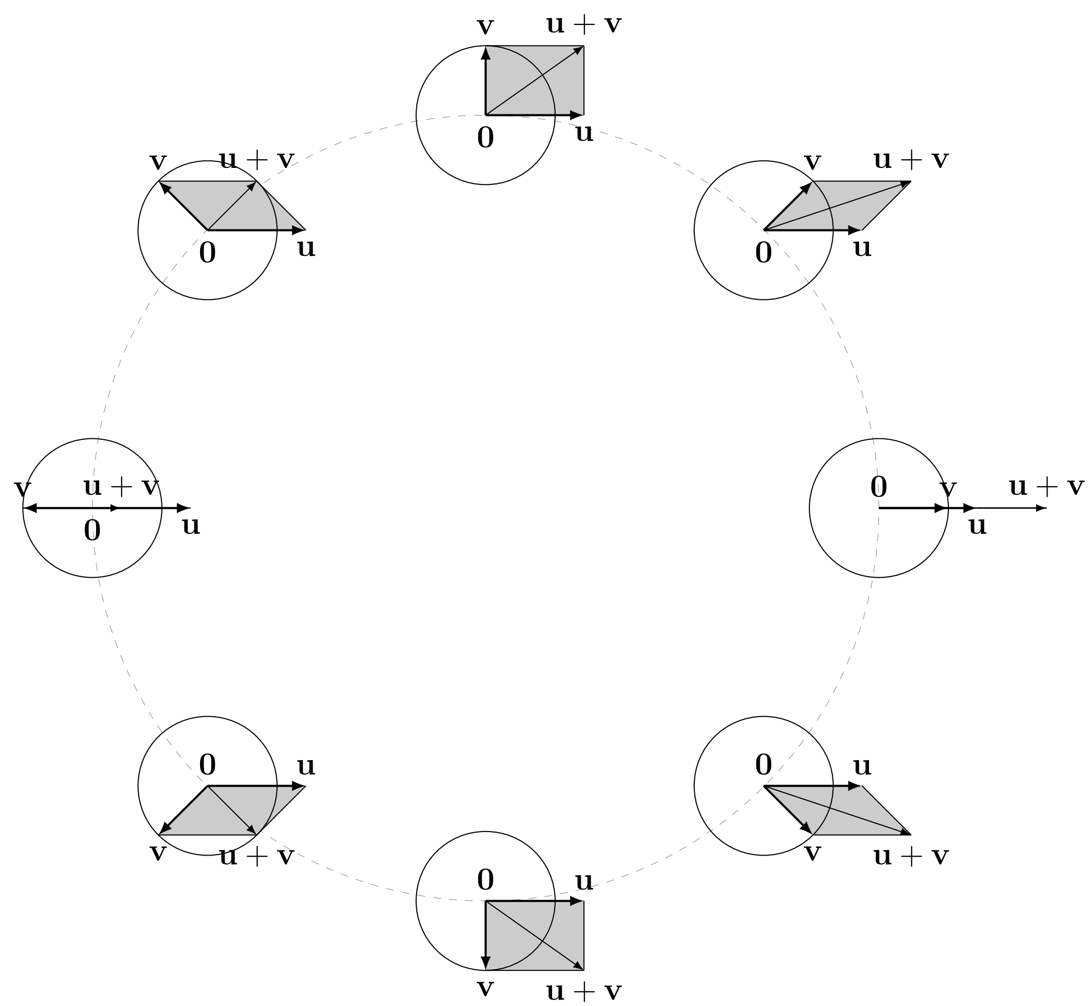
Curso de Álgebra Linear



Cópias são autorizadas e bem vindas: divulgue nosso trabalho!

Curso de Álgebra Linear

Primeira Edição

Marco A. P. Cabral
PhD Indiana University
Prof. IM - UFRJ
mapcabral@ufrj.br

Paulo Goldfeld
PhD Courant Institute
Prof. IM - UFRJ
goldfeld@labma.ufrj.br

www.labma.ufrj.br/alglin

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro - Brasil
Julho/2008

Ficha Catalográfica

Cabral, Marco A. P. e Goldfeld, Paulo
Curso de Álgebra Linear / Marco Cabral e Paulo Goldfeld - Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, 2008.

1. Álgebra Linear   I. Título
CDD: 512.5
516.3

ISBN XX-XXXX-XXX-X

Sobre os Autores

Marco Cabral fez o Bacharelado em Informática na UFRJ, o Mestrado em Matemática Aplicada na UFRJ e o doutorado em Matemática na Indiana University (Bloogminton, EUA). É professor no Instituto de Matemática na UFRJ. Sua área de interesse é equações diferenciais parciais (EDP).

Paulo Goldfeld fez Bacharelado em Enhenharia Mecânica na UFRJ, o Mestrado em Matemática Aplicada na UFRJ e o doutorado em Matemática no Courant Institute (Nova Iorque, EUA). É professor no Instituto de Matemática na UFRJ. Sua área de interesse é métodos numéricos em equações diferenciais parciais (EDP).

Agradecimentos

Primeiro aos programas (e programadores) que permitiram a produção deste material. Este produto é herdeiro da cultura GPL (Gnu Public License), que permite o reuso de código fonte. Agradecemos em primeiro lugar a Douglas Knuth pelo TEX (e Leslie Lamport pelo LATEX), software que permite que este material seja tão bonito; Linus Torvalds (e milhares de outras pessoas) pelo sistema operacional Linux, Bram Moolenaar pelo `vim` (editor de texto), Till Tantau pelo Beamer (slides do curso) e pelo `TikZ` e `PGF` (figuras do texto), Richard Stallman (responsável pelo projeto GNU) e milhares de pessoas por dezenas de softwares utilizados: `tar` (compactação de arquivos), `make` (gerenciador de programa), `grep`, `find`, `ghostview`, `xpdf`, ... Agradecemos também a Jim Hefferon, cujo livro Linear Algebra, em licença creative commons. ajudou a inspirar este trabalho.

Ajudaram na preparação deste trabalho: Beatriz Malajovich (com gabarito dos exercícios), Prof. Felipe Acker da UFRJ (sugestão de morfismo). Esperamos em breve acrescentar seu nome aqui.

Prefácio

Para o estudante

Este livro teve como foco o aluno e suas dificuldades. Ele é fartamente ilustrado, com cerca de 270 exemplos, muitos deles exercícios resolvidos. Procuramos destacar no texto os erros mais comuns dos alunos.

É parte fundamental do curso resolver exercícios, tantos quanto for possível. Ao final de cada capítulo existem exercícios divididos em 4 grupos:

- exercícios de fixação: Devem ser feitos imediatamente após a leitura do texto. São de resposta imediata (mental). Não saber resposta correta sugere um retorno ao texto. Deve-se fazer todos antes de seguir adiante.
- problemas: São os principais exercícios do capítulo. Todos (ou quase) devem ser feitos.
- problemas extras: Caso o aluno tenha feito todos os problemas e deseje mais prática.
- desafios: Para se aprofundar na disciplina. São opcionais.

Todos os exercícios de fixação e todos os problemas tem respostas no final do livro. Vários problemas extras e desafios também possuem respostas.

Porque um novo livro?

- Este livro poderá ser aperfeiçoado daqui por diante por ser disponibilizado através da licença creative commons, que permite o re-uso do material. Para detalhes consulte: `http://creativecommons.org`.
- Permitir aos alunos de todo o Brasil acesso fácil (internet) a material gratuito e de qualidade.
- Necessidade do nosso departamento, responsável pelo ensino de Álgebra Linear na UFRJ, de aplicar prova unificada e, consequentemente, criar um material padrão para o curso.
- Produzir um material com conteúdo que será efetivamente utilizado em sala de aula pelo aluno. Na nossa experiência, os alunos preferem livros finos, que são fáceis de transportar e estimulam a leitura.
- Produzir transparências para sala de aula diretamente acopladas a um livro.

Criamos um pacote completo, com livro texto, exercícios (com respostas) e transparências para um curso de Álgebra Linear. Tudo isto está disponível em `www.labma.ufrj.br/alglin`.

Como foi escolhido o material?

