmulas obtidas com leis da física, como as do movimento uniforme, queda de corpos, e alavancas são naturalmente ensinadas com alguma ênfase nas relações funcionais. Mas mesmo aqui, as soluções dos problemas aplicados podem resultar em apenas substituições nas fórmulas seguidas pela resolução das equações obtidas, e manter o aluno totalmente ignorante sobre as relações funcionais expressas pela fórmula. Para ajudá-

> lo a adquirir uma real compreensão de ambos aspectos da fórmula algébrica é preciso trazer ao ensino que a relação funcional expressa por ela é tão importante, ou até mais importante, que o cálculo numérico indicado. (BRESLICH, 1928, p. 48-49, tradução nossa)

A respeito da interação entre tabelas e fórmulas, o texto de Breslich destaca que, embora ocorra a construção de tabelas a partir de fórmulas, o inverso não é freqüente. Por exemplo, após tabular os termos de uma progressão, pode-se induzir vulgarmente o termo geral; após tabular dados de um movimento uniforme, associar uma possível lei; após medir os ângulos internos de vários triângulos, pode-se intuir a fórmula da soma; e assim por diante.

Breslich prossegue mostrando como o pensamento funcional pode ser exercitado nas equações, nos polinômios, nas razões, proporções, etc.. Mas destaque especial ele confere à representação gráfica cuja existência é intrínseca à da função. Ele observa que a construção de gráficos não pode ter um fim em si mesma. É igualmente importante, senão mais, que o aluno desenvolva um pensamento “gráfico-funcional”, através do qual, analisando gráficos, consiga interpretá-los, obter conclusões e estabelecer relações e conexões com outras representações matemáticas.

Breslich condena o fato de muitos manuais didáticos apresentarem gráficos em capítulos separados. Exemplifica essa ocorrência na trigonometria, onde, a seu ver, não pode haver uma compreensão abrangente das funções trigonométricas se não houver, como pano de fundo, a representação gráfica permeando a formação dos conceitos envolvidos. Na fala de Breslich:

> [...] Sem o gráfico, o aluno provavelmente compreenderá somente um aspecto da função trigonométrica, o aspecto de razão. Ele deixará escapar a idéia da função na sua totalidade. (BRESLICH, 1928, p. 51, tradução nossa).

Os primeiros contatos do aluno com a representação gráfica devem ser feitos através dos gráficos de barras, onde ele terá mais facilidade em pensar "graficamente" sobre fatos numéricos. Em seguida, poderão ser trabalhados gráficos a partir de coletas de dados empíricos e, só posteriormente, os definidos por leis matemáticas.

Breslich salienta, ainda, que os gráficos se tornam ferramentas úteis para se compreender e interpretar as soluções de sistemas de equações. Sem a ilustração e a relação estabelecida pela representação gráfica, o entendimento desse tópico se tornaria altamente abstrato.

Quanto à geometria, o artigo chama atenção para o fato de o ensino secundário priorizar a demonstração lógica e a conceituação estática em detrimento da aplicação das relações funcionais. Segundo Breslich:

> [...] Na geometria, dá-se tanta atenção às demonstrações lógicas, que o estudo das relações funcionais tem sido grandemente negligenciado. Isto é particularmente desastroso porque a maior parte dos assuntos da geometria pode ser tratado por relações funcionais. (BRESLICH, 1928, p. 51, tradução nossa).

Sobre o estabelecimento de relações funcionais na geometria, o professor de Chicago ilustra com diversos exemplos de como as relações algébricas podem ser úteis para uma compreensão maior da geometria e destaca que a linguagem simbólica da álgebra pode auxiliar o aluno, muitas vezes, mais do que as definições verbais.

Breslich encerra o artigo afirmando que muitos educadores, até mesmo alguns que reconhecem a importância do pensamento funcional, subestimam o potencial e a capacidade de o aluno desenvolvê-lo no ensino secundário desde as primeiras séries. Para ele, as idéias de correspondência, dependência e relações funcionais são muito simples e fazem parte do dia-a-dia do estudante. Conclui o texto, justificando essa asserção com vários exemplos.

O texto de Breslich, sintetizado acima, mostra uma total identidade com as idéias de Roxo sobre pensamento funcional expressas em seu livro *A Matemática na Escola Secundária*. Essa comunhão de concepções pode ser atestada pelas "*conclusões"* que o professor Euclides Roxo apresenta ao final do capítulo VIII, titulado de a *Noção de função como idéia axial do ensino*:

"CONCLUSÕES"

1. A noção de função deve ser adotada como idéia axial no ensino da matemática, capaz de estabelecer um elo unificador dos vários assuntos tratados na escola secundária e de modo ser a alma do corpo em que se organiza toda a matéria.

2. Além da aptidão para ligar os vários assuntos em um todo, a educação do pensamento funcional merece ser feita na escola secundária, não só tendo em vista as exigências práticas e culturais da vida moderna, como pela sua aptidão para constituir um meio altamente educativo do pensamento lógico e um verdadeiro método de estudo.

> 3. A idéia de função vem ainda dar ao ensino da matemática secundária mais vida e mais interesse, permitindo não só tratar de questões de maior realidade para o aluno, como estabelecer conexões a outras matérias mais concretas.
>
> 4. O desenvolvimento da idéia de função é perfeitamente acessível ao estudante do curso secundário (de 11 a 16 anos), desde que atenda às normas que se seguem.
>
> 5. A idéia de funcionalidade, a ser desenvolvida paulatim et gradatim, da 1ª à última série do curso, deve penetrar todo o ensino, trazida constantemente em foco, na infinidade de ocasiões que se apresentam para isso, no estudo de todas as partes da matéria.
>
> 6. Começando pela simples e vaga idéia de dependência, passar-se-á depois à de relacionalidade e à de funcionalidade, apresentadas sob o tríplice aspecto (tabelar, gráfico e algébrico), evitando-se de começo as definições formais e as demonstrações rigorosas. (ROXO, 1937, p. 193-194).

Não só o capítulo que contém a síntese acima, mas outros também, ao lado dos artigos publicados na imprensa sobre *função* mostram que as concepções de Roxo a esse respeito não estavam alicerçadas apenas nas de Klein e Breslich. Agregadas a elas havia apropriações de muitas idéias garimpadas em trabalhos reconhecidos internacionalmente de renomados matemáticos, psicólogos e pedagogos.

Com referência a esses trabalhos, observemos inicialmente um comentário de Roxo publicado no *Jornal do Commercio* de 22 de fevereiro de 1931:

> No ensino secundário francês, embora sem as conexões que seriam para desejar, do ponto de vista de Klein, já se acham, de há muito, introduzidas, a noção de função e as representações gráficas, baseadas em noções de Geometria Analítica. É o que se

> observa nas notáveis obras Notions de Mathemátiques de **Jules Tannery** (1903) e Algèbre de **Emile Borel** (1903). (ROXO, Jornal do Commercio,22, fev. 1931, – APER, ER.I. 3.162, grifo nosso).

Para se ter uma idéia do engajamento de Roxo nas concepções do movimento reformista internacional, vamos comparar o texto acima com um outro, apresentado na reunião anual da *l'Association des maîtres de mathèmatiques des Écoles moyennes suisses*, em Zurich, de autoria do pesquisador Henri Fehr, um dos principais articuladores da implantação da modernização do ensino da matemática escolar na Suíça:

> Para ter-se uma idéia exata da medida de como aquelas diferentes noções (funções e cálculo infinitesimal) penetraram no ensino secundário francês, é suficiente consultar os novos manuais. [...] Redigidos por homens que são, ao mesmo tempo, excelentes professores e pesquisadores estimados, esses trabalhos oferecem todas as garantias desejáveis, tanto do ponto de vista pedagógico quanto do ponto de vista científico. Eis os títulos desses manuais:
>
> Algèbre, par **Emile Borel**. Paris, 1903.
>
> Précis d'Algèbre, contenant 557 exercises et problèmes, par Carlo Bourlet. Paris, 1904.
>
> Notions de Mathématiques, par **Jules Tannery.** Paris, 1903. (FEHR, 1905, p. 185, grifo e tradução nossos).

Observa-se no texto acima que, para Henri Fehr, as obras de Borel e Tannery assumem papel de destaque. São esses mesmos autores os citados por Roxo no artigo do *Jornal do Commercio*. Aliás, Jules Tannery torna-se na obra de Roxo uma referência freqüente. No prefácio de 9 páginas do volume I da sua coleção *Curso de Matemática Elementar*, Roxo reserva quase uma página inteira para uma citação do professor francês – a mais longa ali apresentada. Em seu livro *Matemática na Escola Secundária*, referências a Tannery são observadas, cinco vezes só no capítulo que trata de noções de cálculo infinitesimal, quatro vezes no capítulo que comenta o conceito de função e, esparsamente, várias outras vezes ao longo do livro. Entre elas, destacamos uma que aparece tanto nos livros mencionados como também, parcialmente, no referido artigo de jornal:

> Só se pode saber um pouco o que são as matemáticas, só se pode suspeitar a sua extensão extraordinária, a natureza dos problemas que elas estabelecem e resolvem, quando se sabe o que é uma função, de que modo se estuda uma função, como se seguem as suas variações, como se lhe representa a marcha por uma curva, de que maneira a álgebra e a geometria se auxiliam entre si, de que sorte o número e o espaço se esclarecem mutuamente, como é que se determina uma tangente, uma área, um volume, de que modo o homem é levado a criar novas funções, novas curvas e a estudar-lhes as propriedades. São dessas noções e desses métodos de que precisamos para ler os livros técnicos em que as matemáticas intervêm. Eles são indispensáveis a quem quiser compreender alguma cousa do atual movimento científico, que se acelera, das aplicações científicas que modernamente se multiplicam e que, dia a dia, tendem a modificar mais profundamente a nossa maneira de pensar e agir.
>
> Essas noções são simples e fáceis, desde que se reduzam ao que têm de essencial, mais fáceis do que muitas das demonstrações que ninguém receia dar aos alunos, apesar de longas e complicadas e sem alcance algum, além daquilo que elas provam. Elas devem (aquelas noções) penetrar cada vez mais o ensino elementar, para abreviá-lo e fortificá-lo. (TANNERY apud ROXO, 1937, p. 179).

O texto acima é muito significativo quanto ao protagonismo reservado às noções de função no movimento de renovação do ensino da matemática secundária, principalmente no que tange aos princípios que visam a aparelhar o educando às necessidades do mundo moderno. Aliás, sobre a relação entre aluno, vida e pensamento funcional, Roxo vai buscar, juntos aos psicólogos, a sustentação de que o treino dessa habilidade matemática tem grande valor educacional no sentido de se transferir para outros campos fora da esfera matemática.

Sobre o valor da transferência na educação matemática, Roxo reserva o capítulo IV do seu livro *A Matemática na Escola Secundária*, onde inicia destacando as seguintes conceituações:

> AGUAYO define a transferência como "o avanço ou ganho que o exercício de um poder, órgão ou capacidade produz em outro órgão ou poder não exercitado".
>
> THORNDIKE define-a, mais precisamente, como "a influência que um melhoramento ou mudança em uma função mental tem sobre outras funções mentais" A primeira será a função influente e as outras, as funções influenciadas. (ROXO, 1937, p. 84-85)

Sobre a polêmica existente na época sobre a existência, ou não, de tal processo mental, Roxo se utiliza das conclusões expressas no capítulo IX do relatório da *National Committee on Mathematical Requirements* de 1927:

> I. No estado em que se encontra atualmente o problema da transferência de treino, os psicólogos consultados concordam unanimente em que a transferência existe.

II. Em qualquer caso em que se admita a transferência, a quantidade desta depende largamente dos métodos de ensino.

III. A maioria dos psicólogos parece acreditar que, com certas restrições, a transferência de treino é válida no ensino.

IV. A transferência é mais evidente em relação a elementos gerais – idéias, atitudes e ideais. Estes atuam, em muitos casos, como veículos da transferência. (ROXO, 1937, p. 85-86).

Sob o ponto de vista da transferência, cabe destacar que o caráter de função como idéia coordenadora dos diversos assuntos da matemática escolar assume papel relevante. Ao transitar pelas suas diferentes representações (tabular, gráfica e algébrica), ela exerce o seu papel integrador dos diversos ramos no sentido de dar uma unidade à matemática secundária. Sobre isso, Roxo destaca uma fala de Klein:

> Esta combinação das ciências matemáticas torna possível utilizar uma esfera de experiência como oportunidade para aplicar princípios estabelecidos em outra esfera. [...] os alunos treinados em *combination mathematics* revelam uma capacidade mais geral para transportar os tipos de pensamento adquiridos em tal curso à física, à química e aos problemas práticos da engenharia. [...] A explicação psicológica dos resultados superiores assegurados pelas *combination mathematics* encontra-se no fato de que a combinação contribui para o treino dos alunos na generalização. (KLEIN apud ROXO, 1937, p. 161).

A transferência, no caso do pensamento funcional, claramente transcende o âmbito quantitativo: a identificação das variáveis e o estabelecimento de relações de dependência entre elas são recursos úteis para o encaminhamento e a compreensão de situações que eventualmente se apresentem ao aluno em sua vida extra-matemática. Sobre a transferência do conceito de função para as mais diversas situações, Roxo cita C. J. Keyser:

> Assim, os conceitos de constante e variável são representados familiarmente, na vida, pelas noções de fixidez e de mudança. [...] O supremo conceito de funcionalidade encontra, na vida, o seu correlato no onipenetrante senso de interdependência e interdeterminação dos elementos do mundo. (ROXO, 1937, p. 274-275).

Um outro aspecto psicológico salientado por Roxo refere-se à relação entre parte e todo propiciada pelo caráter unificador de função. O exercício da generalização em direção à unidade, inerente à concepção de função como idéia coordenadora do ensino da matemática, faz com que cada assunto fique referenciado ao todo. Essa relação encaixa-se perfeitamente numa perspectiva psicológica estruturalista em que o todo desempenha um papel fundamental na compreensão do objeto percebido. A respeito disso, destacamos alguns fragmentos do livro de Roxo:

> Em outras palavras, tanto o conteúdo da matéria, como o espírito em que é ensinada, devem apoiar-se, *não apenas sobre certas faculdades fragmentárias do espírito, mas sobre todo o espírito.* KEYSER não o diz explicitamente, mas de todo seu estudo ressalta, que o seu grande *desideratum* de humanização do ensino da matemática funda-se na concepção estruturalista da psicologia.

> Com efeito, à luz da *Gestaltpsychologie*, o processo psíquico é um todo fundamental, uma estrutura ou *Gestalt* e esta estrutura é, segundo WERTHEIMER, típica em toda a vida mental. Se aplicada à educação primária, a *Gestalttheorie* conduz à globalização, no ensino secundário da matemática ela nos levará a manter bem vivas as conexões que prendem em um mesmo todo as grandes formas de atividade do espírito humano. (ROXO, 1937, p. 270-271).

Encerramos este capítulo com um trecho que intenta exprimir o valor educativo que tinha o pensamento funcional para Roxo e, ao mesmo tempo, contribui para atestar o seu perfil de educador:

> [...] Se do ponto de vista científico, nenhum conceito é mais geral e mais importante que o de função, não menos o será do ponto de vista meramente prático ou social. **Nenhum indivíduo se adaptará ao meio ambiente sem ter o seu espírito afeito à idéia de mutabilidade e interdependência dos elementos que o cercam, seja na ordem dos fenômenos físicos, seja na dos fatos morais ou sociais.** (ROXO, 1937, p. 172-173, grifo nosso).

CAPÍTULO IV

LIVROS DIDÁTICOS E O CONCEITO DE FUNÇÃO NO PERÍODO DA REFORMA FRANCISCO CAMPOS

> ***"Livros não mudam o mundo, o que muda o mundo são as pessoas. Os livros só mudam as pessoas."***
>
> ***(Mário Quintana)***

Alicerçados nas concepções de Choppin e Bittencourt sobre livros didáticos e de Chervel sobre *vulgatas*, apresentadas no capítulo I, entendemos que a opção adequada à natureza desse trabalho para se estudar o processo inicial de disciplinarização de função na *matemática* escolar é a da análise dos livros didáticos, apesar da ciência de que ela, como já foi ressaltado no capítulo I, mesmo à luz dos planos curriculares e das instruções pedagógicas, espelhe uma imagem apenas parcial da disciplinarização em questão.