Determinamos os tópicos tomando por base o curso usualmente ministrado na UFRJ. Além disso o componente estético foi fundamental: os alunos devem perceber a beleza da Matemática. Algumas escolhas importantes foram feitas:

- **Capítulo inicial** apresenta conteúdo principal do curso sem grande formalismo: vetores e operações no $\mathbb{R}^n$, espaços gerados (retas e planos), dependência e independência linear, bases e coordenadas. Estes temas são retomados no capítulo de Espaços Vetoriais, mas acreditamos que é importante uma exposição, logo no início, destes conceitos.

- A **solução de sistemas lineares** é feita através da eliminação de Gauss. A regra de Cramer é uma seção opcional do capítulo de Determinantes.

- **Espaços vetoriais de polinômios e funções** não são meros exemplos, são centrais para a formação de engenheiros, matemáticos e físicos. Algumas aplicações importantes são: equações diferenciais, aproximação de funções por polinômios e métodos numéricos como elementos finitos. Introduzimos a visualização deste espaço apresentando, além das "setinhas", outra representação geométrica para vetores do $\mathbb{R}^n$. Apresentamos morfismo de imagens como exemplo de reta em espaço vetorial de funções.

- **Matriz** aparece, inicialmente, somente como forma conveniente de resolver sistemas. Mais tarde, após apresentar transformações lineares (TLs) e operações de soma e composição de TLs, apresentamos operações entre matrizes. Desta forma, ao invés de apresentar, por exemplo, o produto de matrizes de forma artificial, motivamos sua definição. Fica claro que o produto de matrizes não é comutativa pois a composição de função não comutativa. A matriz inversa é calculada por escalonamento, e sua fórmula explícita é uma seção opcional do capítulo de Determinantes.

- **Determinante** é apresentado desde o início relacionado com área (volume) com sinal, para depois ser apresentado como função multilinear (alternada). Optamos por focar no algoritmo de cálculo utilizando operações elementares por ser mais eficiente e ligada diretamente aos conceitos. Apresentamos a conexão com mudança de variáveis na integração múltipla.

- Enfatizamos ao longo do texto (capítulos de Sistemas Lineares, Matrizes, Determinante, Autovalores e Autovetores) a visão moderna de uma **matriz por blocos**, fundamental para a computação científica. Apresentamos duas interpretações (e conseqüências) do produto matriz-vetor e três interpretações do produto matriz-matriz.

- No capítulo de **produto interno**, focamos em projeções e no método de mínimos quadrados. Apresentamos projeção ortogonal de funções como forma de aproximá-las, preparando o aluno para métodos numéricos em engenharia.

- O **escalonamento** é o algoritmo principal do curso, pois através dele: resolvemos sistema, determinamos se vetores são linearmente dependentes, determinamos coordenadas de vetores, mudamos de base, invertemos matriz, calculamos determinante, encontramos autovetores, calculamos solução de mínimos quadrados, calculamos projeção ortogonal.

  Assim estão em seções opcionais as fórmulas para: resolver sistema (regra de Cramer), calcular inversa, calcular determinante (Leibiniz ou Laplace), ortogonalizar base (Gram-Schmidt).

Alguns números deste livro: são cerca de 270 exemplos, 60 observações, 100 definições, 20 teoremas, 15 corolários, 50 lemas e 420 exercícios, sendo que 80 deles de fixação de leitura do texto (para serem feitos mentalmente) e 120 de problemas que esperamos que todo o aluno resolva.

Sumário

Capítulo 1

Introdução à Álgebra Linear

Este capítulo apresenta, de forma rápida e direta, conceitos centrais da Álgebra Linear que serão retomados em capítulos seguintes. Conectamos estes conceitos com assuntos do ensino médio: geometria analítica básica no plano e espaço, matrizes e solução de sistemas lineares. O aluno deve retornar a este capítulo ao longo do curso até dominá-lo completamente. Embora não seja esperado que o aluno aprenda tudo deste capítulo em uma semana de estudo, é útil expô-lo imediatamente à todos estes conceitos.

São objetivos deste capítulo introduzir:

(a) vetores e operações básicas no $\mathbb{R}^n$: soma e multiplicação por escalar (produto escalar-vetor);

(b) combinação linear, espaço gerado, dependência e independência linear;

(c) espaços gerados por 1, 2, 3 ou mais vetores, associando-os com pontos, retas, planos e generalizações;

(d) base e dimensão; outras bases e a coordenadas de um vetor numa base;

Até o final do capítulo apresentaremos os seguintes termos técnicos **fundamentais** da Álgebra Linear:

- vetores e escalares do $\mathbb{R}^n$;
- espaço vetorial;
- combinação linear;
- espaço gerado (span); (sub)espaço afim;
- dependência e independência linear;
- dimensão, base, base canônica;
- coordenadas de um vetor numa base;

Estes termos serão reaplicados (no Capítulo Espaço Vetorial) em contextos onde os vetores poderão ser polinômios ou, de forma mais geral funções, matrizes, ou elementos abstratos.

O aluno perceberá, ao longo deste capítulo, que, embora sistemas lineares apareçam diversas vezes na hora de aplicar os conceitos, o curso de Álgebra Linear não é exclusivamente

[0]Versão 11.jul.2008 16h

um curso de como resolver sistemas lineares, assunto que o aluno, com muita freqüência, **pensa que domina**.

O aluno perceberá na primeira aula a beleza e dificuldade dos conceitos e a necessidade de estudar bastante desde o princípio. Se começássemos com a resolução de sistemas o aluno teria a sensação, no início, de que se trata de um curso fácil, em parte de revisão, de técnicas para resolução de sistemas lineares.

1.1 Vetores e Operações Básicas

1.1.1 Vetores do $\mathbb{R}^n$

O que é um vetor? Podemos responder isto, de forma abstrata, formalizando a idéia de segmentos orientados (informalmente, "setinhas") equivalentes. Este caminho é bom para certas generalizações em Matemática (no contexto da Geometria Diferencial por exemplo), para a visualização de vetores no plano e no espaço tridimensional e para interpretação Física (forças). São chamados em alguns livros de **vetores geométricos**. Mas definiremos vetores por caminho bem mais curto, chamado em alguns livros de **vetores algébricos**. Esta passagem da visão algébrica para geométrica e vice-versa será feita em diversas partes deste capítulo.

A visão geométrica (vetores geométricos), embora mais intuitiva, é limitante pois não conseguimos visualizar mais do que três dimensões. Além disso a formalização do conjunto de "setinhas" é delicada, pois um vetor é uma classe de equivalência de segmentos orientados equipolentes . Teríamos que começar definindo classe de equivalência, depois segmentos orientados e depois a relação de equipolência entre segmentos orientados.

Por contraste, a visão algébrica (vetores algébricos) de vetores é bem mais simples mas não apresenta nenhuma motivação geométrica. Como não dependemos de intuição geométrica, trabalhamos com a mesma facilidade em $\mathbb{R}^2$ como em $\mathbb{R}^{30}$.

Definição 1 ($\mathbb{R}^n$ e vetores) *Definimos $\mathbb{R}^n$ como o conjunto das n-uplas (uma lista de n-elementos) ordenadas de números reais. Um* ***vetor*** *é um elemento do conjunto $\mathbb{R}^n$.*

Desta forma, o $\mathbb{R}^2$ é o conjunto das duplas ordenadas de números, o $\mathbb{R}^3$ é o conjunto das tripla ordenadas de números, etc.

Dizemos que o $\mathbb{R}^n$ é um **espaço vetorial**, isto é, um conjunto cujos elementos são vetores. Por contraste, um número real, é chamado de **escalar**. Esta linguagem vem da Física, que distingue grandezas vetoriais (forças por exemplo) de grandezas escalares (massa e temperatura por exemplo).

Observação 1 *De forma mais geral, escalares são um conjunto de* números *(usualmente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) no qual estão bem definidas as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão (por não-nulos). Neste curso, entenderemos sempre por escalar um número real ($\mathbb{R}$).*

A notação que utilizaremos para determinar um vetor é colocar parênteses em torno e separar os elementos da lista ordenada de números reais por vírgula. Assim, utilizando a notação $\mathbf{v}$ para representar um vetor em $\mathbb{R}^n$, escrevemos que $\mathbf{v} = (a_1, \ldots, a_n)$ com $a_i \in \mathbb{R}$. Os número a_i's são chamados de **entradas** do vetor $\mathbf{v}$.