Para essa análise, escolheram-se algumas coleções, editadas na década de 1930, que estão entre as mais representativas - seja pelo caráter inovador, seja pelo segmento em que está inserida - e de maior penetração mercadológica:

1. Curso de Matemática Elementar, 2 volumes (1º e 2º anos), de Euclides Roxo, professor do Colégio Pedro II, editados pela Livraria Francisco Alves, do Rio de Janeiro;

2. Matemática, 2 volumes (1º e 2º anos), de Cecil Thiré e J. C. de Mello e Souza (Malba Tahan), professores do Colégio Pedro II, editados pela Livraria Francisco Alves;

3. Curso de Matemática, 3 volumes (3º. 4º e 5º anos), de Euclides Roxo, Cecil Thiré e J. C. Mello e Souza, editados pela Livraria Francisco Alves;

4. Primeiro Ano de Matemática a Quinto Ano de Matemática, 5 volumes, de Jacomo Stávale, professor do Instituto Caetano de Campos de São Paulo, editados pela Companhia Editora Nacional, de São Paulo;

5. Lições de Matemática, 5 volumes, de Algacyr Munhoz Maeder, professor do Ginásio Paranaense, editados pela Companhia Melhoramentos, de São Paulo;

6. Curso de Matemática, 5 volumes, de Agricola Bethlem, professor do Colégio Militar do Rio de Janeiro, editados pela Livraria do Globo de Porto Alegre.

Os dados acima mostram que as editoras e os autores relacionados estão diretamente vinculados aos estados do Rio de Janeiro, São Paulo, Paraná e Rio Grande do Sul. Considerando-se que essas editoras possuíam uma rede de distribuição que atingia outras regiões do Brasil, e que se destacavam pelo porte econômico na competição de mercados, pode-se avaliar a abrangência do alcance de suas publicações. Por exemplo, no caso dos livros de Jacomo Stávale, os mais vendidos, eles totalizaram mais de 150 edições e aproximadamente um milhão de exemplares (PFROMM NETTO, 1974, p. 81).

Outra consideração a ser feita, refere-se a uma mudança de comportamento quanto à utilização do livro didático em sala de aula, que parece ter sido induzido no período da Reforma Francisco Campos. Pelos livros anunciados nas contra-capas de muitos didáticos dessa época, observa-se um número muito grande de manuais exclusivos de exercícios, o que leva a crer que havia uma prática de o professor recomendar aos alunos que anotassem em seus cadernos a teoria e os exemplos apresentados em sala e, para os exercícios, utilizassem-se desses livros. A existência de tal prática é observada por Stávale nos prefácios de seus volumes:

> [...] E é ainda necessário que tenham livros onde encontrem a reprodução fiel das lições de seus professores. **Acabemos com o caderno de apontamentos** que é a causa principal da falência do

> ensino secundário do Brasil. (STÁVALE, 1930, p. IX-X, grifo nosso),

> Nesta segunda edição dos meus "Elementos de Matemática" ampliei consideravelmente os exercícios orais cuja eficiência é realmente admirável. Consideremos, por exemplo, os exercícios orais do parágrafo 43. **Todos os alunos abrem os livros na página em que estão estes exercícios**, e o professor diz à classe que reflita sobre o exercício número 11. (STÁVALE, 1940, p. XI, grifo nosso).

Observa-se nesses fragmentos a preocupação de Stávale, porque não da editora, em trazer o livro didático para a sala de aula. Objetivo este, que parece ter sido razoavelmente alcançado pelo autor, se visto pelo prisma da vendagem expressiva de seus compêndios. Um outro fator a ser considerado, em relação à grande tiragem dos didáticos, é o da expansão porque passava o ensino básico nesse período. Segundo Aranha:

> [...] de 1930 a 1940 o desenvolvimento do ensino primário e secundário alcança níveis jamais registrados até então no país. De 1936 a 1951 o número de escolas primárias dobra e o de secundárias quase quadruplica, ainda que essa expansão não seja homogênea, tendo se concentrado nas regiões urbanas dos Estados mais desenvolvidos. (ARANHA, 1996, p. 203).

De qualquer forma, o manual didático desse período da reforma Francisco Campos, ao que tudo indica, está mais próximo do cotidiano dos professores e alunos do que em qualquer outro período anterior.

Iniciaremos a análise dos livros listados no início deste capítulo por aqueles gestados no epicentro do movimento reformista: o Colégio Pedro II.

1 COLEÇÃO *CURSO DE MATEMÁTICA ELEMENTAR* – EUCLIDES ROXO

1.1 CURSO DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – Volume I (EUCLIDES ROXO)

Esse livro, publicado em 1929, foi escrito pelo professor e diretor do Colégio Pedro II, com o intuito primeiro de atender à demanda provocada pela mudança do programa de 1929 do curso secundário desse colégio que unificava a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, até então, disciplinas escolares distintas. Essa mudança estava inserida numa reformulação que implicava, além da reorganização dos conteúdos, uma nova e revolucionária posição metodológica frente ao ensino. Roxo redigiu esse compêndio objetivando, também, explicitar como as concepções norteadoras desse movimento se concretizariam em sala de aula, além de, através dele, disponibilizar um manual paradigmático para os professores e outros autores didáticos. Este fato pode ser atestado pela sua afirmação constante no prefácio:

> Sentir-nos-emos, entretanto recompensado, se com este esforço, conseguirmos despertar entre os professores brasileiros, seu alto interesse pelas questões delicadas da pedagogia da Matemática e fornecer-lhes estímulo para que se empenhem na elaboração de compêndios mais dignos do que este dos ideais de Klein e Poincaré (ROXO, 1929, p. 13).

Um dos pilares da nova proposta de modernização era o estabelecimento, sempre que possível, de conexões entre os diversos ramos da matemática escolar. Para isso, Roxo optou iniciar seu livro por geometria intentando entrelaçá-la, num segundo momento, com a aritmética, que já era familiar ao aluno desde o ensino primário. Assim, os três primeiros capítulos tratam das noções elementares do tema escolhido e, segundo o autor, tiveram a sua escrita fortemente influenciada pelos compêndios do professor alemão Behrendsen, conforme afirma no prefácio:

> Os três primeiros capítulos em que procuramos desenvolver no aluno a intuição espacial, suprem o que, a nosso ver, falta no Breslich, para estar inteiramente de acordo com as idéias da reforma. [...] Tanto nessa parte introdutória, como nos capítulos acima referidos, aproveitamos muita cousa dos excelentes compêndios do Prof. Behrendsen, da Universidade de Göttingen, " Lesebücher der Mathematik nach modernen Grundsätzen". (ROXO, 1929, p. 11-12).

A abordagem, nesses capítulos iniciais, das noções elementares de geometria é feita recorrendo-se ao raciocínio intuitivo, cujo emprego era outra concepção basilar da reforma. Assim, inicia-se o livro pela apresentação dos sólidos geométricos – mais suscetíveis à percepção sensorial do aluno. Da observação espacial, tridimensional, passa-se para a plana ao se focar as faces dos poliedros. A seguir, solicita-se a visão unidimensional ao se examinar as arestas e, finalmente, chega-se à idéia de ponto. Esse sentido de encaminhamento se opõe à forma tradicional de apresentação da geometria lógico-dedutiva (ponto, reta, plano...).

Ainda nesses três primeiros capítulos, vê-se a manifestação de outra concepção valorizada pela reforma que era trazer para o curso elementar noções de Cálculo Infinitesimal. Assim, percebe-se, já na página 28, o seu emprego, de modo subliminar, ao se construir um cubo. Inicia-se pelo movimento de um ponto originando uma aresta. O deslocamento dessa aresta cria uma face e a movimentação dessa gera um cubo. A esfera é apresentada pela rotação de uma moeda. A essa visão dinâmica da geometria, Roxo se refere no prefácio, da seguinte forma:

> [...] o abandono, em parte, da rígida didática de Euclides ("die starre euclidische Manier"), com a introdução da idéia de mobilidade de cada figura, por meio da qual em cada caso particular, se torna compreensível o caráter geral da Geometria. (ROXO, 1929, p. 9)

Nos capítulos IV, V e VI, utilizando um enfoque métrico, faz a transição da geometria para a aritmética (operações fundamentais). Nessa transição, ao operar com segmentos de comprimentos desconhecidos, apresenta a linguagem simbólica da álgebra.

Dessa forma, ao fim do capítulo VI, o leitor já transitou por diversas pontes lançadas sobre a aritmética, a álgebra e a geometria. Mas o que é mais relevante para o nosso estudo é a introdução, na página 66, de uma primeira aproximação do conceito de *dependência funcional*. Nessa oportunidade, o autor solicita ao aluno que, por meio da linguagem simbólica das equações, exprima a dependência entre quantidades em diversas situações propostas.

Assim, Roxo inicia, efetivamente, em seu livro a concretização da metodologia que explora o *pensamento funcional*. Aliás, no seu prefácio, ele cita Klein que afirmava que a sua introdução precoce era o âmago do moderno movimento de reforma. O *pensamento funcional* deveria ser desenvolvido e trabalhado amiúde nos diversos ramos da matemática sempre que se oferecesse uma oportunidade para exercitá-lo. Essa máxima se concretiza ao longo dos capítulos IV, V, VIII e IX, entre outros. O capítulo VII é dedicado integralmente ao tema *função* onde são apresentadas as representações tabular, gráfica e analítica em contextos que envolvem situações relacionadas ao cotidiano e a outras disciplinas.

O livro prossegue abordando números relativos com algum enfoque métrico e funcional e, em seguida, passa para o estudo das equações lineares no qual emprega a representação gráfica e algébrica de função.

Para se ter uma idéia de como Roxo utiliza a noção de função permeando o ensino da matemática escolar, poder-se-ia destacar a abordagem feita no capítulo IX, titulado de Equações Lineares, no qual obtém de maneira intuitiva e experimental a fórmula do perímetro da circunferência. Após comentar que essa fórmula exprime uma relação de *dependência funcional*, pede ao aluno que tabule perímetros para diversas medidas de raios. Em seguida, solicita que se esboce um gráfico a partir da tabela elaborada e, ainda, baseado no gráfico construído, se estime perímetros para valores de raios não constantes da tabela, intuindo, assim, de forma subjacente, a idéia de continuidade.

No capítulo seguinte, é retomada a geometria com o estudo de ângulo sob a óptica da rotação. Vê-se aí, mais acentuadamente que em outros capítulos, o emprego do método heurístico. Nessas páginas, através de perguntas e situações propostas, o aluno é levado, de forma quase autônoma, a obter e validar conclusões. Este procedimento é realizado, em geral, com diversas abordagens de um mesmo conceito.

Na seqüência, o livro de Roxo apresenta cálculo de áreas e abre espaço para entrelaçar esse assunto com a multiplicação de polinômios. Interpreta geometricamente o quadrado de um binômio que se prestará, em seguida, para justificar o algoritmo da extração da raiz quadrada. Aliás, cabe salientar que, em relação a esse algoritmo, o autor coloca ênfase muito mais na compreensão do processo do que no procedimento de extração em si. Este fato vem se juntar a muitos outros que revelam a sua não-preocupação com o sucesso de seus alunos numa avaliação escolar ortodoxa, ou melhor, a prioridade estava centrada mais em capacitar os educandos a entenderem e descobrirem processos, a compreenderem e formarem conceitos, do que treiná-los efetivamente na resolução de exercícios.

Esse primeiro volume da coleção didática do professor Euclides Roxo foi publicado em meados de 1929 (ROCHA, 2001, p. 42), quando, o ideal seria estar disponibilizado para os alunos, pelo menos, em março daquele ano. Assim, no ano letivo de 1929, os educandos não dispuseram de nenhum material específico que atendesse integralmente às modificações feitas no programa do Colégio Pedro II. É factível pensar que este fato tenha contribuído para dificultar o sucesso da implantação da nova metodologia que era realmente revolucionária em relação aos parâmetros anteriores. No prefácio desse livro, Roxo, de certa forma, deixa transparecer a premência de tempo a que foi submetido e revela que o seu grande comprometimento era mesmo com a aceitação e a consolidação dos novos métodos de ensino:

> O modesto trabalho, que ora lhe apresentamos, ainda bastante imperfeito, só poderá tornar-se verdadeiramente útil, quando em edições posteriores, for retocado de acordo com as sugestões que nos fizerem e que receberemos reconhecido. (ROXO, 1929, p. 13)

1.2 **CURSO DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – Volume II** (EUCLIDES ROXO)

Esse segundo volume foi escrito com o objetivo de atender ao programa de ensino do 2° ano do curso secundário do Pedro II. Esse programa, elaborado pelos professores Cecil Thiré, Euclides Roxo e J. C. Mello e Souza, foi aprovado pela Congregação do Colégio em 14 de novembro de 1929 (TAVARES, 2002, p. 163) e dava continuidade à recente reforma implantada.

Aparentemente, ao se examinar o índice desse compêndio, observa-se que apenas o capítulo VIII, titulado de *Noção de Função – Proporcionalidade*, não consta no referido programa. No entanto, a inclusão desse tema é significativa, pois sabe-se que o conceito de função permeando os vários ramos da matemática é um dos cânones do movimento modernizador.

Roxo concretiza nas páginas desse livro, até mais que no volume anterior, muitas de suas convicções metodológicas sobre o ensino da matemática escolar. Já nos primeiros capítulos utiliza o método intuitivo e indutivo como recurso heurístico. No entanto, ao estudar polígonos semelhantes, mostra e alerta como a intuição, quando não apoiada em assertivas sistematizadoras, pode levar a conclusões falsas.

Os capítulos V, VI e VII apresentam um encadeamento de assuntos executado com muita naturalidade. Inicia-se por razões e proporções que têm aplicação imediata no tratamento de figuras semelhantes. O capítulo VI aborda, baseado nas noções de semelhança, o cálculo aproximado de distâncias desconhecidas através das construção de desenhos em escala. Esse tipo de exercício serve de mote para se introduzir um cálculo mais preciso dessas grandezas métricas sem a necessidade de se construir os referidos desenhos. Assim, são introduzidas, no capítulo VII, as razões trigonométricas.

O capítulo VIII faz uma pausa no encadeamento que vinha ocorrendo ao abrir espaço para uma apresentação mais específica de *função*. No entanto, verificar-se-á que o entretecimento dos assuntos e os elos entre eles voltarão a ser estabelecidos nos capítulos seguinte enriquecidos, então, pelas diferentes representações de função.

Esse capítulo VIII inicia explorando o conceito de variável dependente e independente em diversas contextualizações e nas diferentes representações, algébrica, tabular e gráfica. Apresenta, em seguida, a *função proporcional* e justifica o seu gráfico, uma reta passando pela origem, relacionando a proporcionalidade com a tangente trigonométrica. Observa, em decorrência, a relação entre a declividade da reta e a constante de proporcionalidade.

No capítulo XI, após ter transitado por regra de três, juros e porcentagem, o leitor volta a se deparar com a função proporcional. Roxo a retoma e, aplicando-lhe uma translação, constrói a *função polinomial do 1º grau*. Faz as mais diversas aplicações, inclusive na cinemática e na termometria. Aliás, a conexão com a Física é uma prática por ele realizada, sempre de maneira oportuna e constante, desde o volume I.

O livro prossegue abordando a resolução de sistemas de equações lineares através de processos algébricos e gráficos. A discussão de sistemas é feita a partir da interpretação gráfica. *Função*, como pode se observar, continua onipresente no texto.

No final do livro, ao tratar da divisão algébrica de polinômios, ele mostra como um número natural pode ser escrito na forma polinomial de coeficientes naturais de 0 a 9, onde a variável assume valor 10. A partir daí, faz uma analogia entre o algoritmo da divisão utilizado na aritmética e o proposto na álgebra.

1.3 **CURSO DE MATEMÁTICA, 3ª SÉRIE, II – GEOMETRIA** (EUCLIDES ROXO)

O título deste livro, publicado em 1931, sinaliza que ele deveria ser complementado pelo 3ª SÉRIE, I – ARITMÉTICA E ÁLGEBRA, para juntos, constituírem o volume III da coleção *Curso de Matemática Elementar*, que vinha sendo editada desde 1929.

É possível que a opção por publicar parcialmente o que seria o volume do 3º ano, tenha ocorrido devido à impossibilidade de o autor disponibilizá-lo integralmente no prazo adequado. Sobre isso, salienta-se uma observação colocada em ata da Congregação do Colégio Pedro II, de 26 de janeiro de 1931, em que o professor Fernando Raja Gabaglia argumenta que ‘’acaba de votar pela indicação dos livros do Euclides Roxo ainda não impressos” (TAVARES, 2002, p. 129). Outra referência nesse sentido, foi feita pelo professor Almeida Lisboa, ferrenho crítico de Roxo, através de artigo publicado no Jornal do Commercio:

> Nunca impingi minhas “Lições de Álgebra” a aluno algum; delas nunca fiz nenhuma propaganda; nunca solicitei ou impus a sua adoção no Pedro II. Os livros do Sr. Roxo, esses sim, são recomendados oficialmente e agora, em dezembro, **a Congregação mandou adotar o 3° volume do Sr. Roxo, livro**

> **que ainda não foi publicado** e que portanto a Congregação desconhece. É a Indústria do livro...(LISBOA, JORNAL DO COMMERCIO, 1930, apud ROCHA, 2001, p.176, grifo nosso).