Exemplo 1 *São vetores de $\mathbb{R}^2$: $(-6, -8), (1, 2)$.*
São vetores de $\mathbb{R}^4$: $(1, 2, 3, 4)$, $(-2, 7/4, -1, 2/3)$.
São vetores de $\mathbb{R}^5$: $(-1, 2, 4, 6, 8)$, $(1, 2, 7/4, -1/3, 3)$.

Note que um vetor é uma lista **ordenada** de números e não um conjunto com números, onde a ordem não importa. Portanto os vetores $(-1, 2)$ e $(-2, 1)$ são distintos; ou ainda, são distintos entre si os vetores $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, ...

Observação 2 *Porque $\mathbb{R}^n$ com $n > 3$?*
Entes geométricos usuais como quadrados e círculos são generalizados para dimensões maiores. Assim uma esfera, generalização de um círculo, é definido como o lugar geométrico de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Define-se então a hiperesfera o subconjunto do $\mathbb{R}^4$ dos pontos $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tais que $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$.
De forma análoga, o cubo generaliza o quadrado e pode-se definir o hipercubo em $\mathbb{R}^4$. Mais sobre isto pode ser visto (entre inúmeros outros livros) em "O que é Matemática?"; R. Courant., H. Robbins; Editora Ciência Moderna.
Embora nossa (humana) percepção esteja restrita a três dimensões, a teoria geral da relatividade de Einstein admite 4 dimensões para explicar os fenômenos físicos. Na Física moderna, segundo últimos boatos, considera-se 11 dimensões para explicar os fenômenos físicos.
De todo modo a importância de dimensões maiores (1000 ou mesmo 10 mil) está nas simulações computacionais de diversos modelos. Para se entender as forças atuantes na estrutura de um prédio ou uma peça mecânica e se fazer um bom projeto, a peça é dividida pelo computador em "bloquinhos". Cada bloquinho é uma variável de um sistema linear. Quanto maior o número de bloquinhos mais precisa será a simulação. Um outro exemplo é uma tomografia, onde cada bloquinho esta associado a uma variável que determina a densidade do tecido, que será transformada numa escala de cinza para depois ser impressa e interpretada por um médico. Esta é uma das reais necessidade do estudo de Álgebra Linear em engenharia, o entendimento e resolução de sistemas com milhares ou dezenas de milhares de variáveis.

1.1.2 Operações em $\mathbb{R}^n$

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ possui uma operação bem definida chamada de **soma de vetores**, cuja entrada são dois vetores e a saída é um outro vetor.

Definição 2 (Soma) *Dados dois vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em $\mathbb{R}^n$, definimos o vetor **soma** de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, por*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ \ldots,\ u_n + v_n).$$

Assim para somar dois vetores basta somar as entradas correspondentes de cada vetor.

Exemplo 2 *A soma dos vetores do $\mathbb{R}^4$* $(1, -1, 1/4, -2/3) + (-2, 2, 3/4, 5/3) = (1-2, -1+2, 1/4 + 3/4, -2/3 + 5/3) = (-1, 1, 1, 1)$.

Observação 3 *Note que o sinal "+" (mais) em "$\mathbf{u}+\mathbf{v}$" e "$(u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$" possui significado distinto em cada expressão: soma de vetores, num caso, e de soma de números reais (escalares) no outro.*

Definição 3 (origem ou ou vetor nulo) *Definimos como **origem** ou **vetor nulo**, denotado por $\mathbf{0}$ o vetor $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$(todas as entradas são nulas). Note que este vetor é o elemento neutro da soma de vetores pois $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ para qualquer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.*

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ possui uma outra operação bem definida chamada de **multiplicação por escalar** ou **produto escalar-vetor**, cujas entradas são um vetor e um escalar (um número) e a saída é um outro vetor.

Definição 4 (multiplicação por escalar ou produto escalar-vetor) *Dados o vetor* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *e o escalar* k*, definimos o vetor multiplicação de* k *por* $\mathbf{u}$*, denotado por* $k\mathbf{u}$*, por*

$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n).$$

Assim para multiplicar um vetor por um escalar k basta multiplicar cada entrada do vetor pelo escalar k.

Exemplo 3 *Se* $\mathbf{u} = (-1, 3, 1, -2, 3/2)$*, então* $2\mathbf{u} = 2(-1, 3, 1, -2, 3/2) = (-2, 6, 2, -4, 3)$*. Considere* $\mathbf{w} = (-4, 6, 1, -3)$*. Então* $-1/2\mathbf{w} = -1/2(-4, 6, 1, -3) = (2, -3, -1/2, 3/2)$*.*

Observação 4 *Na visão geométrica de vetores, a soma é definida pela* ***regra do paralelogramo****. Fazer isto em dimensão maior que três não é intuitivo. Em contraste, a definição acima, feita de forma algébrica, não depende de visualização geométrica e é muito simples. Esta mesma observação vale para a multiplicação de um vetor por um escalar. Apesar disso é útil interpretar geometricamente os vetores e as operações no plano e espaço.*

Os vetores e operações podem ser representados geometricamente para vetores em $\mathbb{R}^n$ com $n \leq 3$. Isto é importante em aplicações (Física por exemplo) e para desenvolver a intuição e visualização interna para vetores em espaços de dimensões maiores. Para isto identificamos, da maneira usual, uma reta com $\mathbb{R}$, um plano com $\mathbb{R}^2$ e o espaço com $\mathbb{R}^3$ utilizando o sistema de coordenadas cartesiana, com eixos ortogonais entre si[1].

Representamos os vetores como "setinhas" (daqui por diante sem aspas e utilizado como sinônimo de segmentos orientados) nas figuras. Mostramos na Figura 1.1 os vetores $(3, 2) \in \mathbb{R}^2$ e $(1, 3, 2) \in \mathbb{R}^3$.

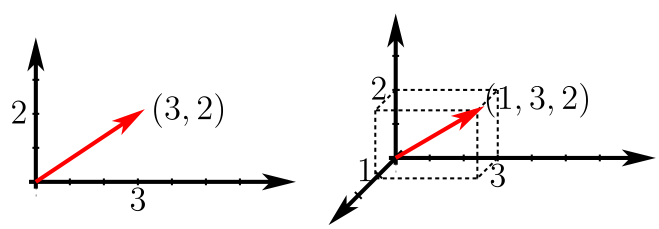


Figura 1.1: Vetores no Plano e no Espaço

Duas setinhas $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (podem ter ponto inicial distinto) representam o mesmo vetor (tecnicamente são equipolentes, isto é, segmentos orientados equivalentes) se quando deslocarmos paralelamente $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ para que os pontos iniciais coincidam, o ponto final (ponta da setinha) de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ também coincida. Por exemplo, todas as setinhas representadas na Figura 1.2 representam o mesmo vetor $(3, 2) \in \mathbb{R}^2$.

A soma de dois vetores no plano e no espaço pode ser feita, geometricamente, através da regra do triângulo ou regra do paralelogramo. Considere a Figura 1.3, no lado esquerdo, onde dois vetores são representados com suas componentes no eixo-x e y. Pela **regra do triângulo** representamos o primeiro vetor com ponto inicial na origem e o segundo com ponto

[1]note que embora sejam úteis para a intuição, nada do que fazemos depende desta interpretação geométrica

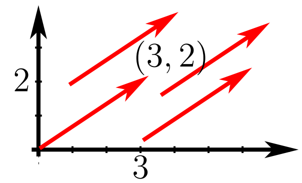


Figura 1.2: Vetores Equivalentes

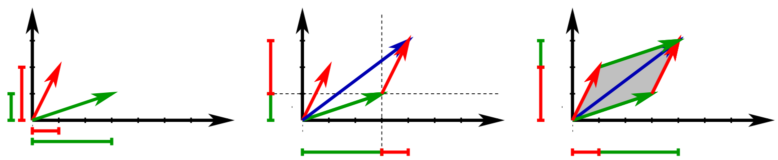


Figura 1.3: Regra do Triângulo e do Paralelogramo

inicial na ponta da seta do primeiro. O vetor resultante unindo a origem até a ponta da seta do segundo é o vetor soma. Pela **regra do paralelogramo**, aplicamos a regra do triângulo aos dois vetores, conforme apresentado nesta mesma figura.