Cabe observar que o ordinal ***II*** que faz parte do título *CURSO DE MATEMÁTICA, 3ª SÉRIE,* ***II*** *– GEOMETRIA* evidencia que o livro foi escrito para atender a um programa elaborado pelo autor, para a Reforma Francisco Campos, que somente se tornaria público em 30 de junho de 1931, cujo item ***II*** se referia à Geometria – o item ***I*** referia-se, no programa, à Aritmética e Álgebra. Em tempo, o programa do 3° ano do Pedro II para o ano letivo de 1931, que deveria ser estabelecido e aprovado pela Congregação do Colégio em dezembro de 1930, documentalmente, parece não ter ocorrido talvez pela expectativa de uma publicação oficial a respeito.

A opção de Roxo por abordar primeiramente o item II (geometria) nesse livro quando o natural seria Aritmética e Álgebra (item I do programa), provavelmente se deu pelo fato de ter sido o método intuitivo utilizado em seu curso propedêutico de Geometria, nos 1º e 2º anos, um dos alvos mais atacados pelos contestadores de sua obra. Dessa feita, ele teria, finalmente, a oportunidade de dar uma resposta concreta, mostrando como seria empregado o método lógico-dedutivo a partir do embasamento construído com o curso propedêutico de geometria intuitiva.

Cabe, ainda, salientar que esse volume marca a interrupção da coleção *Curso de Matemática Elementar* de Euclides Roxo. Essa interrupção ocorreu devido, entre outros fatores, a uma melhor aceitação de outras coleções de cunho mais conservador quanto aos aspectos metodológicos, como veremos a seguir, mas que atendiam também, quanto a conteúdos, aos últimos programas do Colégio Pedro II e, num segundo instante, aos da Reforma Francisco Campos. Entre essas coleções, destaca-se a escrita pelos professores Cecil Thiré e J. C. Mello e Souza que, a partir do 3º volume, teve Euclides Roxo integrado à sua autoria. Assim, os volumes destinados aos 3º, 4º e 5º anos passaram a ser redigidos conjuntamente por esses três professores.

O fracasso editorial da coleção didática que vinha sendo escrita isoladamente por Roxo é constatado pelo fato de os dois primeiros volumes terem tido somente duas edições, e o terceiro, que nunca chegou a ser complementado por conteúdos de Aritmética e Álgebra, apenas uma. Em contraposição, o sucesso da coleção da dupla Cecil Thiré e Mello e Souza torna-se inquestionável. O primeiro volume, lançado no final de 1930, atingia, já em 1934, a 6ª edição. Essa constatação, aliada ao fato de essa coleção ter incorporado Roxo em sua co-autoria, a partir do 3° volume, torna-a o próximo e natural alvo de nossa análise.

2 COLEÇÃO ***MATEMÁTICA –*** MELLO E SOUZA e CECIL THIRÉ

2.1 MATEMÁTICA, 1º ANO – MELLO E SOUZA e CECIL THIRÉ

No prefácio da 1ª edição, datado de novembro de 1930, os autores Cecil Thiré e Júlio César de Mello e Souza (Malba Tahan), professores do Colégio Pedro II, salientavam que o livro atendia ao novo programa que recomendava a integração entre as diversas partes da matemática, mas, ressaltavam os autores, sem *a confusão de assuntos* – essa era a forma como os contestadores da obra de Roxo se referiam às conexões que ele fazia entre a aritmética, a álgebra e a geometria.

Ainda nesse prefácio, é feita outra referência ao manual escrito por Roxo: o fato deste fazer diversas aproximações de um mesmo conceito. Sobre isso, Cecil Thiré e Mello e Souza escrevem:

> Para a resolução de um problema ou para a dedução de uma fórmula banal, ensinam dois, três, e, às vezes, até quatro processos diferentes, quando, por um princípio comezinho de boa pedagogia, deviam ensinar apenas um desses processos e banir os demais.(SOUZA; THIRÉ, 1934, v.1, p. 11-12).

Sobre o entrelaçamento entre os diversos ramos da matemática recomendado pelas Instruções Pedagógicas, os autores colocam no prefácio a seguinte referência:

> No capítulo II, incluímos as primeira noções sobre a representação das quantidades por meio de letras, a fim de habituar, desde logo, o aluno com o cálculo literal e iniciá-lo na generalização das diversas transformações elementares. (SOUZA; THIRÉ, 1934, p. XV).

Realmente, nesse capítulo fundamentalmente de aritmética, titulado de Adição, observa-se uma tímida conceituação de variável, mas já se faz uma clara conexão com a álgebra e a geometria. Essas conexões prosseguem até o capítulo VI, onde se relaciona o quadrado de um número com a área de um quadrado e o cubo de um número com o volume de um cubo. As conexões, agora entre álgebra e geometria, voltam a ser estabelecidas no capítulo que trata da multiplicação algébrica.

Cabe observar a opção dos autores em começar o curso por aritmética, diferentemente de Roxo que havia dado preferência às noções sobre sólidos geométricos. Essa opção deve ter sido tomada, primeiramente, para se fazer uma transição do Primário para o Secundário da forma mais natural possível – configurar-se-ia uma continuidade de assuntos. Em segundo lugar, os professores já estavam acostumados a desenvolver esse tema tradicionalmente na primeira série e, dessa forma, não seriam solicitados, num primeiro momento, a modificarem substancialmente os seus procedimentos habituais. Outro fato a ser observado refere-se ao número muito pequeno de exercícios propostos neste volume o que possibilitava aos professores a adoção dos antigos e já familiares manuais de exercícios.

Aliás, a questão dos exercícios propostos é relevante, pois pode ter sido um dos fatores do fracasso editorial dos livros de Roxo que exigiam dos docentes uma postura totalmente nova e revolucionária. A respeito disso, Roxo alertava no prefácio de um de seus manuais:

> Quase todo o compêndio está redigido de modo a facilitar o ensino pelo método heurístico, em que se procura, tanto quanto possível, evitar o dogmatismo e levar, por meio de perguntas adequadas, o próprio estudante a descobrir fatos e a enunciar as regras e definições.
>
> Reconhecemos a grande dificuldade que há na aplicação desse método e **o quanto de esforço, atenção, boa vontade e até mesmo de entusiasmo ele exige do professor**; mas é o único

> que se coaduna com os modernos preceitos pedagógicos. (ROXO, 1929, p. 12, grifo nosso)

Retomando o livro de Thiré e Mello e Souza, observa-se que o *pensamento funcional* que, segundo o movimento de modernização, deveria permear o máximo possível os assuntos, não se manifesta efetivamente nesse volume. O item programático referente à representação gráfica de função é relegado a último plano, figurando no capítulo XXIII, onde não interage com outras partes da matemática, apresenta poucos exercícios, e deixa a impressão de lá estar apenas para atender ao programa oficial.

Ao tratar das fórmulas, na página 307, os autores dispunham de uma ótima oportunidade de exercitar o *pensamento funcional* observando a dependência de variáveis nelas expressa. No entanto, a conceituação por eles apresentada é apenas a seguinte:

> “Uma fórmula é, portanto, uma igualdade que nos dá, sob forma abreviada, os cálculos que devemos efetuar sobre os dados de um problema para obtermos o valor da incógnita”.(SOUZA; THIRÉ., 1934, p.307).

Em suma, no que diz respeito à noção de função, esse volume não a utiliza para interligar os ramos da matemática, deixa a representação gráfica para um dos últimos capítulos e, praticamente, não oferece oportunidades para se desenvolver o pensamento funcional do aluno.

2.2 MATEMÁTICA, 2° ANO – MELLO E SOUZA e CECIL THIRÉ

Este segundo volume já foi concebido para ser utilizado em plena vigência do programa da Reforma Francisco Campos. Ainda havia uma preocupação em apresentá-lo como alternativa ao compêndio escrito por Roxo. Este fato fica explícito, quando a dupla de autores afirma, no prefácio da 1ª edição, que o livro deles “não traz uma única linha traduzida ou decalcada de outros compêndios” – Roxo assumia que vários capítulos do seu didático foram, em parte, absorvidos e adaptados do manual redigido pelo professor americano Ernst Breslich. Não por acaso, na página 384 do livro de Thiré e Mello e Souza, é apresentado um texto de leitura complementar redigido pelo professor Almeida Lisboa, também do Pedro II e reconhecido contestador das concepções de Roxo.

Esse volume, talvez por força da própria estruturação do programa oficial, traz um encadeamento de assuntos que percorre as diversas áreas da matemática. A proporcionalidade, num primeiro instante é o fio condutor desse encadeamento. Assim, no capítulo VII, de razões e proporções, os autores abrem um espaço para apresentarem grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Passam para números e grandezas proporcionais, no capítulo VII, e retornam à geometria no IX, capítulo de semelhança de figuras geométricas. O conceito de semelhança, por sua vez, serve de mote para introduzirem as razões trigonométricas no capítulo X. Esse fio condutor prossegue até o capítulo XVI que trata da divisão proporcional.

É significativo observar que, embora surjam, ao longo do manual, inúmeras oportunidades para se explorar o pensamento funcional, isto não ocorre. Todavia, no capítulo XVIII, constante do último quarto do livro, os autores lançam-se ao estudo de funções. Contrariamente ao ocorrido no primeiro volume, as noções de variável e dependência são bem conceituadas, o entendimento da fórmula como expressão de uma dependência de variáveis é ressaltada e as diversas representações de função são exploradas, inclusive, com aplicações no campo da cinemática. No capítulo seguinte, a representação gráfica é amplamente empregada na discussão das soluções dos sistemas lineares. No entanto, muitas das ferramentas apresentadas nesses dois capítulos, que seriam essenciais para uma compreensão funcional dos assuntos que envolviam proporcionalidade, só se tornam disponibilizadas ao final do livro. Na prática, este formato acaba propiciando ao professor a possibilidade de desenvolver o curso da maneira que já estava habituado antes da Reforma, sem a mediação inovadora do *pensamento funcional* .

Outro fato a ressaltar, refere-se à abordagem empregada na geometria. Ao contrário do primeiro volume, em que era tratada de modo estático, nesse, ela aparece impregnada da idéia de movimento. A utilização da intuição na apresentação dos conceitos é outra constatação.

As observações acima mostram que, embora esse manual da 2ª série não apresente as características metodológicas marcantes da obra de Roxo, ele consegue atender, em parte, aos princípios do movimento modernizador, sem impor aos professores uma mudança radical de suas concepções.

3 COLEÇÃO ***CURSO DE MATEMÁTICA* –** EUCLIDES ROXO, MELLO E SOUZA e CECIL THIRÉ

3.1 CURSO DE MATEMÁTICA, 3° ANO – EUCLIDES ROXO, MELLO E SOUZA e CECIL THIRÉ

Curiosamente, nesse livro que marca a inclusão de Roxo na co-autoria, observa-se, na parte de geometria, uma preocupação menor com o rigor matemático do que o verificado no seu terceiro volume, *Curso de Matemática, 3ª série, II – Geometria*, escrito isoladamente. Segundo a apropriação feita por Roxo das concepções do movimento modernizador internacional, a 3ª série seria a ideal para acelerar de uma forma mais efetiva o processo de migração da geometria propedêutica intuitiva para a lógico-dedutiva – na Alemanha, a geometria propedêutica era trabalhada nas classes de quinta e quarta. Situação semelhante é observada na álgebra, onde o assunto equações, que na obra de Roxo era desenvolvido intuitivamente na 2ª série, é retomado nesse terceiro volume com muito mais rigor. Sobre o princípio do movimento reformista de que no ensino deve-se partir do concreto para se chegar ao abstrato, é fundamental salientar a apropriação de Roxo a respeito:

> Convém notar, entretanto, que a base intuitiva sobre que se deve assentar o estudo da matemática não é apenas a percepção do *concreto*, no sentido das coisas materiais. É tudo aquilo que está inteiramente dominado pela faculdade intelectual do aluno... O concreto, em qualquer fase, inclui todas as abstrações previamente feitas e assimiladas. (ROXO, 1937, p. 73).

Dessa forma, progressivamente dever-se-ia abrir mais espaço para o raciocínio lógico-dedutivo. Sobre essa ocorrência, destacamos dois trechos das

Instruções Pedagógicas Para o Programa de Matemática da Reforma Francisco Campos:

> A exposição da matéria e a orientação metodológica, entretanto, devem subordinar-se, sobretudo nas séries inferiores, às exigências da pedagogia, de preferência aos princípios puramente lógicos. Ter-se-á sempre em vista, em cada fase do ensino, o grau de desenvolvimento mental do aluno aos interesses para os quais tem maior inclinação.
>
> [...]Partindo da intuição viva e concreta, a feição lógica crescerá, a pouco e pouco, até atingir, gradualmente, a exposição formal. (Instruções Pedagógicas – Reforma Francisco Campos, 1931, apud BICUDO, 1942, p. 157).

Quanto ao assunto *funções*, é dedicado a ele todo o capítulo VI, onde se observa o trânsito entre as diversas representações: algébrica, tabular e gráfica. Como ferramenta, ele comparece no capítulo que discute as soluções de um sistema linear e, também, no que trata da resolução gráfica da equação do 2° grau.

3.2 **CURSO DE MATEMÁTICA, 4° ANO –** EUCLIDES ROXO, MELLO E SOUZA e CECIL THIRÉ

A máxima de ter *o conceito de função como idéia coordenadora do ensino da matemática secundária* assume, nesse volume, um substancial grau de concretização.

Os autores, nos capítulos em que abordam a função exponencial, a logarítmica e as trigonométricas, exploram as suas diversas representações –

tabular, gráfica e algébrica – e, nelas, trabalham constantemente a idéia de variação e dependência.

Quanto ao *pensamento funcional*, cabe ressaltar que ele se faz presente também em outras partes do livro, entre elas, a que trata de juros compostos e a que apresenta o cálculo do pi pelo método dos perímetros. No entanto, a sua ausência é notada nos capítulos de progressões e problemas do 2° grau – havia

ótimas oportunidades para exercitá-lo.

O raciocínio intuitivo e indutivo é utilizado com freqüência na apresentação dos temas, não só na álgebra , mas também na geometria. Pode-se dizer, com segurança, que esse volume atende, em grande parte, aos ditames preconizados pelas Instruções Pedagógicas da Reforma Francisco Campos.

3.3 **CURSO DE MATEMÁTICA, 5° ANO –** EUCLIDES ROXO, MELLO E SOUZA e CECIL THIRÉ

Neste volume, materializa-se uma das concepções basilares do movimento internacional modernizador do ensino da matemática escolar que consistia em trazer para o curso secundário noções de Cálculo Infinitesimal. Assim, de seus 23 capítulos, 12 são dedicados ao tema e outros dois dele se utilizam para o cálculo de áreas e volumes. Sobre o tratamento que lhe é dado, J. B. Pitombeira de Carvalho destaca:

> A parte do livro que trata de limites, funções, continuidade e os rudimentos do cálculo infinitesimal recebe, neste livro, tratamento

> tão cuidadoso quanto em muitos cursos introdutórios sobre o assunto em estabelecimentos do 3º grau, incluindo o cálculo de áreas simples como aplicação do conceito de integral. (CARVALHO, 2003, p. 127)

A abordagem explora o raciocínio intuitivo e indutivo do leitor ao máximo. Apesar disso, consegue trazer a essência dos conceitos fundamentais do cálculo para o nível elementar. Uma primeira constatação desse fato pode ser feita observando-se as definições de limite e função derivada que são apresentadas após cuidadosos preâmbulos:

> Chama-se limite, de uma quantidade variável x, a uma constante da qual a variável se pode aproximar de tal modo, que a diferença entre a variável x e a constante possa tornar-se e permanecer, em valor absoluto, menor do que qualquer quantidade dada.
>
> [...]Chama-se derivada de uma função, a uma outra função que exprime, para um valor dado da variável, o limite da razão do acréscimo da função dada para o acréscimo correspondente da variável, quando este tende a zero. (ROXO; SOUZA; THIRÉ, 1934, p. 97-162).

A inspiração para se iniciar o cálculo é nitidamente newtoniana – os autores procuram sensibilizar os alunos colocando duas leituras complementares de Rouse Ball sobre Newton. Em seguida, são utilizados os recursos operacionais e de notação propiciados por Leibniz (ver *anexo 3*).

O capítulo de derivadas é precedido por outro dedicado inteiramente ao estudo sistematizado de função. Neste, são trabalhados os diversos conceitos, representações e classificações, incluindo um estudo sobre acréscimos.

O livro prossegue percorrendo a teoria dos máximos e mínimos e, também, das séries.

Cabe observar como os autores conseguem intuitivamente passar a essência de um conceito sem o ônus de uma demonstração rigorosa e desinteressante para um aluno do secundário. Entre vários exemplos, poder-se-ia destacar o que trata da divergência da série harmônica, cujo texto mostra que essa série pode ser escrita na forma:

$$(1 + 1/2) + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + \ldots$$

Em seguida, intui que cada agrupamento formado corresponde a uma nova parcela de soma maior que ½, caracterizando, assim, uma série divergente – os autores não se prendem a uma demonstração mais pormenorizada e rigorosa, mas também, não apresentam a proposição gratuitamente.

Na seqüência, o volume em questão apresenta as primitivas imediatas e os desenvolvimentos em séries. Nesse último item, é trabalhada a fórmula de Taylor, que tinha um significado emblemático para Klein como exemplo do pensamento matemático sintético. Através das séries de Taylor, pode-se perceber como, por exemplo, a *função seno* e a *exponencial de base e*, originárias de regiões diferentes da matemática, estão tão íntima e simplesmente relacionadas. Aliás, fazendo um paralelo, vimos no capítulo II, que a teoria das funções analíticas de variável complexa era muito valorizada por Klein pela sua capacidade de unificar a matemática relacionando ramos distintos. Realmente, não há como não se admirar a consistência sistêmica conseguida por Euler, na fórmula $e^{xi} = \cos x +$

i.senx. Em particular, para x = π, temos $e^{\pi.i} = -1$, uma sintética igualdade que relaciona elementos simbólicos dos mais relevantes para a matemática: e, π, i, -1.

Retomando a análise do livro em questão, observa-se que os autores, nos capítulos finais, apresentam a integral definida e a sua aplicação ao cálculo de áreas e volumes.

Cabe ainda salientar que esse manual do 5º ano, pela própria natureza dos assuntos abordados, utiliza-se com freqüência das representações funcionais – a linguagem das funções revela-se presente por quase todo o texto.

4. COLEÇÃO ***PRIMEIRO A QUINTO ANO DE MATEMÁTICA*** – JACOMO STÁVALE

Jácomo Stávale que, entre outras atribuições, era professor do Instituto Caetano de Campos de São Paulo redigiu uma coleção didática pela Companhia Editora Nacional que se tornou sucesso absoluto de vendas. Para se ter uma idéia de tal êxito, basta observar na capa do volume do 1º ano, editado em 1940, o registro da tiragem de 76 milheiros daquela que era a 15ª edição – a primeira foi lançada para o ano letivo de 1931. Ao todo, foram feitas mais de 150 edições e publicados aproximadamente um milhão de exemplares (PFROMM NETTO, 1974, p. 81).

Até o ano letivo de 1930, para atender à demanda provocada pela mudança dos programas de ensino do Colégio Pedro II, o mercado dispunha somente das obras de Roxo, as quais, devido a seu caráter revolucionário na abordagem da matemática escolar, vinham tornando-se alvos de muitas críticas.

Em virtude disso, abre-se um espaço para o surgimento de novos compêndios que procuravam conciliar os novos programas com as práticas e concepções dominantes no meio docente da época. É nesse quadro que emerge a coleção de Stávale. Aliás, o autor, já no prefácio de seu primeiro volume, explicitava claramente as suas críticas ao compêndio concorrente:

> Sem dúvida alguma, é bela e útil a nova orientação dada ao ensino da Matemática pela douta Congregação do Colégio Pedro II. Os quatro ramos da Matemática Elementar, **convém que sejam ensinados paralelamente**, desde o primeiro ano do curso ginasial. Mas o ensino simultâneo destes quatro ramos **não pode ser feito atabalhoadamente, como o pretendem alguns autores**. É necessário que os jovens estudantes tenham os seus conhecimentos perfeitamente classificados, assim como se classificam os livros de uma biblioteca. (STÁVALE, 1942, p. IX, grifo nosso).

O excerto acima mostra como o professor do Caetano de Campos, de vez, enterra um dos princípios mais caros a Félix Klein que é a valorização do pensamento sintético no ensino secundário. Em nenhum momento, Roxo, nas instruções pedagógicas, afirma que os ramos da matemática escolar devem ser ensinados paralelamente. Pelo contrário, ressalta a importância de se estabelecer, sempre que possível, o entrelaçamento entre as suas diversas partes.

O dito por Stávale no referido texto realmente se concretiza de forma acentuada em seus primeiros volumes – as conexões encontradas são insignificantes, principalmente se comparadas com as verificadas nas obras de Roxo, e mesmo, de Thiré e Mello e Souza.

No que tange às noções elementares de Geometria, previstas no programa das primeiras séries, o professor Jácomo Stávale lança outras farpas endereçadas a Roxo:

> [...] **Não me é possível concordar com a interdição do método dedutivo no primeiro ano ginasial**. Os meninos que constituem esta classe não são anormais; não são incapazes de raciocinar, como geralmente se supõe. São criaturas que têm cérebro; que ainda não sabem pensar com acerto, mas às quais devemos ensinar a pensar. O nosso dever é **adestrá-las** na arte de raciocinar e a Matemática é uma excelente escola para desenvolver o raciocínio. Eis por que, nestas noções elementares de Matemática, há algumas aplicações simples do método dedutivo. (STÁVALE, 1940, p. XI-XII, grifo nosso).

Sem dúvida, o texto acima tinha por alvo depreciar a valorização do pensamento intuitivo e indutivo praticada intensamente nos dois primeiros volumes da coleção escrita isoladamente por Roxo e que era um dos princípios movimento internacional de renovação do ensino secundário da matemática.

Do expresso no referido texto, seria de se esperar, pelo menos, um mínimo de rigor na escrita de Stávale. No entanto, o que se encontra são construções de causar pasmo àqueles que têm um relativo domínio da matemática secundária. A seguir, exibimos algumas delas:

> A linha quebrada é a linha que, não sendo reta, é formada de retas. A linha curva é a que não é reta, nem formada de retas. (STÁVALE, 1940, p. 43).

> Segmento retilíneo é uma porção limitada da linha reta. Uma reta AB com 8 centímetros é um segmento retilíneo. (idem, ibidem, p. 45).

O autor apresenta também nos capítulos de álgebra asserções com pretenso caráter definidor, mas na verdade, inconsistentes:

> *Incógnita de uma equação* é a letra que nela figura e que não pode receber valores quaisquer.
>
> *Raiz de uma equação* é o valor numérico que convém a uma incógnita. (STÁVALE, 1940, p. 307).

Poder-se-ia imaginar que esse tipo de linguagem era propositada no intuito de atender a uma compreensão maior dos alunos das séries iniciais. Mas não, à medida que as séries vão se sucedendo, as incongruências conceituais continuarão persistindo e mesmo se ampliando:

> A progressão geométrica, também chamada progressão por quociente, **é uma série** de números, cada um dos quais é igual ao anterior, multiplicado por uma constante, (STÁVALE, 1935, 4º ano, p. 61, grifo nosso).
>
> Consideremos a dízima periódica 0,44444... Sua geratriz é 4/9. E escrevemos: 0,4444... = 4/9. **Entretanto, é preciso compreender bem esta igualdade. A fração 4/9 não é igual a 0,4444...;** (STÁVALE, 1937, 5º ano, p. 186-187, grifo nosso).

Encontram-se fragmentos, como os acima apresentados, várias vezes na coleção. Ao contrário de Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza que, mesmo utilizando uma linguagem acessível, evitavam incorreções conceituais, Stavale delas abusa.

Sobre a introdução do Cálculo Infinitesimal no secundário - talvez o grande motivo que tenha levado Félix Klein a mergulhar na reformulação desse ensino - Stávale, no prefácio do *Quinto Ano de Matemática*, faz a seguinte referência:

> [...] Ora, não me parece acertada a inclusão do Cálculo Inifinitesimal no programa de Matemática da quinta série. E sabedor de que este meu modo de pensar já está bastante generalizado, e começa a granjear adeptos nas altas esferas educacionais do nosso país, **decidi resumir, o mais possível, as noções de Cálculo Infinitesimal** ou melhor, apresentar apenas as noções preliminares desta belíssima ciência. (STÁVALE, 1937, p. X).

Contrariando o excerto acima, o professor do Caetano de Campos coloca nesse livro um conteúdo mais amplo e aprofundado do que o exposto nos manuais do professores do Pedro II e, agravando a exeqüibilidade dessa parte do programa, observa-se que os capítulos dedicados ao tema apresentam o exagerado número de cerca de 450 exercícios propostos. Chega-se a imaginar se tal formatação não tinha o intuito de inviabilizar a permanência do Cálculo Infinitesimal entre os conteúdos do secundário – por essa ocasião, do alto das expressivas tiragens de seus didáticos, Stávale tinha condições de assumir tal postura.

Quanto à exploração do pensamento funcional ao longo do curso secundário, o autor dá mostras claras de seu vilipêndio já no volume do *primeiro ano*, em cujo prefácio, afirma: “Já o disse na primeira edição: é muito útil o uso de gráficos, mas é necessário evitar-lhes o abuso”. (STÁVALE, 1940, p. 11).

A frase acima parece ter sido esculpida para justificar o descaso com que esse tema foi tratado: das 318 páginas do livro, somente 6 são destinadas ao capítulo de gráficos - o penúltimo do livro -, e dos 2.400 exercícios propostos no volume, cerca de 20, menos de 1%, são dedicados a esse assunto. Cabe ainda, salientar uma abordagem feita nesse capítulo:

> [...] Esta expressão tem uma infinidade de valores numéricos; com efeito, representando-a por y, e dando a x todos os valores possíveis, teremos:
>
> **x = -3 = -2 = -1 = 0 = 1 = 2 =3 = 4 = 5 = 6 = 7........**
>
> **y = -3 = -1 = 1 = 3 = 5 = 7 = 9 = 11 = 13 = 15 = 17 =.....**
>
> (STÁVALE, 1940, p. 303, grifo nosso).

O fragmento acima evidencia, uma vez mais, o descuido do autor com as representações matemáticas. Um aluno mais atento, ao ler que 5 = 7 = 9 = ..., pode até tentar compreender a idéia de variação expressa pelo autor, mas não deve, nem pode achar coerente essa equivocada simbolização.

O pensamento funcional que, segundo as instruções pedagógicas do novo programa deveria permear os demais capítulos desse livro do primeiro ano, não ocorre efetivamente. Há apenas uma leve exploração da noção de dependência em exercícios sobre notação algébrica nas páginas 278 e 279, sem qualquer alusão à idéia de variação.

No livro do *segundo ano*, o seu último capítulo é reservado à *representação gráfica das funções*. Surpreendentemente, a abordagem desse tema é feita seguindo-se a maioria dos cânones do movimento de renovação do ensino da matemática escolar. Inicia-se com contextualizações pertinentes que exploram os conceitos de variação e dependência e também propiciam naturalmente o trânsito pelas diferentes representações funcionais. São estabelecidas, nos exemplos e nos exercícios, conexões com outros assuntos como, por exemplo, sistemas lineares e cinemática. Verifica-se também um cuidado maior com os conceitos e representações. Observa-se, no entanto, o fato de esse capítulo situar-se no final do exemplar e, portanto, sério candidato a ser ignorado.

O livro do *terceiro ano* abre espaço para função apenas no capítulo VIII, que trata da representação gráfica do trinômio do segundo grau.

O manual do *quarto ano*, ao tratar de logaritmos, ignora por completo a abordagem funcional – não faz menção alguma às funções logarítmica e exponencial. Nesse volume, função fica restrita a meras representações gráficas apresentadas, em teoria, na trigonometria. Já no compêndio do *quinto ano*, a utilização de função se faz presente em quase todo o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal.

Do exposto, podemos afirmar que a apropriação feita pelo professor Stávale das mudanças propostas na Reforma Francisco Campos, restringiu-se basicamente ao atendimento dos conteúdos e a uma abordagem, de certa forma, despreocupada quanto ao rigor excessivo.

Em vários países da Europa e no EUA, a recepção dos princípios do movimento de modernização do início do século foi feita, em geral e num primeiro momento, por matemáticos e pesquisadores de prestígio que se debruçaram na redação de compêndios dedicados ao ensino secundário. Assim, apenas para exemplificar, entre outros, destacamos: na *França*, Jules Tannery, Emile Borel, Picard e Carlo Bourlet; na *Alemanha*, Behrendsen e Lietzmann; nos *Estados*

Unidos, Georges Myers e Ernst Breslich. Esse não é o caso da coleção redigida por Stávale, que, em que pese o grande “didatismo” de sua linguagem, foi redigida tendo por norte essencialmente os conteúdos do programa e a sua experiência docente – não houve, ao que tudo indica, um grande envolvimento em analisar e estudar com maior profundidade os princípios do movimento modernizador.

Talvez, o grande sucesso editorial de sua coleção tenha residido na sua empatia com o professorado e numa compreensão de que uma mudança do porte pleiteado pelas Instruções Pedagógicas não poderia ser concretizada por simples decreto, desconsiderando-se as concepções reinantes entre os docentes.

5. COLEÇÃO ***LIÇÕES DE MATEMÁTICA*** **–** ALGACYR MUNHOZ MAEDER

O professor Algacyr Munhoz Maeder, que era catedrático de Física da Faculdade de Engenharia do Paraná e de Matemática do Ginásio Paranaense, publicou o 1° volume de sua coleção didática em 1934. Embora, em plena vigência da Reforma Francisco Campos, as páginas de rosto dos livros dessa coleção, pelos menos dos impressos até o final da década de 1930, salientavam: “de acordo com o programa oficial do Colégio Pedro II”.

No prefácio do compêndio do 1° ano, Maeder (1934, 1v., p. IV) faz questão de ressaltar: “Pensamos assim, que as nossas ‘*Lições de Matemática’ – 1ª série* satisfazem ao espírito do programa do Colégio Pedro II”. Com esse mesmo espírito, o prefácio do volume do 2º ano traz explicitamente várias concepções do autor que procuraram mostrar consonância com as Instruções Pedagógicas e, ao contrário do que ocorria nos prefácios dos livros de Jacomo Stavale, não se observa nos textos do professor do Paraná nenhum comentário irônico ou antagônico sobre o ideário do movimento renovador liderado por Euclides Roxo.

A aritmética, tema inicial do compêndio do 1º ano, recebe um tratamento primoroso em que se explora: o senso numérico do aluno; a compreensão da construção dos algoritmos; abordagens diferentes de um mesmo conceito; o estabelecimento de conexões da aritmética com a geometria e a álgebra. O autor, aliás, antecipa já no prefácio o cuidado que será dispensado à aritmética:

> [...] Mereceram-nos especial cuidado as operações fundamentais, desde a noção concreta inicial até à sua prática e **interpretação geométrica**, e assim procuramos desenvolver minuciosamente a parte concernente ao cálculo mental, aos processos de abreviação e à resolução dos respectivos problemas. (MAEDER, 1934, 1v., p. V, grifo nosso).

Quanto às noções sobre as principais formas geométricas, o professor Maeder inicia, no livro do 1° ano, a sua abordagem com uma seqüência semelhante à feita por Roxo: sustentado pelo emprego da intuição, apresenta, primeiramente, os sólidos geométricos; em seguida, a noção de superfície; e só posteriormente, as idéias de linha e ponto. No entanto, quanto à idéia de mobilidade na geometria, prefere o paradigma de Thiré e Mello e Souza: na 1ª série, adota uma visão estática e na 2ª introduz a idéia de movimento nas figuras geométricas. Nessa parte da matemática, o autor procura estar sintonizado com as concepções expressas nas *instruções pedagógicas* do programa sobre uma geometria escolar propedêutica de caráter intuitivo. Essa intenção pode ser observada no prefácio do livro do 2º ano, no fragmento que se segue:

> Julgamos dever incutir no espírito do aluno, logo de começo, as primeiras noções e principais propriedades dos tipos geométricos

> elementares, predispondo-o para o estudo da geometria dedutiva, a que terá de aplicar-se mais tarde. (MAEDER, 1935, v.2, p. III).

Assim, nos primeiros volumes da coleção, veremos o autor recorrer muitas vezes à intuição para tratar da geometria, mas sem incorrer em asserções inconsistentes e confusas como as verificadas no manual do professor Stávale.

Quanto aos capítulos de álgebra, o autor, ao contrário do que fez na aritmética, dá um tratamento essencialmente analítico – na parte teórica, praticamente não concretiza conexões com a geometria. Todos os manuais concorrentes, em maior ou menor grau, nos capítulos relativos a produtos notáveis e multiplicação de monômios, estabeleciam relações com o cálculo de áreas de retângulos. Na obra de Maeder, isto não se verifica.

No que concerne à *função*, observa-se nos três primeiros volumes da coleção que cada um deles apresenta um pequeno capítulo de cerca de 15 páginas, em que *não há exercícios propostos* para os alunos. Esse fato torna-se mais contundente se observarmos que cada livro propunha uma média de 800 questões.