A interpretação geométrica do produto por escalar depende do módulo e do sinal do escalar. Começando por valores positivos inteiros, observe que multiplicando por 1 preservamos o vetor (e o tamanho), por 2 duplicamos seu tamanho, por 3 triplicamos seu tamanho. Por outro lado, multiplicando por $1/2$ reduzimos seu tamanho pela metade.

De forma geral, multiplicando por valor positivo com módulo maior que 1 obtemos um vetor com mesmo sentido mas com tamanho maior; multiplicando por valor positivo com módulo menor que 1 obtemos um vetor com mesmo sentido mas com tamanho menor. Multiplicando por valor negativo obtemos vetor com sentido revertido e com tamanho maior ou menor de acordo com módulo ser maior ou menor que 1. Veja o vetor $\mathbf{v} = (3, 2)$ e a representação de $1,5\mathbf{v}$, $0,5\mathbf{v}$ e $-\mathbf{v}$ da Figura 1.4.

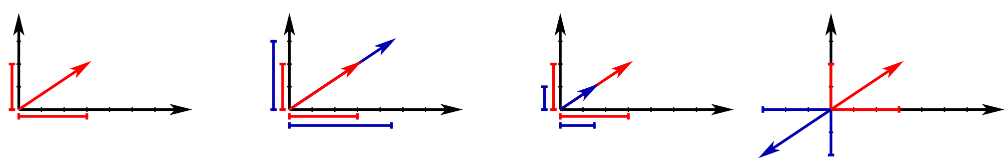


Figura 1.4: Vetores $\mathbf{v}$, $\frac{3}{2}\mathbf{v}$, $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ e $-\mathbf{v}$

Portanto, variando o valor do escalar e multiplicando-o por um vetor fixo $\mathbf{v}$ obtemos uma reta passando pela origem. Assim $\{k\mathbf{v} | \ k \in \mathbb{R}\}$ é uma reta passando pela origem. A equação $k\mathbf{v}$ é chamada de **equação paramétrica da reta** que passa pela origem. A motivação geométrica vem quando $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, mas continuamos chamando de reta com $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Se somarmos um vetor fixo obteremos a equação paramétrica geral de uma reta: $\mathbf{u} + k\mathbf{v}$.

Definição 5 (múltiplo ou paralelo) *Dizemos que* $\mathbf{v}$ *é* ***múltiplo de*** *(ou paralelo a)* $\mathbf{w}$ *se existe um escalar* k *tal que* $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$.

Exemplo 4 *São paralelos entre si:* $(-2, 4, -6, 1)$ *e* $(1, -2, 3, -1/2)$ *pois* $(-2, 4, -6, 1) = -2(1, -2, 3, -1/2)$ *e* $(1, -2, 3, -1/2) = -1/2(-2, 4, -6, 1)$.

Exemplo 5 *A mesma reta pode ser gerada por vetores distintos, basta que eles sejam paralelos entre si. Por exemplo os conjuntos* $\{k(1, 1, 1) | \ k \in \mathbb{R}\}$ *e* $\{m(4, 4, 4) | \ m \in \mathbb{R}\}$ *representam* *a mesma reta. De fato o vetor (k, k, k) pode ser escrito como $k/4(4, 4, 4)$. Tomando $m = k/4$ observamos que formam o mesmo conjunto.*

Exemplo 6 *O vetor $\mathbf{0}$ é multiplo de qualquer outro pois $\mathbf{0} = 0\mathbf{w}$ para qualquer $\mathbf{w}$.*

Exemplo 7 *Podemos aplicar a regra do triângulo em seqüência para obter a soma de mais de dois vetores. Por exemplo considere os quatro vetores representados no lado esquerdo da Figura 1.5. Concatenando de forma sucessiva os vetores obtemos sua soma conforme indicado na mesma figura no lado direito.*

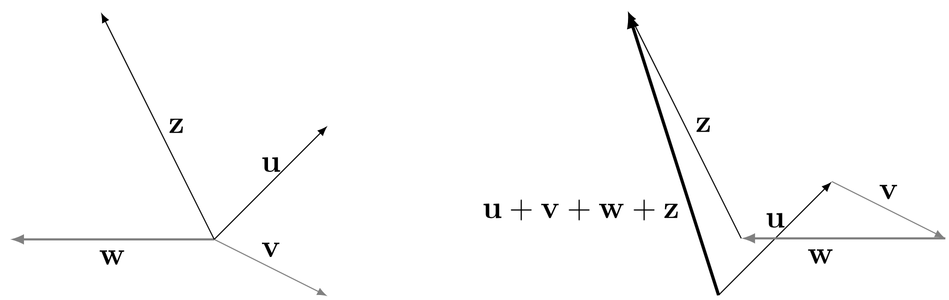


Figura 1.5: Soma de 4 vetores

Exemplo 8 *Um truque de mágica bem conhecido é a fuga de uma caixa completamente fechada. Vamos ver como isto é possível em em $\mathbb{R}^4$.*
No plano é impossível fugir de dentro de um quadrado sem atravessar uma das arestas. No entanto, em $\mathbb{R}^3$, podemos fugir do quadrado subindo (na direção perpendicular ao quadrado); andando paralelamente ao quadrado para fora dele; e descendo(na direção perpendicular ao quadrado) retornando ao plano que contém o quadrado mas no lado de fora dele. Desta forma saimos de dentro do quadrado sem atravessar nenhuma das arestas.
Do mesmo modo, se estivermos dentro de uma caixa em $\mathbb{R}^4$ podemos andar na direção perpendicular à caixa, andar paralelamente para fora e retornar do lado de fora da caixa sem atravessar nenhuma das laterais da caixa. Estas idéias estão descritas num romance clássico da era vitoriana da Inglaterra do século XIX: "Flatland"; Edwin A. Abbott; Dover Pub.

1.2 Espaços Gerados

1.2.1 Definições

A idéia de um vetor ser múltiplo (ou paralelo) de outro é generalizada pela definição abaixo.

Definição 6 (combinação linear) *Dizemos que $\mathbf{v}$ é* ***combinação linear*** *de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ se $\mathbf{v}$ pode ser expresso como*

$$\mathbf{v} \;=\; \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_p\mathbf{v}_p \;=\; \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\mathbf{v}_i,$$

onde α_i's são escalares.

Exemplo 9 *O vetor $\mathbf{v} = (2, -2)$ é combinação linear de $\mathbf{u} = (-1, 1)$ pois $\mathbf{v} = -2\mathbf{u}$ (é um múltiplo). O significado geométrico é que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ estão na mesma reta passando pela origem.*

A generalização da idéia de múltiplos se dá no seguinte sentido.

Exemplo 10 *Considere* $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ *e* $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ *em* $\mathbb{R}^3$. *Qualquer outro vetor no plano* $z = 0$ *será combinação destes dois pois* $(a, b, 0) = a(1, 0, 0)+b(0, 1, 0)$. *Ou seja, por exemplo, o vetor* $\mathbf{w} = (3, -2, 0)$ *é combinação linear de* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$. *O significado geométrico é que* $\mathbf{w}$ *está no plano passando pela origem determinado por* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$.