A constatação acima nos remete a uma observação de Chervel de que os exercícios constituem uma componente essencial para a disciplinarização de um conteúdo. No instante em que Maeder não os apresenta nos capítulos de função, efetivamente está corroborando para que esse tema definhe como assunto escolar.

Quanto ao *pensamento funcional*, talvez pela sua atuação como professor de Física, o autor explora com propriedade, em diversas ocasiões, a idéia de variação e dependência. No entanto, poucas vezes, recorre às representações tabular e gráfica, a não ser nos capítulos relativos à Trigonometria e ao Cálculo Inifinitesimal.

Curiosamente, após Maeder trabalhar a função exponencial construindo inclusive o seu gráfico, verifica-se que ele não dá um tratamento funcional aos logaritmos, sequer apresenta os gráficos correspondentes – a abordagem é essencialmente aritmética. Já na Trigonometria, é retomado o *pensamento funcional*, que pode ser observado não só na construção de gráficos, mas também na exploração da idéia de variação e de propriedades inerentes às funções.

O *pensamento funcional* volta a ser requisitado intensamente no 5º volume, ao se abordar o Cálculo Infinitesimal. Aliás, esse assunto é tratado de forma competente, com um aprofundamento maior do que o verificado na obra de Roxo, e nesses capítulos constata-se um número adequado de exercícios propostos em contraposição ao exagero registrado no compêndio de Stávale.

6. COLEÇÃO ***CURSO DE MATEMÁTICA –*** AGRICOLA BETHLEM

O tenente- coronel Agricola Bethlem, engenheiro e bacharel em Matemática e Ciências Físicas, era professor do Colégio Militar do Rio de Janeiro e teve o primeiro volume de sua coleção editado pela Livraria do Globo, de Porto Alegre, em 1935.

Nesse livro da 1ª série, fica evidenciado o empenho do autor em atender às concepções manifestadas nas instruções pedagógicas da Reforma Francisco Campos. Esta intenção pode ser verificada, desde logo, no capítulo I que, a exemplo do que ocorre no manual de Roxo, inicia-se por noções sobre as formas geométricas. Ao abordar esse tema, Bethlem parte da apresentação de corpos físicos, mais sensíveis à percepção do educando, para chegar à idéia de ponto, mais abstrata. Em seguida, explora a comparação de medidas de segmentos através do “transporte” dessas figuras por meio de cartões, expediente esse, que volta a ser utilizado ao tratar de operações com segmentos.

Para apresentar a circunferência, o autor propõe ao aluno uma atividade que envolve o uso de um alfinete e um fio de linha. Esse tipo de recurso é largamente empregado ao longo do capítulo. Por exemplo, para obter a fórmula da área do círculo, Bethlem convida o leitor a recortar com a tesoura um círculo de papel em 12 setores circulares equivalentes e mostra que eles justapostos convenientemente podem formar uma figura com um contorno próximo ao de um paralelogramo. Em seguida, intui que à medida que o número de setores recortados vai aumentando o referido contorno tende a se aproximar, cada vez mais, de um retângulo de lados de dimensões iguais aos comprimentos da semi-circunferência e do raio.

Ao tratar do volume de um prisma oblíquo, o autor recorre à metáfora da pilha de cartões – reconhecidamente eficiente para uma apresentação intuitiva do Princípio de Cavalieri.

Pelo exposto até o momento, vê-se um total comprometimento do autor em atender às instruções pedagógicas da Reforma Francisco Campos no que se refere a iniciar a Geometria por um curso propedêutico intuitivo e experimental.

O capítulo II trata da Aritmética. Na primeira metade desse capítulo Bethlem explora constantemente o senso numérico do leitor, apresentando diferentes abordagens de um mesmo conceito que solicitam do aluno o cálculo mental e o exercício de sua capacidade de estimativa. Ao passar para o estudo das frações, o autor faz vários entrelaçamentos das grandezas numéricas com medidas de segmentos.

Ao final do capítulo II, são dedicadas onze páginas à representação gráfica. A abordagem é feita de maneira direta, sem nenhum preâmbulo, e restringe-se a uma simples transposição de dados da forma tabular para a gráfica, perdendo-se assim, uma ótima oportunidade de exercitar-se o *pensamento funcional* numa análise mais interpretativa dos gráficos.

O capítulo III, o último do livro, é reservado à Álgebra. Nele se verifica algum entrelaçamento com a geometria ao se tratar da multiplicação algébrica. Ainda nesse capítulo, chama à atenção o fato de o autor apresentar a unidade imaginária i, quando do estudo da radiciação de números relativos. Este fato, que contrasta com a sensibilidade demonstrada pela sua escrita até então, é um prenúncio do tratamento que prevalecerá em várias partes dos demais livros da coleção em que se desconsidera a faixa etária do educando.

O volume da 2ª série principia também por geometria e verifica-se no primeiro capítulo uma abordagem primorosa sob a óptica das Instruções

Pedagógicas da Reforma Francisco Campos. O autor solicita o uso de papel transparente para o transporte de figuras; dobramentos de folhas de papel para divisão de ângulos; palitos para estabelecer a condição de existência de um triângulo; além do emprego constante de esquadro, compasso e transferidor para a análise e construção de figuras geométricas.

A idéia de mobilidade em geometria é bem explorada. Por exemplo, várias relações entre os ângulos internos e externos de um triângulo são obtidas, num primeiro instante, de forma intuitiva pela rotação e deslizamento de uma flecha sobre os lados. Num segundo instante, são feitas as validações formais.

Para apresentar o conceito de semelhança, o autor utiliza o recurso da ampliação de um triângulo por meio de um papel quadriculado onde se verifica com facilidade a manutenção das medidas dos ângulos correspondentes e a proporcionalidade dos lados correspondentes. A semelhança serve de mote para se passar ao cálculo de medidas indiretas de distâncias e, na seqüência, introduzir as razões trigonométricas.

O capítulo II, titulado de Aritmética e Álgebra, inicia-se com a noção de *função*. A abordagem desse tema principia pela apresentação da idéia de correspondência, variação e dependência, e, em seguida, passa para a construção de gráficos de funções que representam grandezas direta e inversamente proporcionais. Em seguida, o autor envereda por assuntos naturalmente encadeados: proporções, regra de três, divisão proporcional, porcentagem, juros e câmbio.

Na última parte do livro, Bethlem retoma a álgebra estudando as equações e, posteriormente, a divisão de polinômios. No tratamento desse tema, o autor parece ignorar por completo a faixa etária dos alunos e apresenta o teorema de D'Alembert e o algoritmo de Briot-Ruffini com questões que exigem uma capacidade de abstração desproporcional para a 2ª série. Variações dos exercícios aí propostos podem ser encontrados nos vestibulares mais disputados das últimas décadas.

Ao tratar da fatoração algébrica, o professor-engenheiro chega ao exagero de sistematizar 8 casos.

No encerramento do livro, o autor solicita que o aluno, utilizando simplificação de frações algébricas, calcule os *verdadeiros valores* – expressão do texto do manual – de quocientes polinomiais P(x)/Q(x) para números que anulam simultaneamente P(x) e Q(x) , o correspondente, na teoria dos limites, ao símbolo de indeterminação 0/0.

Esse último quarto do livro revela uma absoluta dissonância entre seu conteúdo e o nível de maturação de um aluno da 2ª série e contrasta totalmente com o restante do manual quanto ao atendimento das Instruções Pedagógicas da Reforma Francisco Campos que enfatiza:

> A exposição da matéria e a orientação metodológica, entretanto, devem subordinar-se, sobretudo nas séries inferiores, às exigências da pedagogia. (BICUDO, 1942, p. 157).

O volume da 3ª série inicia-se por Álgebra de forma claramente desmotivadora: as duas primeiras páginas, sem preâmbulo algum, apresentam a resolução de uma única equação literal do 1° grau, daquelas que espantam os alunos, não só pelo tamanho, mas também pela profusão de termos literais encontrados. Assim, já nas primeiras páginas, o autor manifesta a relevância acentuada que dá ao tecnicismo algébrico.

Essa concepção do militar-engenheiro toma contornos ainda mais contundentes quando ele apresenta os algoritmos de extração da raiz quadrada e cúbica de, não só números inteiros, mas também polinômios.

Prosseguindo, Bethlem passa ao estudo das funções definidas por $y = x^n$, $y = 1/x^n$ e $y = \sqrt[n]{x}$, para *n* natural não-nulo. Nesse estudo, além da parte gráfica explora a monotonicidade e a paridade dessas funções.

Dando continuidade à parte de Álgebra, o autor trata dos *números imaginários complexos* apresentando inclusive a forma trigonométrica, mas não se detém em exercícios. Em seguida, após uma sistematização pormenorizada dos mais diversos casos de racionalização de denominadores, Bethlem adentra ao estudo do trinômio do segundo grau apresentando de chofre a sua forma canônica. Explora o *pensamento funcional* nessa forma tratada do trinômio, dela extraindo: eixo de simetria, pela análise do termo $(x+b/2a)^2$; vértice da parábola; número de raízes reais; concavidade; variação; máximo e mínimo. Somente após vários exemplos em que são trabalhadas essas noções, é que o autor passa à obtenção analítica das raízes.

O capítulo II do livro da 3ª série é dedicado ao desenvolvimento de uma geometria dedutiva que é realizado de maneira muito próxima ao padrão adotado pelos outros compêndios já analisados nesta dissertação.

No volume da 4ª série, o *pensamento funcional* volta a ser explorado no estudo sobre o trinômio do 2º grau e no trato das funções exponenciais e circulares. Quanto ao volume da 5ª série, não se conseguiu obter nenhum exemplar.

Da análise da coleção de Bethlem fica a impressão de que, se o autor tivesse deixado o aprofundamento descabido na parte de Álgebra para uma abordagem posterior, a ser feita, por exemplo, em um outro volume destinado, talvez, ao curso complementar, ele poderia ter disponibilizado um manual didático adequado ao ensino secundário e que, no mínimo, estaria atendendo, em grande parte, às Instruções Pedagógicas da Reforma Francisco Campos. O descompasso entre a complexidade apresentada em várias partes do texto e o nível de maturação intelectual do aluno do curso fundamental deve ter comprometido uma adoção mais ampla desse compêndio, pelo menos no que se refere aos volumes da 3ª série em diante.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da análise dos livros didáticos feita no capítulo anterior, procuraremos levantar, com o foco no conceito de função, as características comuns a esses manuais objetivando identificar a *vulgata* do período de vigência da Reforma Francisco Campos. Sobre esse fenômeno da *vulgata*, lembramos algumas considerações de Chervel que nos serão úteis:

> [...] Verifica-se o fenômeno da *vulgata,* o qual parece comum às diferentes disciplinas. Em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, grosso modo, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do *corpus* de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas. São apenas essas variações , aliás, que podem justificar a publicação de novos manuais e, de qualquer modo não apresentam mais do que desvios mínimos [...] (CHERVEL, 1990, p. 203).

No levantamento das características comuns dos manuais analisados sobre o conceito de função utilizaremos como critério, num primeiro momento, o atendimento às Instruções Pedagógicas da Reforma Francisco Campos. Para isso, destacamos os trechos referentes a *função* constantes das instruções:

> [...] Para dar unidade à matéria, estabelecendo-se estreita correlação entre as diversas modalidades do pensamento matemático, será adotada, como **idéia central de ensino,** a

> noção de função, apresentada a princípio intuitivamente e desenvolvida nas séries sucessivas do curso, de modo gradativo, tanto sob a forma geométricas como sob a analítica.
>
> [...] Como um desenvolvimento natural do conceito de função, será incluído na 5ª série o ensino de noções fundamentais e iniciais do cálculo de derivadas.
>
> [...] Antes mesmo de formular qualquer definição e de usar a notação especial, o professor não deixará, nas múltiplas ocasiões que se apresentarem, tanto em Álgebra como em Geometria, de chamar a atenção para a **dependência** de uma grandeza em relação a outra ou como é determinada uma quantidade por uma ou várias outras.
>
> [...] A **fórmula** será considerada (entre outros aspectos) como expressão da dependência de uma variável em relação a outra.
>
> [...] A representação gráfica e a discussão numérica devem acompanhar, constantemente, o estudo das funções e permitir, assim, uma estreita conexão entre os diversos ramos das matemáticas elementares.
>
> [...] a tabela merece também ser devidamente apreciada. Como recursos indispensáveis à resolução rápida dos problemas da vida prática, é necessário que **o estudante perceba serem tabelas, gráficos e fórmulas algébricas representações da mesma espécie de conexão entre quantidades.** (Instruções Pedagógicas da Reforma Francisco Campos apud BICUDO, 1942, p. 157-159, grifo nosso).

Quanto aos manuais didáticos destinados ao *primeiro e segundo anos*, apenas os de autoria de Roxo concretizam, na plenitude, o atendimento às instruções acima pertinentes a essas séries. Apesar de alguma tentativa feita por Bethlem, observada no seu livro do segundo ano, os demais autores limitam-se a reservar, em cada volume, um dos últimos capítulos para a representação gráfica que apresenta, em geral, poucos exercícios. Essa configuração propiciava aos professores, que já não estavam habituados a abordar funções nessas séries, a possibilidade de ignorar esse tema em sala de aula - em geral, os últimos capítulos dos livros didáticos acabam por não serem explorados em classe e, nesse caso, ainda que abordados, dispunham de poucos exercícios. Em suma, apesar de os autores atenderem ao programa oficial quanto ao item função, percebe-se alguma intencionalidade deles em afastar esse assunto do cotidiano escolar ou, no mínimo, relegá-lo a segundo plano.

Com relação às três últimas séries do curso fundamental, observa-se, nos manuais do *quinto ano* de praticamente todas as coleções – o livro de Bethlem para esse ano não foi encontrado -, a presença de *função* permeando, com suas diversas representações, os conceitos trabalhados no Curso de Cálculo Infinitesimal. Já nos compêndios destinados ao *terceiro* e *quarto anos*, verifica-se em todas as coleções a presença, em maior (Roxo) ou menor grau (Maeder), da representação gráfica na resolução de sistemas lineares, nos estudos do trinômio do segundo grau e nas funções trigonométricas. Já a abordagem funcional de logaritmos é ignorada por Stávale e Maeder, mas está presente nas obras dos demais autores.

A exploração da noção de variação e dependência que deveria estar presente em todo o curso fundamental só é constatada nos livros em que Roxo participa como autor ou co-autor. Em menor escala, observa-se essa ocorrência também na obra de Maeder. Os demais autores restringem-se a escassos casos isolados em que expressam por meio da linguagem algébrica algum caso de dependência funcional – as fórmulas são apresentadas nesses manuais essencialmente como um recurso para se calcular algum valor desconhecido.

Quanto ao pensamento funcional entendido como um processo paulatino e gradativo, evidentemente, ele se manifesta nos manuais escritos por Roxo, já que este foi o responsável pelas instruções pedagógicas agregadas aos novos programas do Colégio Pedro II e da Reforma Francisco Campos. Nos demais didáticos, a manifestação do pensamento funcional está praticamente ausente no texto.

Embora as concepções de Roxo sobre o pensamento funcional tivessem inspiração claramente kleiniana, segundo o que ele afirma no capítulo VIII de seu livro de 1937, a concretização desse princípio, em seus dois primeiros volumes publicados, foi realizada mediante uma apropriação dos manuais didáticos de Breslich. Sobre isso, CARVALHO afirma:

Felix Klein tinha idéias muito mais gerais, profundas e significativas do que Breslich. Euclides Roxo as adotou integralmente. De Breslich, adotou a preocupação com um currículo integrado de Matemática, e copiou dele maneiras de executar tanto as idéias do próprio Breslich, quanto algumas de Klein. (CARVALHO, 2003, p. 149-150).

A apropriação dos textos de Breslich por Roxo, conforme este declara no prefácio do seu primeiro volume citando os capítulos dessa ocorrência, não ficou restrita só ao que tange ao pensamento funcional, mas também envolveu o entrelaçamento dos diversos ramos da matemática e à aplicação do método heurístico. Aliás, foram essas apropriações as que mais críticas suscitaram, a ponto de se tornarem um modelo a não ser seguido pelos outros autores didáticos. Cabe destacar que a influência explícita dos manuais de Breslich sobre os de Roxo fica reduzida aos dois primeiros volumes escritos por este, que em termos editoriais, redundaram em um fracasso: não passaram de duas edições cada.

É inconteste que, se, por um aspecto, a maioria dos compêndios analisados não encamparam a essência dos princípios modernizadores; por outro, ao lado de consolidarem a “unificação” das matemáticas, muitos desses manuais - entre eles, Stávale se destaca -, relegaram o rigor excessivo a um segundo plano e passaram a ver o texto didático de uma nova forma.