Exemplo 11 *O mesmo vetor é combinação linear de uma infinidade de vetores distintos. Por exemplo* $(3, 3) = 3(1, 1) + 0(-2, -2) = 1(1, 1) - 2(-2, -2)$.
Por outro lado alguns vetores não podem ser obtidos como combinação linear de certos vetores. Por exemplo o vetor $(3, 4)$ *não é combinação linear de* $(1, 1)$ *e* $(2, 2)$ *pois* $(3, 4) \neq \alpha(1, 1)+\beta(2, 2)$ *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *De fato, igualando componente a componente, obtemos o sistema*

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ \alpha + 2\beta = 4 \end{cases}$$

que é claramente (como $\alpha + 2\beta$ *pode ser* 3 *e* 4 *ao mesmo tempo?) sem solução.*

Exemplo 12 *Determine se* $\mathbf{u} = (2, 3, 4)$ *é combinação linear de* $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ *e* $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$.
Precisamos determinar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tais que* $(2, 3, 4) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 0, 1)$. *Para isto precisamos resolver o sistema*

$$\begin{cases} \alpha + \beta &=& 2 \\ \quad 0 &=& 3 \\ \quad \beta &=& 4 \end{cases}.$$

Como o sistema é claramente (como podemos ter $0 = 3$*?) sem solução, concluímos que* $\mathbf{u}$ *não é combinação linear de* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$.

Exemplo 13 *Determine se* $\mathbf{u} = (1, 3, 4)$ *é combinação linear de* $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ *e* $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$.
Precisamos determinar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tais que* $(1, 3, 4) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(1, 0, 1)$. *Para isto precisamos resolver o sistema*

$$\begin{cases} \alpha + \beta &=& 1 \\ \quad -\alpha &=& 3 \\ \quad \beta &=& 4 \end{cases}.$$

Por inspeção o sistema possui solução única com $\alpha = -3$ *e* $\beta = 4$. *Portanto,* $\mathbf{u} = -3\mathbf{v} + 4\mathbf{w}$.

Os exemplos anteriores mostram a conexão entre combinações lineares e sistemas. Para saber se um vetor é combinação linear de outros vetores (ou não) precisamos resolver um sistema linear.

Definição 7 (espaço gerado) *O* ***espaço gerado*** *pelo conjunto de vetores* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$, *denotado por* $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle$ *ou ainda (em inglês e em diversos livros) por* $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$, *é o conjunto de todas as combinações lineares de* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$. *Portanto,*

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, p \right\}.$$

Definição 8 (conjunto gerador) *O conjunto* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ ***gera*** *(é* ***conjunto gerador*** *de)* W *se* $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle$.

Exemplo 14 *O conjunto gerado por* $(1, 0)$ *e* $(0, 1)$ *são todos os elementos de* $\mathbb{R}^2$ *pois dado* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$. *Escrevemos que* $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 15 *O conjunto gerado por* $(1, 1, 1)$ *e* $(-1, -1, -1)$ *é igual ao conjunto gerado por* $(1, 1, 1)$, *a reta passando pela origem com direção* $(1, 1, 1)$. *Neste caso dizemos que o vetor* $(-1, -1, -1)$ *é* ***redundante*** *(não acrescenta nada) ao conjunto gerador* $\{(1, 1, 1), (-1, -1, -1)\}$. *Utilizando a notação temos que* $\langle (1, 1, 1), (-1, -1, -1) \rangle = \langle (1, 1, 1) \rangle = \langle (-1, -1, -1) \rangle$.

Observação 5 *O espaço gerado por um conjunto de vetores do* $\mathbb{R}^n$ *é um subconjunto do espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$. *Deste modo é natural dizer que o espaço gerado é um subespaço do* $\mathbb{R}^n$. *Utilizaremos como sinônimos neste capítulo os termos* ***espaço*** *e* ***subespaço***.

Definição 9 (linearmente dependente/independente) *Um conjunto de vetores é* ***linearmente dependente*** *(abreviamos por LD) se um dos vetores é combinação linear dos demais. Dizemos (informalmente) que este vetor é* <u>*redundante*</u> *no conjunto. Caso contrário, dizemos que o conjunto é* ***linearmente independente*** *(abreviamos por LI).*

Se um vetor $\mathbf{v} \in S$ é combinação linear dos demais vetores de S, então o espaço gerado por S e por $S - \{\mathbf{v}\}$ (conjunto S sem o vetor $\mathbf{v}$) é o mesmo. Ou seja, o vetor $\mathbf{v}$ é **redundante** em S pois não acrescenta nada a S. Dizemos neste caso que o conjunto S é **LD**.

Exemplo 16 *Considere o conjunto* $S = \{(1, -2, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$. *O vetor* $(1, -2, 1)$ *é linearmente dependente (ou redundante) em* S *pois* $(1, -2, 1) = 3(1, 0, 1) - 2(1, 1, 1)$. *Desta forma* $\langle (1, -2, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle$.
Neste mesmo conjunto, o vetor $(1, 1, 1)$ *é redundante pois* $(1, 1, 1) = -1/2(1, -2, 1) + 3/2(1, 0, 1)$. *Portanto,* $\langle (1, -2, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle = \langle (1, -2, 1), (1, 0, 1) \rangle$.

Exemplo 17 *Considere a caixa retangular e os vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, *representados na Figura 1.6.*
São LIs os conjuntos $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{w}, \mathbf{z}\}$, $\{\mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$, $\{\mathbf{v}, \mathbf{z}\}$.
São LDs os conjuntos $\{\mathbf{u}, \mathbf{y}\}$ *pois* $\mathbf{u} = -2\mathbf{y}$, $\{\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ *pois* $\mathbf{x} + \mathbf{v} = 2\mathbf{y}$, $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ *pois* $\mathbf{w} + 2\mathbf{z} = \mathbf{v}$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}\}$ *pois* $\mathbf{u} = -2\mathbf{y}$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}\}$ *pois* $\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

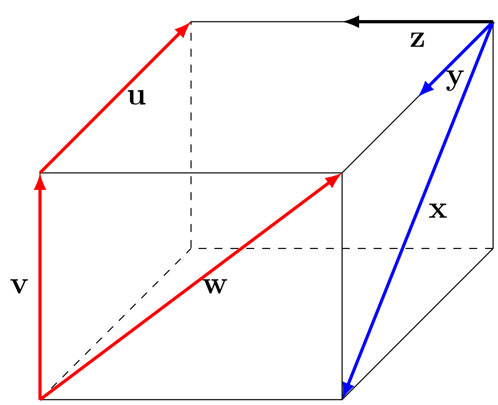


Figura 1.6: Vetores em um Cubo

Definição 10 (espaço afim) *Dizemos que H é um **espaço afim** ou **subespaço afim** se H for a translação do espaço gerado por um conjunto de vetores. Mais precisamente, dado o vetor de translação $\mathbf{w}$ e vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$,*

$$H = \mathbf{w} + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle .$$

O espaço gerado por um conjunto de vetores é, geometricamente, reta, plano e generalizações passando pela origem. O espaço afim é, geometricamente, reta, plano e generalizações passando por um ponto qualquer. Exploramos estas idéias na seqüência desta seção.

Definição 11 (dimensão) *Dizemos que um subespaço afim $H = \mathbf{w} + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle$ possui **dimensão** p se o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ é LI. Em particular dizemos que um espaço gerado por p vetores possui **dimensão** p se estes p vetores formam um conjunto LI.*

1.2.2 Espaço Gerado por 1 Vetor

Uma reta r pode ser definida como o conjunto dos pontos cuja diferença até um ponto $\mathbf{w}$ forma um vetor paralelo a direção fixa $\mathbf{u}$. Esta reta é representada na forma **paramétrica** por $\mathbf{w} + t\mathbf{u}$, onde $t \in \mathbb{R}$ é um parâmetro variável, tal qual mostrado na Figura 1.7. Isto significa que o conjunto $r = \{\mathbf{w} + t\mathbf{u}; t \in \mathbb{R}\}$, obtido quando se varia t, é igual ao conjunto dos pontos da reta r.

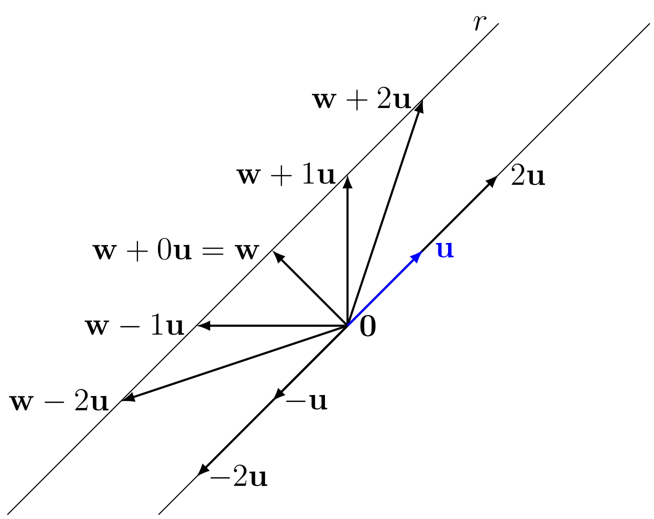


Figura 1.7: Reta $r = \{\mathbf{w} + t\mathbf{u};\ t \in \mathbb{R}\}$

Utilizando a notação de espaço gerado, uma reta é um subespaço afim da forma $\mathbf{w} + \langle \mathbf{u} \rangle$. Como basta um vetor (não-nulo) no espaço gerado, dizemos que uma reta é um **subespaço afim de dimensão 1**. Quando $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, a reta passa pela origem e é igual ao espaço gerado por $\mathbf{u}$. Dizemos que a reta passando pela origem é um **subespaço de dimensão 1**.

Observação 6 *Quando o vetor $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (o vetor nulo), o subespaço afim $\mathbf{w} + \langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{w} + \{\mathbf{0}\} = \mathbf{w}$ é um ponto. Dizemos que um ponto é um **subespaço de dimensão 0**. Quando o ponto $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ o espaço afim é igual a origem, um **subespaço de dimensão 0**.*

Exemplo 18 *Determine pontos da reta r cuja equação paramétrica é $(1, 2) + t(4, 6)$.*
Colocando $t = 0$ obtemos o ponto $(1, 2) \in r$. Colocando $t = 1$ obtemos o ponto $(1, 2) +$

$1(4,6) = (5,8) \in r$. *Colocando* $t = 0,5$ *obtemos o ponto* $(1,2) + 0,5(4,6) = (3,5) \in r$. *Colocando* $t = -1$ *obtemos o ponto* $(1,2) - 1(4,6) = (-3,-4) \in r$. *Colocando* $t = -0,5$ *obtemos o ponto* $(1,2) - 0,5(4,6) = (-1,-1) \in r$.

Exemplo 19 *Determine equações paramétricas para a reta (em* $\mathbb{R}^4$*):*

(a) que contém o ponto $(2,3,4,5)$ *e é paralela ao vetor* $(-1,1,-1,1)$*;*

A reta é $(2,3,4,5) + t(-1,1,-1,1)$.

(b) que contém os pontos $(1,2,1,2)$ *e* $(3,4,3,4)$*;*

Calculando $\mathbf{u} = (3,4,3,4) - (1,2,1,2) = (2,2,2,2)$*, paralelo à reta. Assim a reta é* $(1,2,1,2) + t(2,2,2,2)$. *Note que poderíamos ter calculado* $\mathbf{u} = (1,2,1,2) - (3,4,3,4) = (-2,-2,-2,-2)$ *e obteríamos a* <u>*mesma reta*</u>*, embora com representação distinta,* $(1,2,1,2) + t(-2,-2,-2,-2)$. *Utilizamos* $\mathbf{w} = (1,2,1,2)$ *mas poderíamos ter tomado* $(3,4,3,4)$. *Assim, fazendo todas as combinações, representam ainda a mesma reta,* $(3,4,3,4) + t(-2,-2,-2,-2)$ *e* $(3,4,3,4) + t(2,2,2,2)$.

Exemplo 20 *Determine se o ponto* $(1,1,1,2)$ *pertence a reta* $(1,0,-1,0) + \langle(2,1,2,1)\rangle$.
Queremos saber se existe $t \in \mathbb{R}$ *tal que* $(1,1,1,2) = (1,0,-1,0) + t(2,1,2,1)$. *Isto determina o sistema*

$$\begin{cases} 1+2t &= 1 \\ t &= 1 \\ -1+2t &= 1 \\ t &= 2 \end{cases}.$$

Como ele não possui solução ($t = 1$ *e* $t = 2$*?), o ponto não pertence a reta.*

Exemplo 21 *Determine se os espaços afins* $(1,2,1) + \langle(2,-6,4)\rangle$ *e* $(0,5,-1) + \langle(-1,3,-2)\rangle$ *representam a mesma reta.*
Queremos saber se para cada s *dado, existe* t *tal que* $(1,2,1) + s(2,-6,4) = (0,5,-1) + t(-1,3,-2)$. *Isto determina o sistema linear*

$$\begin{cases} -t &= 1+2s \\ 3t &= -3-6s \\ -2t &= 2+4s \end{cases}.$$

Da primeira equação obtemos que $t = -1-2s$. *Verifique que isto satisfaz as outras duas equações. Portanto é a mesma reta.*

Uma reta no plano possui como equação geral $ax + by + c = 0$. Para determinar uma equação paramétrica partindo da equação cartesiana, basta colocar uma das **variáveis** (termo também utilizado em Álgebra Linear é **incógnita**) como o parâmetro e determinar o valor da outra variável em função do parâmetro.

Exemplo 22 *Determine uma equação paramétrica para a reta em* $\mathbb{R}^2$ $2x - 3y = 6$.
Coloque $y = t$. *Agora* $x = 3 + 3/2y = 3 + 3/2t$. *Logo,* $(x,y) = (3,0) + t(3/2,1)$.

Exemplo 23 *Determine a equação paramétrica da reta em* $\mathbb{R}^2$ $y = 7$.
Coloque $x = t$, $y = 7$. *Logo* $(x,y) = (0,7) + t(1,0)$.

Observação 7 *Se colocarmos* $y = t$ *no exemplo anterior obteremos que* $t = 7$ *e não teremos valor para* x*! A escolha de quem vai ser o parâmetro é* ***importante****. Aprenderemos a fazer a escolha certa de forma sistemática no (próximo) Capítulo de Sistemas Lineares. Veja Observação 9.*

Um sistema com duas equações lineares em $\mathbb{R}^3$ determina, de forma geral, uma reta em $\mathbb{R}^3$, pois representam a interseção de dois planos. Para se obter equações paramétricas de sistemas simples coloque uma das variáveis como parâmetro e escreva as outras em função desta.

Exemplo 24 *Determine equações paramétricas para a reta (em $\mathbb{R}^3$) com equações cartesianas dadas por:* $\begin{cases} 2z - y = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$;
Coloque $z = t$ na primeira equação, obtendo $y = 2t - 1$. Substitua $z = t$ e $y = 2t - 1$ na terceira, obtendo $x + (2t - 1) + t = 0$. Logo $x = -3t + 1$. Portanto, $(x, y, z) = t(-3, 2, 1) + (1, -1, 0)$. Outra solução é começar com $y = t$, obtendo $z = t/2 + 1/2$ da primeira. Substituindo na segunda, obtemos $x = -3/2t - 1/2$. Portanto, outra resposta é $(x, y, z) = t(-3/2, 1, 1/2) + (-1/2, 0, 1/2)$.

Observação 8 *É possível no exemplo anterior colocar $x = s$. Obteremos um sistema em y e z que pode ser resolvido (convido leitor a resolvê-lo: $z = (1 - s)/3$, $y = (-2s - 1)/3$) embora com mais trabalho que no exemplo. A resposta final, apesar de diferente das anteriores também é correta: $(x, y, z) = (1, -2/3, -1/3)s + (0, -1/3, 1/3)$. É a mesma reta pois os vetores que multiplicam o parâmetro ($(-3, 2, 1)$, $(-3/2, 2, 1/2)$ e $(1, -2/3, -1/3)$) são paralelos entre si e, por exemplo, o ponto $(0, -1/3, 1/3)$ pode ser obtido tomando $t = -1/3$ na última equação do exemplo. Cheque os outros pontos.*

Exemplo 25 *Determine equações paramétricas para a reta (em $\mathbb{R}^3$) com equações cartesianas dadas por:* $\begin{cases} z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$;
Como $z = 1$, substtituindo na segunda equação obtemos que $y + 1 = 0$. Logo $y = -1$. Note que x pode assumir qualquer valor. Portanto $x = t$, $y = -1$ e $z = 1$. Logo, $(x, y, z) = t(1, 0, 0) + (0, -1, 1)$.