Como vimos, os capítulos de função destinados aos primeiros e segundos anos foram configurados pela maioria dos autores de forma a facilitar uma pequena ou nenhuma abordagem nas salas de aula. Em todos os livros do quinto ano, função se apresentava em capitulo preambular aos de Cálculo, onde atuava como ferramenta e, nas séries intermediárias, restringia-se, na maioria das coleções, à interpretação gráfica de sistemas lineares, do trinômio do segundo grau e das funções trigonométricas, mas sem nenhum enfoque significativo quanto ao pensamento funcional. Essa padronização ou, na linguagem de Chervel, a constituição dessa vulgata da abordagem de função é, após aproximadamente dez anos de vigência da Reforma Francisco Campos, de certa forma referendada pelo programa de matemática da Reforma Capanema, com as devidas adaptações aos novo formato: curso ginasial, clássico e científico.

Assim, conforme o programa de matemática para o *curso ginasial* oficializado por Gustavo Capanema, através da Portaria Ministerial de 11 de junho de 1942, *função* fica restrita à quarta série. Destacamos, a seguir, a parte do programa que contém tal informação:

> Unidade I. Equações e desigualdades do 1º grau: 1. Coordenadas cartesianas no plano; representações gráficas. 2. Resolução e discussão de um sistema de duas equações com duas incógnitas; interpretação gráfica da discussão; [...] (DASSIE, 2001, p. 106, grifo nosso).

O trecho acima deixa revelar que, por ocasião da elaboração desse programa, houve um extremado cuidado em não se empregar a palavra *função,* oficialmente, ao tratar de conteúdos do ginasial. Já no *curso clássico* função comparece, com todas as letras, na 1ª e na 3ª séries :

> Primeira Série – Álgebra:
> Unidade III – O trinômio do 2º grau: 1 - Decomposição sem fatores do 1º grau; sinais do trinômio; desigualdades do 2º grau. 2 – **Noção de variável e de função**; variação do trinômio do 2º grau; **representação gráfica.**
>
> Segunda Série –Trigonometria
> Unidade IV – Funções circulares ou trigonométricas; definição, variação [...]
>
> Terceira Série – Álgebra
> Unidade I – **Funções: 1 – Noção de Função de variável real. 2 – Representação cartesiana. 3 – Noção de Limite e de continuidade**
> Unidade II – Derivadas: 1 – Definição, interpretação geométrica e cinemática. 2 – Cálculo das derivadas. 3 – Derivação das funções elementares. 4- **Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.** (DASSIE, 2001, p. 152-153, grifo nosso).

No *curso científico*, verifica-se um comparecimento maior de função no programa:

> Primeira Série – Álgebra

> Unidade V – O trinômio do 2º grau: 1 – Decomposição em fatores do 1º grau; sinais do trinômio; inequações do 2º grau. 2 **– Noção de variável e de função**; variação do trinômio do 2º grau; **representação gráfica**. 3 – **Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos.**
>
> Segunda Série – Álgebra
> Unidade I – **A função exponencial**: 1 – Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2 – **Noção de função exponencial e de sua inversa.**
> Segunda Série – Trigonometria
> **Funções circulares ou trigonométricas:** definição**, variação**, [...]
>
> Terceira Série – Álgebra
> Unidade II **– Funções: 1 – Função de uma variável real. 2 – Representação cartesiana. 3 – Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidades de uma função racional**.
> Unidade III – Derivadas: 1 –Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2 – Cálculo das derivadas. 3 –Derivação das funções elementares. 4 **– Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.** (DASSIE, 2001, p. 153-155, grifo nosso).

O programa de matemática da Reforma Capanema vem, de certa forma, referendar uma prática do cotidiano escolar induzida pela *vulgata* da Reforma Francisco Campos. Aqueles capítulos sobre função, com poucos exercícios, apresentados nos finais dos livros do 1º e 2º anos, agora, são descartados oficialmente pelo programa da Reforma Capanema. O restante da abordagem funcional que comparecia nos três últimos anos do curso fundamental foi rearranjada em um novo formato: pequena parte na 4ª série ginasial e uma maior no clássico ou no científico.

Segundo Dassie (2001, p. 9-25) houve, durante a elaboração dos novos programas da Reforma Capanema enormes pressões dos mais diversos setores envolvidos em educação na época. Entre eles, meios ligados à Igreja ensejando um curso mais humanista e com menos ênfase ao ensino de função, ao lado de setores ligados ao ensino militar que preferiam um ensino de matemática sem conexões e, ainda, professores convictos de que alguns princípios do movimento de modernização do início do século não se mostravam adequadamente eficientes ou não atendiam às finalidades em que acreditavam como as ideais. A verdade é que os aproximadamente dez anos de vigência da Reforma Francisco Campos revelaram-se insuficientes para uma alteração mais profunda no ensino da matemática decorrente de uma apropriação mais efetiva dos princípios renovadores. Para corroborar com tal afirmação, podemos fazer um paralelo recorrendo a alguns trechos do relatório da reunião de Paris da Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM), de 1914, em que E. Beke, pesquisador húngaro assessor de Klein, comenta sobre os resultados da aplicação dos novos planos de estudos introduzidos na França, em 1902:

> [...] **A noção de função foi quase inteiramente negligenciada nesses doze anos** (1902 a 1914), **o que o Presidente de nossa Comissão (Klein) constatou também por seu próprio país; suas palavras aplicam-se a quase todos outros países**. Hoje, no entanto, não existem mais regiões onde a noção de função não tenha encontrado lugar no ensino secundário e mesmo – com muito poucas exceções – os elementos de Cálculo Diferencial e Integral figuram nos planos de estudos. (BEKE, 1914, p. 248, grifo e tradução nossos).

Em seguida Beke, comenta que um fator relevante na transformação observada no ensino francês foi a atuação do professor inglês John Perry, mas que, mesmo assim, os resultados encontram-se aquém do almejado pelo movimento internacional. Sobre isso, Beke continua:

> [...] Esta transformação não é, portanto, ainda a que M. Klein tinha desejado e nós todos com ele: **ela ainda não colocou a noção de função como centro de todo ensino secundário**, para que essa noção agisse como fermento e vivificasse toda a matéria ensinada. (BEKE, 1914, p. 248, grifo e tradução nossos).

Esses textos do relatório da CIEM sobre um período de *doze anos* de 1902 a 1914, permitem-nos estabelecer um paralelo e pensar que os *dez anos* da Reforma Campos foram realmente insuficientes para uma alteração mais profunda da nossa matemática escolar e, quanto ao pensamento funcional e à idéia de função como centro de ensino, esses *dez anos* se revelam ainda mais exíguos para uma concretização efetiva no ambiente da escola.

Aliás, os dois trechos de Beke apresentados acima revelam através das declarações atribuídas a Klein, o mais abalizado conhecedor do que ocorria mundialmente, que o pensamento funcional ainda não tinha encontrado seu lugar no cotidiano da sala de aula. Como já foi analisado no capítulo II, essa concepção tinha um caráter estratégico, aglutinador, mas não era o objetivo primordial do matemático alemão. Se analisarmos tal princípio pela óptica de Chervel, veremos que ele estava fortemente destinado ao desaparecimento no ambiente da disciplina escolar, pois para o pesquisador francês, a metodologia e o conteúdo devem estar entrelaçados enquanto componentes disciplinares. O pensamento funcional, tal como foi concebido, configura-se apenas como uma metodologia sem grande caráter prático ou facilitador, em termos de ensino. Sobre isso, Chervel observa:

Toda inovação, todo novo método chama a atenção dos mestres por uma maior facilidade, um interesse mais manifesto entre os alunos, o novo gosto que eles vão encontrar ao fazer os exercícios, a maior modernidade dos textos que se lhes submete.

> Essa interpretação dos fatos educacionais, e do papel da "pedagogia" no ensino se opõe, já se viu, a uma longa tradição que se baseia sobre um corte estrito entre **a instrução, de um lado, considerada como um conteúdo, e a pedagogia, de outro**, que não seria senão a forma de transmissão desse conteúdo. A realidade premente da prática docente **não permite essa separação** a não ser comprometendo igualmente a existência das finalidades. **De dois métodos concorrentes, para finalidade idêntica, no limite é sempre o mais fácil, o mais direto, o mais atraente ou o mais excitante que prevalece.** (CHERVEL, 1990, p. 205-206, grifo nosso).

Esse texto justifica e nos faz compreender a dificuldade da aplicação do *pensamento funcional* no cotidiano da sala de aula. Exemplificando: para o professor apresentar uma fórmula ou uma tabela ao aluno – fato corriqueiro nas aulas de matemática -, é muito mais simples e direto colocá-las como um recurso para se obter algum valor desconhecido do que explorar todas as possibilidades de variação e dependência que elas encerram – o *pensamento funcional* acaba por ser abandonado nesse tipo de atividade. Exemplos semelhantes poder-se-iam buscar quanto ao papel de função como idéia coordenadora dos diversos assuntos da matemática escolar.

Se o pensamento funcional, por um lado, acabou sendo alijado do ensino secundário nesse período da reforma Francisco Campos, por outro lado, vemos a penetração do método intuitivo e indutivo na geometria escolar. Essa ocorrência também pode ser justificada por Chervel: a geometria propedêutica que se instalou nos programas dos 1º e 2º anos é, sem dúvida, um conteúdo criado para a escola que entrelaça metodologia e conteúdo ao embrenhar o método intuitivo em sua abordagem. Cabe ressaltar que a concepção sobre metodologia e conteúdo interligados de Chervel, assim como a de *vulgata*, ajustam-se perfeitamente ao contexto educacional brasileiro da primeira metade do século XX.

Quanto ao elevado grau de inexeqüibilidade do *pensamento funcional* no ensino secundário da época, do modo como foi concebido, muito provavelmente, Klein tinha consciência. Como já vimos, junto a seus assessores, confidenciava que o papel de tal concepção era essencialmente estratégico no sentido de viabilizar a inclusão do Cálculo na matemática escolar. Aliás, isto é o que efetivamente acabou se concretizando em nosso país.

Parece factível levantarem-se hipóteses de que o fracasso da implantação de alguns dos princípios do movimento modernizador internacional no Brasil ocorreu devido a fatores que questionam a atuação política de Roxo, ou o nível de seu empenho quanto ao convencimento de camadas mais amplas do professorado, ou ainda, a forma autoritária e imediatista da Reforma Francisco Campos que acabou por não permitir aos professores uma progressiva adaptação às novas concepções. Mas, o presente trabalho nos leva a outra direção: Klein, comparado a Roxo, dispunha de condições muito mais favoráveis, em praticamente todos os aspectos, para a implantação, iniciada por volta de 1900, dos princípios modernizadores na Alemanha e, no entanto, após *14 anos*, dando cursos e palestras para os professores secundários, mobilizando inúmeros colaboradores, participando de diversos comitês nacionais e internacionais de educação e utilizando seu grande prestígio junto aos ministérios, ainda produzia desabafos como os captados por E. Beke, em 1914, que transparecem nas afirmações abaixo:

> [...] A noção de função foi quase inteiramente negligenciada nesses doze anos (1902-1914), o que **o Presidente de nossa Comissão (Klein) constatou também por seu próprio país;**
>
> [...] Esta transformação (em 1914**) não é, portanto, ainda a que o Sr. Klein tinha desejado** e nós todos com ele: ela ainda não colocou a noção de função como centro de todo ensino secundário, [...] (BEKE, 1914, p. 248, grifo e tradução nossos).

Portanto, perde força a hipótese de supor que, caso Roxo houvesse se empenhado numa atividade mais intensa junto às bases ou se tivesse tido uma atitude menos autoritária, como alguns lhe impingem, os resultados da aplicação de determinados princípios do movimento modernizador seriam muito diferentes. O fracasso da implantação do pensamento funcional e da concepção de função como idéia central do ensino está muito mais ligado às características desses princípios do que a uma possível atuação incompetente ou inadequada de Roxo. Entendemos que *os conceitos de Chervel a respeito de metodologia e conteúdo justificam muito mais tal insucesso do que a forma de ação de Euclides Roxo.* Além disso, não se pode deixar de levar em consideração que o objetivo primordial, embora não declarado explicitamente, do movimento internacional era a inclusão do Cálculo no secundário – o pensamento funcional e função como idéia central do ensino eram figuras coadjuvantes no processo. Aliás, o Cálculo efetivamente acabou se instalando entre os conteúdos da matemática escolar no período das reformas Francisco Campos e Capanema – de certa forma, atestando o acerto da estratégia desenhada por Klein.

Ainda a respeito de Roxo, não podemos deixar de destacar que se deve à sua atuação, tanto decisiva quanto pioneira, a penetração de *função* nos programas oficiais de matemática do ensino secundário nas décadas imediatas à implantação da Reforma Francisco Campos.

Esperamos que esta análise sobre o processo inicial de disciplinarização de função na matemática do ensino secundário brasileiro possa se prestar, junto a outros trabalhos, para uma compreensão maior da escolarização de *função* e mesmo do *Cálculo* na matemática escolar brasileira.

ANEXO 1

Obtenção do coeficiente angular da reta tangente à curva definida por $f(x)=x^2$ pelo **MÉTODO DE LEIBNIZ**

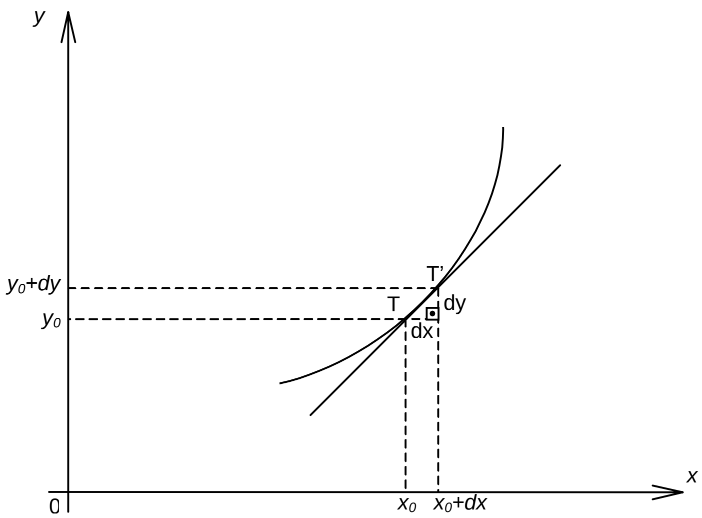
Esse método apoia-se principalmente nas seguintes concepções:

a) A noção dos *infinitamente pequenos*, que seriam quantidades essencialmente variáveis, tão pequenas quanto se quiser considerá-las, e tomadas sempre com valores situados nas vizinhanças do zero;

b) O *princípio da assimilação*, que assegura que uma linha curva pode ser assimilada como uma linha poligonal de lados infinitamente pequenos;

c) O *postulado de Leibniz*, que permite que sejam desprezadas, como parcelas, quantidades infinitamente pequenas diante de qualquer quantidade finita.

Vejamos, a seguir, utilizando-se o método de Leibniz, o processo para obtenção do coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x)=x^2$ no ponto T, de abscissa x_0:



Pelo *princípio da assimilação*, podemos assumir a reta tangente à curva em T como sendo a reta suporte do segmento infinitamente pequeno TT', componente da linha poligonal assimilada à curva. Assim, podemos escrever:

$$y + dy = f(x+dx)$$

$$y + dy = (x+dx)^2$$

$$y + dy = x^2 + 2xdx + (dx)^2$$

Observando que $y=x^2$, temos:

$$dy = 2xdx + (dx)^2$$

Assim, obtemos o coeficiente angular da reta tangente em T:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx$$

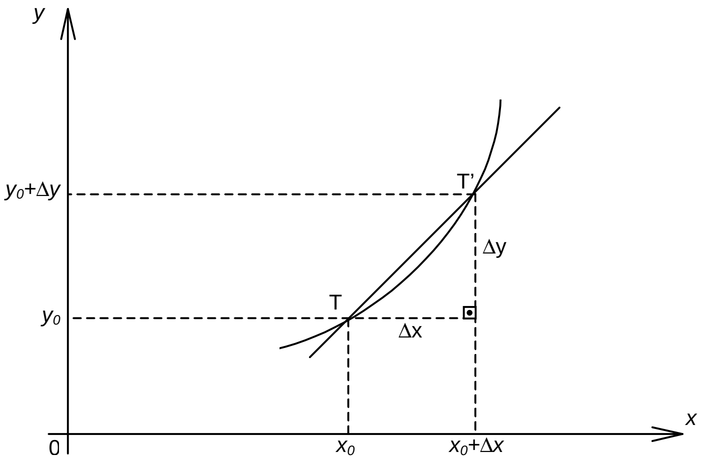
Aplicando o *postulado de Leibniz*, pode-se desprezar a parcela dx e obter-se o coeficiente angular procurado: $2x_0$.

ANEXO 2

Obtenção do coeficiente angular da reta tangente à curva definida por $f(x)=x^2$ pelo **MÉTODO DE NEWTON**

É também conhecido por *método das primeiras e últimas razões* e recorre à teoria dos Limites.