Observação 9 *Se colocarmos $z = t$ no exemplo anterior não conseguiremos equações (em função de t) para x (tente fazer isso!). Veja Observação 7.*

Observação 10 *Note que a caracterização de reta através de equações paramétricas independe da dimensão do espaço ambiente. Desta forma uma reta no plano ou espaço é da forma $\mathbf{w} + t\mathbf{v}$. Por contraste, a equação cartesiana de uma reta no plano tem que ser substituída por um sistema de duas equações para caracterizar uma reta no espaço.*

Observação 11 *Note que a forma paramétrica **não** é única. Assim dada reta $r = \{\mathbf{w} + t\mathbf{u};\ t \in \mathbb{R}\}$ podemos substituir $\mathbf{u}$ por um múltiplo não-nulo qualquer $\mathbf{v} = 3\mathbf{u}$ ou $\mathbf{v} = -6\mathbf{u}$ e obter a mesma reta $r = \{\mathbf{w} + s\mathbf{v};\ s \in \mathbb{R}\}$. Por outro lado, dado $\mathbf{z} \in r$ qualquer, como $\mathbf{z} - \mathbf{w}$ é paralelo ao vetor $\mathbf{u}$ (faça um desenho), $r = \{\mathbf{z} + t\mathbf{u};\ t \in \mathbb{R}\}$ (podemos substituir $\mathbf{w} \in r$ por outro vetor qualquer que pertença à reta.*

1.2.3 Espaço Gerado por 2 Vetores

A combinação linear de dois vetores LIs (não-paralelos) $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ gera um plano passando pela origem de acordo com a regra do paralelogramo. Adicionando um vetor $\mathbf{w}$ a este plano obtemos a equação paramétrica geral de um plano. Este plano é representado na forma **paramétrica** por $\mathbf{w}+t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$, onde $s,t \in \mathbb{R}$ são dois um parâmetros variáveis independentes e os vetores $\mathbf{u},\mathbf{v}$ não são paralelos entre si. Isto significa que o conjunto $\Pi = \{\mathbf{w}+t\mathbf{u}+s\mathbf{v}; s,t \in \mathbb{R}\}$, obtido quando se varia t e s, é igual ao conjunto dos pontos de um plano.

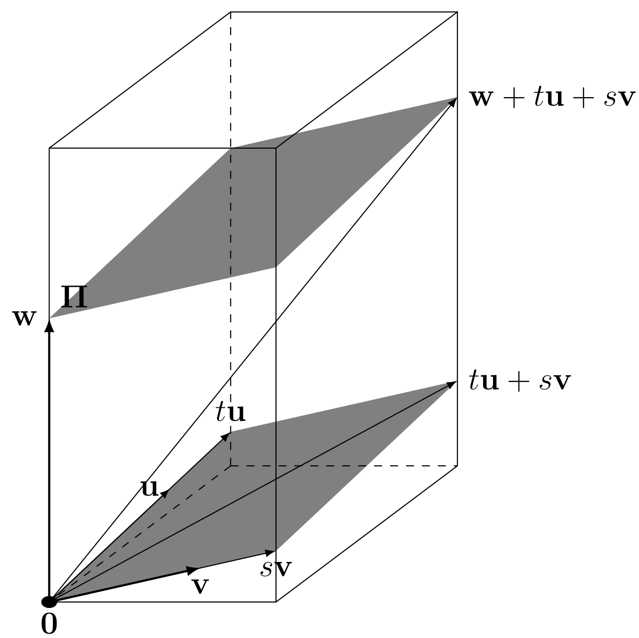


Figura 1.8: Plano $\Pi = \{\mathbf{w}+t\mathbf{u}+s\mathbf{v};\ s,t \in \mathbb{R}\}$

Utilizando a notação de espaço gerado, um plano é um subespaço afim da forma $\mathbf{w}+\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$. Como bastam dois vetores LIs no espaço gerado, dizemos que um plano é um **subespaço afim de dimensão 2**. Quando $\mathbf{w}=\mathbf{0}$, o plano passa pela origem e é igual ao espaço gerado por $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$. Dizemos que um plano passando pela origem é um **subespaço de dimensão 2**. Na Figura 1.8 mostramos o plano passando na origem $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ (e portanto um subespaço) e sua translação $\mathbf{w}+\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$.

Exemplo 26 *Determine pontos do plano cuja equação paramétrica é*
$(1,1,2,0)+t(-1,2,-1,1)+s(1,1,1,1)$.
Colocamos $t=s=0$ *para obter o ponto* $(1,1,2,0)$. *Colocando* $t=0$, $s=1$ *obtemos* $(1,1,2,0)+(1,1,1,1)=(2,2,3,1)$. *Colocando* $t=1$, $s=0$ *obtemos* $(1,1,2,0)+(-1,2,-1,1)=(0,3,1,1)$. *Colocando* $t=1$, $s=-1$ *obtemos* $(1,1,2,0)+(-1,2,-1,1)-(1,1,1,1)=(-1,2,0,0)$.

Exemplo 27 *Considere* $\mathbf{u}=(1,-2,1,1,1), \mathbf{v}=(2,2,0,1,1)$. *O subespaço afim* $(1,2,3,4,5)+\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ *é um plano em* $\mathbb{R}^5$ *pois* $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ *é um conjunto LIs (um não é múltiplo do outro). Podemos verificar isto comparando a primeira entrada dos vetores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$*; um teria que ser o dobro do outro. Mas as outras entradas não são o dobro entre si. Logo, eles são LIs.*

Exemplo 28 *Determine se o ponto* $(1,1,1,1)$ *pertence ao plano*
$(2,2,2,2)+\langle (1,0,1,0),(0,1,0,1)\rangle$.

Queremos saber se existe $s, t \in \mathbb{R}$ tal que $(1,3,1,3) = (2,2,2,2) + s(1,0,1,0) + t(0,1,0,1)$. Isto determina o sistema

$$\begin{cases} 2+s &= 1 \\ 2+t &= 3 \\ 2+s &= 1 \\ 2+t &= 3 \end{cases}.$$

Por inspeção vemos que a solução é $s = -1$ e $t = 1$. Portanto o ponto pertence ao plano.

Exemplo 29 *O espaço gerado por $\{(0,0,1),(0,1,0)\}$ é o plano passando pela origem paralelo aos eixos y e z, o plano $x = 0$.*
Isto é verdade pois dado um ponto qualquer deste plano $(0,a,b)$ temos que $(0,a,b) = a(0,1,0) + b(0,0,1)$

Exemplo 30 *O espaço gerado por $(0,1,1)$ e $(0,1,0)$ é o plano passando pela origem aos eixos y e z.*
Isto é verdade pois dado um ponto qualquer deste plano $(0,a,b)$ temos que $(0,a,b) = a(0,1,1) + (b-a)(0,0,1)$.

Exemplo 31 *Determine equações paramétricas para o plano (em $\mathbb{R}^4$):*
(a) que contém o ponto $(1,2,3,4)$ e é simultaneamente paralelo aos vetores $(2,3,5,7)$ e $(0,1,0,1)$.
O plano é $(1,2,3,4) + t(2,3,5,7) + s(0,1,0,1)$.
(b) que contém os pontos $(2,2,2,2)$, $(3,3,3,3)$ e $(4,0,4,0)$.
Tomando $\mathbf{w} = (2,2,2,2)$, $\mathbf{v} = (3,3,3,3) - \mathbf{w} = (1,1,1,1)$ e $\mathbf{w} = (4,0,4,0) - \mathbf{w} = (1,-2,1,-2)$. Logo o plano é $\mathbf{w} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$.
(c) que contém os pontos $(1,-1,1,-1)$ e $(2,3,4,5)$ e é paralelo ao vetor $(2,-3,4,-5)$.
Tomando $\mathbf{w} = (1,-1,1,-1)$, $\mathbf{v} = (2,3,4,5) - \mathbf{w} = (1,4,3,6)$ e $\mathbf{w} = (2,-3,4,-5)$. Logo o plano é $\mathbf{w} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$.