Para a obtenção do coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x)=x^2$ no ponto T, de abscissa x_0, considera-se inicialmente a reta secante $\overleftrightarrow{TT'}$.



Pode-se escrever que:

$$y + \Delta y = f(x+\Delta x)$$

Sendo $f(x)=x^2$, temos:

$$x^2 + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

Dividindo todos os termos por Δx, obtém-se o coeficiente angular da reta secante $\overleftrightarrow{TT'}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Para obter-se o coeficiente angular da reta tangente no ponto T, de abscissa x_0, intui-se que, para x tendendo a x_0, a reta secante tende à reta tangente. Assim, recorrendo-se à Teoria dos Limites e observando que para x tendendo a x_0 temos Δx tendendo a zero, pode-se escrever que:

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$$

Portanto, o coeficiente angular da reta tangente no ponto T de abscissa x_0 é $2x_0$.

ANEXO 3

Obtenção do coeficiente angular da reta tangente à curva

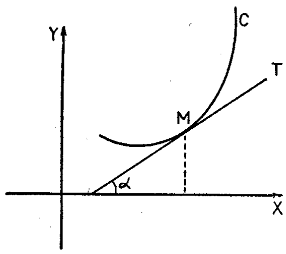
definida por *f(x)=x²* no livro do 5º ano de

ROXO, THIRÉ e MELLO E SOUZA

Destacamos, a seguir, algumas páginas do livro do 5º ano da coleção *CURSO DE MATEMÁTICA* de ROXO, THIRÉ e MELLO E SOUZA (1934):

160 CURSO DE MATEMATICA

16 — Declividade de uma curva.



Seja C uma curva definida pela equação

$$y = f(x)$$

Tomemos um ponto M qualquer dessa curva; seja MT a tangente á curva C, no ponto M.

Chamaremos *declividade da curva*, no ponto M, á declividade da tangente MT, nesse ponto, isto é, *ao coeficiente angular da tangente MT*. Sendo α o ângulo que MT faz com o eixo dos x, a declividade da curva, no ponto M, será $\operatorname{tg} x$.

17 — Declividade de uma função.

Chama-se declividade de uma função, num ponto dado, á declividade, nesse ponto, da curva representativa da função.

Exemplo: 10 é a declividade de x^2 no ponto $x = 5$.(*)

18 — Interpretação geométrica do limite dos acréscimos.

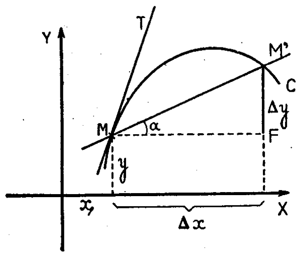
Seja C a curva representativa da função $y = f(x)$; seja M um ponto dessa curva e designemos por x e y as coordenadas do ponto M.

Si atribuirmos a x um acréscimo Δx, resultará para y um acréscimo Δy. A função sendo contínua, vamos obter um segundo ponto M' cujas coordenadas são:

$$x + \Delta x \text{ e } y + \Delta y$$

Tracemos a reta que passa pelos pontos M e M'.

Essa réta faz, com o eixo dos x, um ângulo $M'MF$ ou α.



(*) Nas funções contínuas univalentes, o ponto fica determinado por sua abcissa.

Do triângulo $M'MF$ tiramos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

A razão dos acréscimos é igual ao coeficiente ângular da reta MM'.

Se Δx tender para zero, o ponto M' tenderá a confundir-se com o ponto M e a réta MM' tenderá para uma posição limite, que é a tangente MT, á curva C, no ponto M.

O limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando Δx tende para zero, mede, pois, a declividade da curva C, ou a declividade da função y, no ponto M.

Conclusão:

A *declividade de uma função* $y = f(x)$, *num ponto* M, *é igual ao coeficiente angular da tangente á curva, definida pela equação, no ponto considerado.*

19 — Derivada de x^2.

Assim como determinámos, na função $y = x^2$, o limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, para $x = 5$, poderíamos fazer o mesmo para qualquer outro valor particular dado a x. Será, porém, muito mais cômodo deduzir a *expressão geral do limite em função de* x, isto é, uma fórmula na qual só tenhamos, para cada caso numérico, de substituir x pelo valor dado.

Consideremos a função

$$y = x^2$$

Dando a x um acréscimo Δx, resulta, para y, um acréscimo Δy. Temos:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

Efetuando o quadrado do binômio e substituindo y por x^2, temos:

$$x^2 + \Delta y = x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$

Reduzindo os termos semelhantes, tem-se:

$$\Delta y = 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$

Dividindo ambos os membros dessa equação por Δx, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Fazendo Δx tender para zero, vem:

$$lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

Fica, assim, determinada a declividade da função para o ponto de abcissa x. Como x pode representar um valor qualquer da variável independente, vemos que a declividade depende do valor de x; *é uma função de x*. Para lembrar que essa função se derivou da função dada, que é representada por y, chamá-la-emos *derivada* de y e representaremos por y'. Temos pois, $y' = 2x$.

Assim, para $x = 5$, a derivada de x^2 é 10; para $x = 3$, a derivada será igual a 6; para $x = 2{,}5$ a derivada de x^2 será 5.

20 — Derivada de uma função.

Retomemos a função

$$y = x^2$$

A derivada dessa função é $2x$.

Temos, pois:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x \qquad (p)$$

A igualdade (p) mostra que, no caso da função $y = x^2$, o limite dos acréscimos ou a declividade da tangente, em um ponto de abcissa dada, é o dôbro do valor dessa abcissa.

De um modo geral: dada uma função $y = f(x)$, que define uma curva C, a declividade da tangente ao longo dessa curva será *uma função de x*.

Essa nova função de x será representada por $f'(x)$ e denominada a *derivada* de $f(x)$.

Chama-se derivada de uma função, a uma outra função, que exprime, para um valor dado da variável, o limite da razão do acréscimo da função dada para o acréscimo correspondente da variável, quando êste tende para zero.

21 — Notação das derivadas.

Seja $y = f(x)$ uma função dada. A derivada de $f(x)$ é uma função. (*) que representaremos por y' ou por $f'(x)$.

Esta notação permite distinguir a derivada da função dada, que é representada por y' e, ao mesmo tempo mostrar que ela *se derivou* de y.

Sendo a derivada de uma função dada pelo limite.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

podemos representar esse limite simbòlicamente pela notação

$$\frac{dy}{dx}$$

Podemos escrever:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

De um modo geral: sendo u uma função de x, a derivada dessa função pode ser representada por u' ou por $\frac{du}{dx}$. (**)

(*) Existe em Matemática uma unica função notável que gosa da propriedade de ser igual a sua própria derivada. E' a função e^x. Podemos demonstrar fácilmente que a derivada de e^x é e^x.

(**) As notações dy, $\frac{dy}{dx}$ e os vocábulos *derivada* e *diferencial* são devidos a LEIBNIZ. A notação $f'(x)$ foi introduzida por LAGRANGE. A derivada era, por ARBOGAST, indicada pelo símbolo D $f(x)$ e CAUCHY empregava a notação $D_x f(x)$. NEWTON colocava um ponto sôbre a letra y quando queria indicar a derivada de y e BERNOULLI usava um pequeno traço sôbre a letra D. Não poucas foram as denominações dadas á função derivada. NEWTON usava o termo *fluxão* para designar a derivada de uma função (*fluente*); LACROIX introduziu a denominação de *coeficiente diferencial;* que para KLUGEL era *quociente diferencial* e para LHULIER *relação diferencial*. Cfr. *Enciclopédia delle Matematiche Elementari*, art. de GIULIO VIVANTI, vol. II, pag. 456.

Os autores, após utilizarem o método de Newton para a obtenção do coeficiente angular da reta tangente, apresentam a notação de Leibniz que passam a utilizar constantemente por todo o texto de Cálculo. A título de ilustração, destacamos mais duas páginas do mesmo livro:

240 CURSO DE MATEMATICA

Podemos escrever, segundo nos mostra a figura:

$$y\Delta x < \Delta S < (y + \Delta y)\Delta x$$

Dividindo por Δx, resulta:

$$y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y$$

Fazendo Δx tender para zero e conservando fixo o ponto M, a ordenada $M'P'$ terá por limite MP.

O limite de $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ será $\frac{\Delta S}{dx}$.

E como a expressão $\frac{\Delta S}{\Delta x}$, sendo maior do que y, tem de conservar-se sempre menor do que uma quantidade que tende para y, concluímos que o seu limite é igual a y; temos pois:

$$\frac{dS}{dx} = y$$

Daí tiramos:

$$dS = ydx$$

Conclusão: ***a diferencial da área limitada por uma curva $y = f(x)$, pelo eixo dos x, por uma ordenada fixa e por uma ordenada variável, é igual ao produto da ordenada variável pela diferencial da abcissa correspondente.*** **(*)**

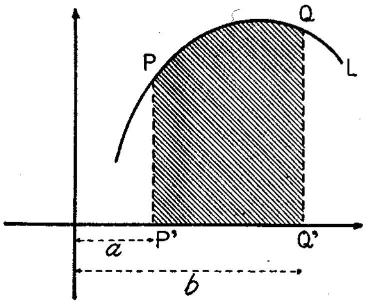
A diferencial dS da área considerada, S, será, pois, a função cuja diferencial é ydx, isto é, será a integral de ydx.

$$S = \int ydx$$

(*) Cfr. GRANVILLE — "Éléments de Calcul differentiel et intégral", trad. de Sallin, 1931, pag. 362.

2 — Area definida por uma integral.

Seja L uma curva definida pela equação $y = f(x)$.



Consideremos dois pontos, P e Q, da curva; o ponto P de ordenada PP' e o ponto Q de ordenada QQ'.

Designemos por S_1 a área $P'PQQ'$

Chamemos a a abcissa do ponto P e b a abcissa de Q.

A diferencial dS é igual ao produto ydx; temos, portanto:

$$dS = ydx$$

Substitindo y por sua expressão, $f(x)$, resulta:

$$dS = f(x)dx$$

Integrando ambos os membros dessa equação, vem:

$$S = \int f(x)dx$$

Representemos por $F(x) + C$ a integral do segundo membro; temos, assim:

$$S = F(x) + C \qquad (T)$$

Resta determinar a constante C, de modo que a área S tome o valor S_1.

Como a área S_1 (que queremos calcular) é contada a partir da ordenada PP', si fizermos $x = a$, na equação (T), o valor de S deve ser nulo; temos:

$$0 = F(a) + C$$

Dessa equação tiramos:

$$C = -F(a)$$

BIBLIOGRAFIA

ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMA TÉCNICAS. **NBR 6023**: Informação e documentação – Referências – Elaboração. Rio de Janeiro, 2002.

_______. **NBR 10520**: Informação e documentação – Citações em documentos – Apresentação. Rio de Janeiro, 2002.

_______. **NBR 14724**: Informação e documentação – Trabalhos acadêmicos – Apresentação. Rio de Janeiro, 2002.

ALMOULOUD, S. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática. São Paulo: PUC-SP, 2000.

APER: **Arquivo Pessoal Euclides Roxo**, Programa de Estudos Pós-graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2003.

ARANHA, M. L. A. **História da Educação**. São Paulo: Moderna, 1996.

BAUMGART, J. K. **História da Álgebra**. São Paulo: Saraiva, 2001.

BICUDO, J. C. **O ensino secundário no Brasil e sua atual legislação** (de 1931 a 1941 inclusive). São Paulo: Associação dos Inspetores Federais de Ensino Secundário de S. Paulo, 1942.

BITTENCOURT, C. M. F. Disciplinas Escolares: História e Pesquisa. In: **História das Disciplinas Escolares no Brasil:** contribuições para o debate. São Paulo: Editora da Universidade São Francisco, 2003.

BEKE, E. Rapport Général – séance de 1914 . In: **L'Enseignement Mathématique**. n.4 e 5. Paris: Gauthier-Villars, 1914.

BELTRÃO, M. E. P. **Uma Visão do Cálculo Infinitesimal no Ensino Médio**. 115f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BETHLEM, A. **Curso de Matemática**. 4v. Porto Alegre: Livraria do Globo, 1935-1938.

BONETTO, G. A. **A construção da representação gráfica e o seu papel no ensino de funções: uma visão histórica**. 227f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher Ltda,. 1974.

BRASIL, Ministério da Educação – **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.

BRESLICH. E. R. Developing Functional Thinking in Secondary School Mathematics. In: **The Third Yearbook –** The National Council of Teachers of Mathematics. New York: Bureau of Publication – Columbia University, 1928. p. 42-56.

CAMARGO, P; FERREIRA, F. Um Cálculo no meio do caminho. **Folha de S. Paulo**, São Paulo, 25 fev. 2003. Caderno Sinapse, p. 8-13.

CARVALHO, J. B. P. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática. In: VALENTE, W. (org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil.** São Paulo: SBEM, 2003, p. 86-158.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. In: **Teoria & Educação**. Porto Alegre: Pannonica, 1990. n.2, p.117-229.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique:** du savoir savant au sauvoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

CHOPPIN, A. Pasado y Presente de los Manuales Escolares. In: **La Cultura Escolar de Europa –** Tendencias Históricas Emergentes. Madrid: Editorial Biblioteca Nueva, 2000. p. 107-141.

DASSIE, B. A. ***A Matemática do Curso Secundário na Reforma Gustavo Capanema****. 170 f.Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.*

FEHR, H. La Notion de Fonction dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes. In: **L'enseignement mathématique**. 7º année. Zurich: L'Association des maîtres de mathématiques des Écoles moyennes suisses, 1905.

FEHR, H.; LAISANT, C. A (orgs.) **L'Enseignement Mathémathique** – Organe officiel da la CIEM. n. 4 e 5. Paris: Gauthier-Villards, 1914.

FORQUIN, J. C. Saberes escolares, imperativos didáticos e dinâmicas sociais. In: **Teoria & Educação**. Porto alegre: Pannonica, 1992, n.5 , p. 28-49.

GAFFRÉE, J. L. **A teoria do conhecimento de Kant:** um ensaio. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2000.

JULIÁ, D. Construcción de las disciplinas escolares em Europa. In: **La Cultura Escolar da Europa –** Tendencias históricas emergentes. Madrid: Editorial Biblioteca Nueva, 2000. p. 45-78.

KIERAN, C. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Montreal: Universidade de Quebec, 1992.

KLEIN, F. **Matemática Elemental Desde um Punto de Vista Superior**. v. 1. Coleção Biblioteca Matemática. Madrid, 1927.

_______. **Matemática Elemental Desde um Punto de Vista Superior**. v. 2. Coleção Biblioteca Matemática. Madrid, 1931.

_______. **De la enseñanza de las ciencias matemáticas y físicas em las universidades**. Tradução de artigo publicado por Johresberitcht der D. M. V, 1905. Madrid: Educación Matemática, v. 10, n.1, 1998.

LACASTA, E.; PASCUAL, J. R**. Las Funciones em los Gráficos Cartesianos**. Madrid: Sintesis, 1998.

LIMA, E.L. **Exame de textos:** análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2001

MAEDER, A. **Lições de Matemática.** 5 v**.** São Paulo: Melhoramentos, 1934-1938.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

OSSENBACH, G. ; SOMOZA,M**. Los Manuales Escolares como fuente para la Historia de la Educación em América Latina. Madrid:** UNED Ediciones, 2001.

PARSHALL, K. H.; ROWE, D. E**. The Emergence of the American Mathematical Research Community 1876-1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore**. Providence – Rhode Island: The Amerrican MathematicaL Society, 1994.

PFROMM NETTO, S. **O Livro na Educação**. Rio de Janeiro: Primor, 1974.

ROCHA, J. L. A. **A Matemática do Curso Secundário na Reforma Francisco Campos**. 228 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

ROXO, E. **Lições de Aritmética**. 7. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1928.

________. **Curso de Matemática Elementar**. v. 1.Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1929.
________. **Curso de Matemática Elementar**. v. 2. Rio de Janeiro: Francisco Alves, v.2, 1930.

________. **Curso de Matemática**, **3ª série, II – Geometria**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1931.

________. **A Matemática na Escola Secundária**. São Paulo: Nacional, 1937.

________. O Ensino da Matemática na Escola Secundária XII. Principais escopos e diretivas do movimento de reforma. O conceito de função como idéia axial de ensino. In: **Jornal do Commercio**, Rio de Janeiro, 22 de fev. 1931.

ROXO, E.; SOUZA, M.; THIRÉ, C. **Curso de Matemática – 3 º ano**. 3.ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1936.

________. **Curso de Matemática – 4º ano**. 5 ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1940.

________**. Curso de Matemática – 5 º ano**. 1 ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1934.

________. **Exercícios de Matemática – 5º ano**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1933.

SCHUBRING, G. O Primeiro Movimento Internacional de Reforma Curricular em Matemática e o Papel da Alemanha. In: **Zetetiké**. v. 7, n. 11. Campinas: CEMPEM- UNICAMP, 1999. p. 29-50.

________. **Análise histórica de livros de matemática: notas de aula**. Campinas: Autores Associados, 2003.

SHERVÁTOV, V. G. **Funciones Hiperbolicas**. Moscou: Editorial Mir, 1975.

SIGURDSON, S. E. **The Development of the Idea of Unified Mathematics in the Secondarary School Curriculum (1890-1930).** Tese. Doctor of Philosophy (Education). University of Wisconsin, 1962.

SILVEIRA BUENO, F. **Grande Dicionário Etimológico-Prosódico da Língua Portuguesa.** 8v. São Paulo: Editora Lisa, 1988.

SOUZA, M.; THIRÉ, C. **Matemática – 1º ano**. 6. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1934.

________.**Matemática – 2º ano**. 1. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1931.

________. **Exercícios de Matemática – 3º ano**. 4 ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1938.

STÁVALE, J. **Primeiro Ano de Matemática**. 15 ed. São Paulo: Nacional, 1940.

________. **Segundo Ano de Matemática**. 13 ed. São Paulo: Nacional, 1942.

________. **Terceiro Ano de Matemática**. 9 ed. São Paulo: Nacional: 1942.

________. **Quarto Ano de Matemática**. São Paulo : Nacional: 1935.

________. **Quinto Ano de Matemática**. 2 ed. São Paulo: Nacional, 1937

TAVARES, J. C**. A Congregação do Colégio Pedro II e os debates sobre o ensino da Matemática**. Dissertação. Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP. São Paulo, 2002.

THIRÉ, C. **Exercícios de Matemática – 1º ano**. 2 ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1932.

________. **Exercícios de Matemática – 2º ano**. 1 ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1930.

VALENTE, W. R**. Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730-1930)**. São Paulo: Annablume, 1999.

________. Educação Matemática e Política: a escolarização do conceito de função no Brasil. In: **Educação Matemática em Revista**. São Paulo: SBEM, 2002, p.16-20.

________. **A elaboração de uma nova vulgata para a modernização do ensino de Matemática: aprendendo com a história da Educação Matemática no Brasil**. In: Bolema, nº 17. São Paulo. 2002, p. 40-51.

________. Euclides Roxo e o movimento de modernização internacional da matemática escolar. In VALENTE, W. (org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino da Matemática no Brasil**. São Paulo. SBEM, 2003, p. 46-85.

ANEXO 1

Obtenção do coeficiente angular da reta tangente à curva definida por $f(x)=x^2$ pelo **MÉTODO DE LEIBNIZ**

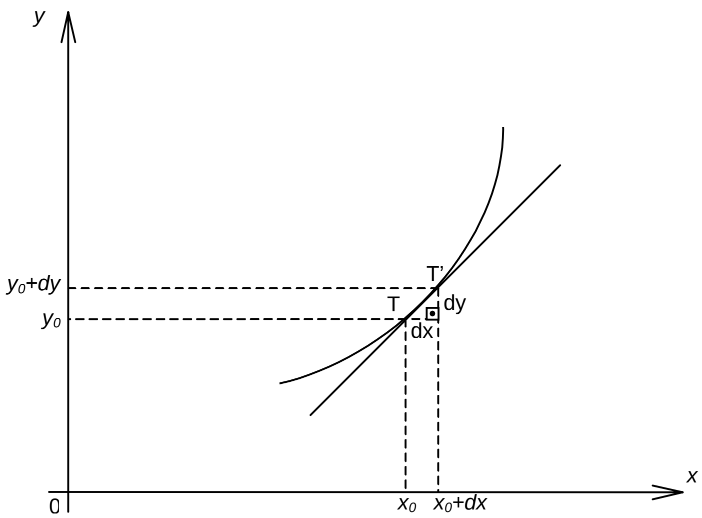
Esse método apoia-se principalmente nas seguintes concepções:

a) A noção dos *infinitamente pequenos*, que seriam quantidades essencialmente variáveis, tão pequenas quanto se quiser considerá-las, e tomadas sempre com valores situados nas vizinhanças do zero;

b) O *princípio da assimilação*, que assegura que uma linha curva pode ser assimilada como uma linha poligonal de lados infinitamente pequenos;

c) O *postulado de Leibniz*, que permite que sejam desprezadas, como parcelas, quantidades infinitamente pequenas diante de qualquer quantidade finita.

Vejamos, a seguir, utilizando-se o método de Leibniz, o processo para obtenção do coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x)=x^2$ no ponto T, de abscissa x_0:



Pelo *princípio da assimilação*, podemos assumir a reta tangente à curva em T como sendo a reta suporte do segmento infinitamente pequeno TT', componente da linha poligonal assimilada à curva. Assim, podemos escrever:

$$y + dy = f(x+dx)$$

$$y + dy = (x+dx)^2$$

$$y + dy = x^2 + 2xdx + (dx)^2$$

Observando que $y=x^2$, temos:

$$dy = 2xdx + (dx)^2$$

Assim, obtemos o coeficiente angular da reta tangente em T:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx$$

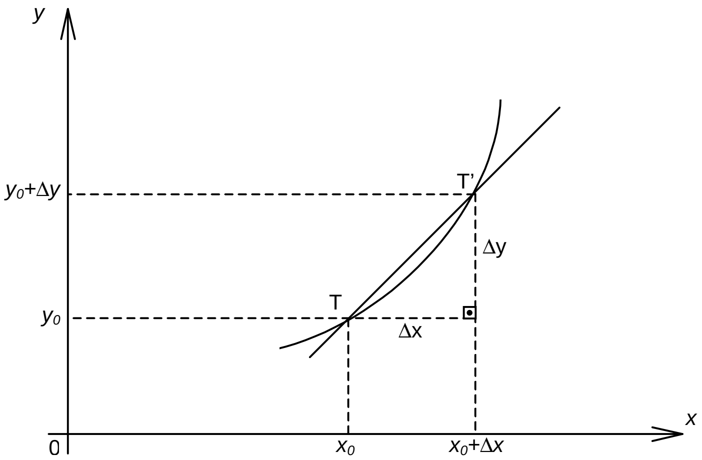
Aplicando o *postulado de Leibniz*, pode-se desprezar a parcela dx e obter-se o coeficiente angular procurado: $2x_0$.

ANEXO 2

Obtenção do coeficiente angular da reta tangente à curva definida por $f(x)=x^2$ pelo **MÉTODO DE NEWTON**

É também conhecido por *método das primeiras e últimas razões* e recorre à teoria dos Limites.

Para a obtenção do coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x)=x^2$ no ponto T, de abscissa x_0, considera-se inicialmente a reta secante $\overleftrightarrow{TT'}$.



Pode-se escrever que:

$$y + \Delta y = f(x+\Delta x)$$

Sendo $f(x)=x^2$, temos:

$$x^2 + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

Dividindo todos os termos por Δx, obtém-se o coeficiente angular da reta secante $\overleftrightarrow{TT'}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Para obter-se o coeficiente angular da reta tangente no ponto T, de abscissa x_0, intui-se que, para x tendendo a x_0, a reta secante tende à reta tangente. Assim, recorrendo-se à Teoria dos Limites e observando que para x tendendo a x_0 temos Δx tendendo a zero, pode-se escrever que:

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$$

Portanto, o coeficiente angular da reta tangente no ponto T de abscissa x_0 é $2x_0$.

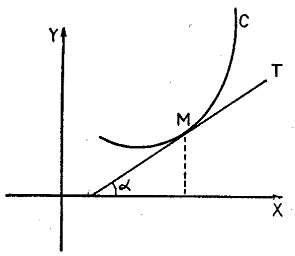
ANEXO 3

Obtenção do coeficiente angular da reta tangente à curva definida por $f(x)=x^2$ no livro do 5º ano de

ROXO, THIRÉ e MELLO E SOUZA

Destacamos, a seguir, algumas páginas do livro do 5º ano da coleção *CURSO DE MATEMÁTICA* de ROXO, THIRÉ e MELLO E SOUZA (1934):

16 — Declividade de uma curva.



Seja C uma curva definida pela equação

$$y = f(x)$$

Tomemos um ponto M qualquer dessa curva; seja MT a tangente á curva C, no ponto M.

Chamaremos *declividade da curva*, no ponto M, á declividade da tangente MT, nesse ponto, isto é, *ao coeficiente angular da tangente MT*. Sendo α o ângulo que MT faz com o eixo dos x, a declividade da curva, no ponto M, será $\operatorname{tg} x$.

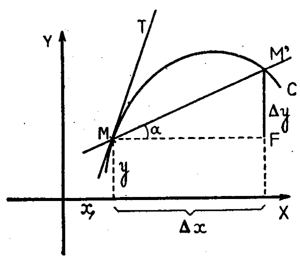
17 — Declividade de uma função.

Chama-se declividade de uma função, num ponto dado, á declividade, nesse ponto, da curva representativa da função.

Exemplo: 10 é a declividade de x^2 no ponto $x = 5$.(*)

18 — Interpretação geométrica do limite dos acréscimos.

Seja C a curva representativa da função $y = f(x)$; seja M um ponto dessa curva e designemos por x e y as coordenadas do ponto M.



Si atribuirmos a x um acréscimo Δx, resultará para y um acréscimo Δy. A função sendo contínua, vamos obter um segundo ponto M' cujas coordenadas são:

$$x + \Delta x \text{ e } y + \Delta y$$

Tracemos a reta que passa pelos pontos M e M'.

Essa réta faz, com o eixo dos x, um ângulo $M'MF$ ou α.

(*) Nas funções contínuas univalentes, o ponto fica determinado por sua abcissa.

Do triângulo $M'MF$ tiramos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

A razão dos acréscimos é igual ao coeficiente ângular da reta MM'.

Se Δx tender para zero, o ponto M' tenderá a confundir-se com o ponto M e a réta MM' tenderá para uma posição limite, que é a tangente MT, á curva C, no ponto M.

O limite de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, quando Δx tende para zero, mede, pois, a declividade da curva C, ou a declividade da função y, no ponto M.

Conclusão:

A declividade de uma função $y = f(x)$, num ponto M, é igual ao coeficiente angular da tangente á curva, definida pela equação, no ponto considerado.

19 — Derivada de x^2.

Assim como determinámos, na função $y = x^2$, o limite de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, para $x = 5$, poderíamos fazer o mesmo para qualquer outro valor particular dado a x. Será, porém, muito mais cômodo deduzir a *expressão geral do limite em função de x*, isto é, uma fórmula na qual só tenhamos, para cada caso numérico, de substituir x pelo valor dado.

Consideremos a função

$$y = x^2$$

Dando a x um acréscimo Δx, resulta, para y, um acréscimo Δy. Temos:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

Efetuando o quadrado do binômio e substituindo y por x^2, temos:

$$x^2 + \Delta y = x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$

Reduzindo os termos semelhantes, tem-se:

$$\Delta y = 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$

Dividindo ambos os membros dessa equação por Δx, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Fazendo Δx tender para zero, vem:

$$lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

Fica, assim, determinada a declividade da função para o ponto de abcissa x. Como x pode representar um valor qualquer da variável independente, vemos que a declividade depende do valor de x; *é uma função de x.* Para lembrar que essa função se derivou da função dada, que è representada por y, chamá-la-emos *derivada* de y e representaremos por y'. Temos pois, $y' = 2x$.

Assim, para $x = 5$, a derivada de x^2 é 10; para $x = 3$, a derivada será igual a 6; para $x = 2{,}5$ a derivada de x^2 será 5.

20 — Derivada de uma função.

Retomemos a função

$$y = x^2$$

A derivada dessa função é $2x$.

Temos, pois:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x \qquad (p)$$

A igualdade (p) mostra que, no caso da função $y = x^2$, o limite dos acréscimos ou a declividade da tangente, em um ponto de abcissa dada, é o dôbro do valor dessa abcissa.

De um modo geral: dada uma função $y = f(x)$, que define uma curva C, a declividade da tangente ao longo dessa curva será *uma função de x.*

Essa nova função de x será representada por $f'(x)$ e denominada a *derivada* de $f(x)$.

Chama-se derivada de uma função, a uma outra função, que exprime, para um valor dado da variável, o limite da razão do acréscimo da função dada para o acréscimo correspondente da variável, quando êste tende para zero.

21 — Notação das derivadas.

Seja $y = f(x)$ uma função dada. A derivada de $f(x)$ é uma função. (*) que representaremos por y' ou por $f'(x)$.

Esta notação permite distinguir a derivada da função dada, que é representada por y' e, ao mesmo tempo mostrar que ela *se derivou* de y.

Sendo a derivada de uma função dada pelo limite.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

podemos representar esse limite simbólicamente pela notação

$$\frac{dy}{dx}$$

Podemos escrever:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

De um modo geral: sendo u uma função de x, a derivada dessa função pode ser representada por u' ou por $\frac{du}{dx}$. (**)

(*) Existe em Matemática uma unica função notável que gosa da propriedade de ser igual a sua própria derivada. E' a função e^x. Podemos demonstrar fácilmente que a derivada de e^x é e^x.

(**) As notações dy, $\frac{dy}{dx}$ e os vocábulos *derivada* e *diferencial* são devidos a LEIBNIZ. A notação $f'(x)$ foi introduzida por LAGRANGE. A derivada era, por ARBOGAST, indicada pelo símbolo D $f(x)$ e CAUCHY empregava a notação $Dx\, f(x)$. NEWTON colocava um ponto sôbre a letra y quando queria indicar a derivada de y e BERNOULLI usava um pequeno traço sôbre a letra D. Não poucas foram as denominações dadas á função derivada. NEWTON usava o termo *fluxão* para designar a derivada de uma função (*fluente*); LACROIX introduziu a denominação de *coeficiente diferencial;* que para KLUGEL era *quociente diferencial* e para LHULIER *relação diferencial*. Cfr. *Enciclopédia delle Matematiche Elementari*, art. de GIULIO VIVANTI, vol. II, pag. 456.

Os autores, após utilizarem o método de Newton para a obtenção do coeficiente angular da reta tangente, apresentam a notação de Leibniz que passam a utilizar constantemente por todo o texto de Cálculo. A título de ilustração, destacamos mais duas páginas do mesmo livro:

240 CURSO DE MATEMATICA

Podemos escrever, segundo nos mostra a figura:

$$y\Delta x < \Delta S < (y + \Delta y)\Delta x$$

Dividindo por Δx, resulta:

$$y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y$$

Fazendo Δx tender para zero e conservando fixo o ponto M, a ordenada $M'P'$ terá por limite MP.

O limite de $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ será $\frac{\Delta S}{dx}$.

E como a expressão $\frac{\Delta S}{\Delta x}$, sendo maior do que y, tem de conservar-se sempre menor do que uma quantidade que tende para y, concluímos que o seu limite é igual a y; temos pois:

$$\frac{dS}{dx} = y$$

Daí tiramos:

$$dS = ydx$$

Conclusão: *a diferencial da área limitada por uma curva $y = f(x)$, pelo eixo dos x, por uma ordenada fixa e por uma ordenada variável, é igual ao produto da ordenada variável pela diferencial da abcissa correspondente.* (*)

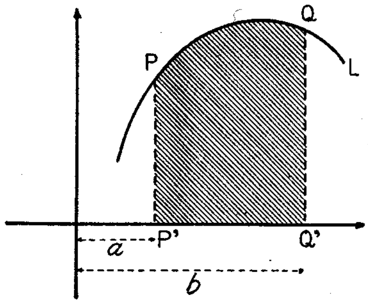
A diferencial dS da área considerada, S, será, pois, a função cuja diferencial é ydx, isto é, será a integral de ydx.

$$S = \int ydx$$

(*) Cfr. GRANVILLE — "Éléments de Calcul differentiel et intégral", trad. de Sallin, 1931, pag. 362.

2 — Area definida por uma integral.

Seja L uma curva definida pela equação $y = f(x)$.



Consideremos dois pontos, P e Q, da curva; o ponto P de ordenada PP' e o ponto Q de ordenada QQ'.

Designemos por S_1 a área $P'PQQ'$

Chamemos a a abcissa do ponto P e b a abcissa de Q.

A diferencial dS é igual ao produto ydx; temos, portanto:

$$dS = ydx$$

Substitindo y por sua expressão, $f(x)$, resulta:

$$dS = f(x)dx$$

Integrando ambos os membros dessa equação, vem:

$$S = \int f(x)dx$$

Representemos por $F(x) + C$ a integral do segundo membro; temos, assim:

$$S = F(x) + C \qquad (T)$$

Resta determinar a constante C, de modo que a área S tome o valor S_1.

Como a área S_1 (que queremos calcular) é contada a partir da ordenada PP', si fizermos $x = a$, na equação (T), o valor de S deve ser nulo; temos:

$$0 = F(a) + C$$

Dessa equação tiramos:

$$C = -F(a)$$