Um plano em $\mathbb{R}^3$ possui como equação geral $ax + by + cz = d$. Para determinar equação paramétrica partindo da equação cartesiana, basta colocar duas das variáveis como os dois parâmetros e determinar o valor da terceira variável em função dos parâmetros.

Exemplo 32 *Determine a equação paramétrica do plano em $\mathbb{R}^3$: $2x - 3y + 10z = 16$.*
Coloque $y = s$ e $z = t$. Então $x = 8 + 3/2y - 5z = 8 + 3/2s - 5t$.
Logo o plano é $(x,y,z) = (8,0,0) + s(3/2,1,0) + t(-5,0,1)$. Isto é, o plano é o subespaço afim $(8,0,0) + \langle (3/2,1,0),(-5,0,1)\rangle$.

Exemplo 33 *Determine a equação paramétrica do plano em $\mathbb{R}^3$: $3y + 2z = 6$.*
Como x não aparece na equação, colocamos $x = s$ (um dos parâmetros). Fixando Colocando $y = t$ obtemos que $z = 3 - 3/2y = 3 - 3/2t$.
Logo o plano é $(x,y,z) = (0,0,3) + s(1,0,0) + t(0,1,-3/2)$. Isto é, o plano é o subespaço afim $(0,0,3) + \langle (1,0,0),(0,1,-3/2)\rangle$.

Observação 12 *A passagem de equações cartesianas para paramétricas é feita resolvendo-se um sistema linear. A generalização destas idéias para um número maior de equações e variáveis bem como a investigação* ***sistemática*** *(é necessário cuidado na seqüência de operações realizadas nas equações de um sistema) da parametrização do conjunto-solução de um sistema linear é tema central do* ***início*** *do curso de Álgebra Linear que exploraremos no Capítulo Sistemas Lineares.*

Um conjunto de dois vetores pode gerar um plano ou não dependendo se eles são paralelos entre si (o conjunto é LD) ou não.

Exemplo 34 *O espaço gerado por* $\{(1/2, 2, -1), (-1, -4, 2)\}$ *é a reta passando pela origem paralela ao vetor* $(1/2, 2, -1)$ *(ou* $(-1, -4, 2)$*, que é a mesma reta). Neste caso o espaço gerado possui dimensão* 1*. Portanto,* $\langle(1/2, 2, -1), (-1, -4, 2)\rangle = \langle(1/2, 2, -1)\rangle = \langle(-1, -4, 2)\rangle$.

1.2.4 Espaço Gerado por 3 ou Mais Vetores

O que apresentamos até aqui se generaliza para 3 ou mais vetores. A combinação linear de p vetores LIs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ gera um subespaço passando pela origem. Adicionando um vetor $\mathbf{w}$ a este subespaço obtemos uma **equação paramétrica** da forma $\mathbf{w} + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \cdots + t_p\mathbf{v}_p$, onde $t_i \in \mathbb{R}$, com $i = 1, \ldots, p$, são p parâmetros variáveis independentes e os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ são LIs. Como são p vetores LIs dizemos que é um **subespaço afim de dimensão** p.

Utilizando a notação de espaço gerado, um subespaço afim é representado por $\mathbf{w} + \langle\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\rangle$. Quando $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, o subespaço afim passa pela origem e igual ao espaço gerado por $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$. Dizemos neste caso (subespaço afim passando pela origem) que é um **subespaço de dimensão** p.

Exemplo 35 *O espaço gerado por* $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ *e* $(0, 0, 1)$ *é de dimensão* 3*, igual a todo o* $\mathbb{R}^3$ *pois dado* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$.

Exemplo 36 *O espaço gerado por* $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ *e* $(0, 1, 0)$ *possui dimensão* 2 *pois* $(1, 1, 1) = (1, 0, 1) + (0, 1, 0)$*. Desta forma* $\langle(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\rangle = \langle(1, 0, 1), (0, 1, 0)\rangle$.

Exemplo 37 *O espaço gerado por* $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ *e* $(0, 0, 0, 1)$ *é de dimensão* 3*, igual a um subespaço de dimensão* 3 *do* $\mathbb{R}^4$ *perpendicular ao eixo* x.

Para se determinar a dimensão do espaço gerado deve-se eliminar os vetores dependentes (redundantes) do conjunto de vetores.

Exemplo 38 *Considere três vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *no* $\mathbb{R}^3$*. Se eles forem LIs eles gerarão um subespaço de dimensão* 3 *que será necessariamente igual a todo o* $\mathbb{R}^3$*. Se um for combinação linear (LDs) dos outros, digamos que* $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$*, ele será redundante; desta forma* $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ *será igual a* $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$*. Agora, conforme análise anterior, o espaço gerado será reduzido a um plano, reta ou ponto.*

Exemplo 39 *O subespaço afim* $(2, 3, 5, 7) + \langle(1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4)\rangle$ *é uma reta em* $\mathbb{R}^4$ *embora possua* 4 *vetores.*
Isto porque $(2, 2, 2, 2) = 2(1, 1, 1, 1)$, $(3, 3, 3, 3) = 3(1, 1, 1, 1)$, $(4, 4, 4, 4) = 4(1, 1, 1, 1)$*. Desta forma,* $\langle(1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4)\rangle = \langle(1, 1, 1, 1)\rangle$.

Exemplo 40 *O subespaço afim* $(1, 2, 3, 4, 5) + \langle(0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0)\rangle$ *é um ponto.*

Portanto a caracterização geométrica de $S = \mathbf{w} + \langle\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\rangle$ depende não do valor de p, mas de quantos vetores são LIs. Assim se:

- $p = 0$, S é um ponto;

- $p = 1$, S é uma reta ou ponto;
- $p = 2$, S é um plano, uma reta ou um ponto;
- $p = 3$, S é um subespaço afim de dimensão 3, um plano, uma reta ou um ponto;
- $p = k$, S é um subespaço afim de **no máximo** dimensão k.

É intuitivamente óbvio que em $\mathbb{R}^2$ qualquer conjunto de 3 vetores será LD pois caso contrário geraria um subespaço de dimensão 3. Do mesmo modo em $\mathbb{R}^3$, qualquer conjunto com 4 ou mais vetores é LD pois caso contrário geraria um subespaço de dimensão maior que 4.

Por outro lado, para que um conjunto de vetores gere todo o $\mathbb{R}^2$ deve ter pelo menos 2 vetores, caso contrário gerará somente uma reta ou ponto. Para que gere todo o $\mathbb{R}^3$ deve ter pelo menos 3 vetores, caso contrário gerará somente plano, reta ou ponto.

Concluímos que em $\mathbb{R}^n$:

- um conjunto com mais de n vetores é LD;
- um conjunto com menos de n vetores não gera $\mathbb{R}^n$;
- um conjunto de n vetores gera $\mathbb{R}^n$ se, e só se, é LI.

1.3 Bases

Uma notação muito utilizada é definir os seguintes vetores de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{e}_1 & = & (1,0,0,\ldots,0,0) \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{e}_2 & = & (0,1,0,\ldots,0,0) \in \mathbb{R}^n \\ \vdots & = & \vdots \\ \mathbf{e}_n & = & (0,0,0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Note que qualquer vetor do $\mathbb{R}^n$ pode ser expresso como **combinação linear única** dos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Por isso dizemos que este conjunto forma uma **base** do $\mathbb{R}^n$. Por ser a base padrão dizemos que é a **base canônica do** $\mathbb{R}^n$, que é denotada por $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Definição 12 (base) *Um conjunto ordenado S é **base** se todo vetor se expressa de forma única como combinação linear dos elementos de S.*

Exemplo 41 *A base canônica do $\mathbb{R}^4$ é $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$, $\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)$. Isto é verdade pois dado $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $(a,b,c,d) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 + d\mathbf{e}_4$*

Exemplo 42 *Considere o conjunto $\{(1,0),(1,1),(0,1)\}$.
Ele gera todo o $\mathbb{R}^2$ pois dado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) = a(1,0) + 0(1,1) + b(0,1)$, mas não é base de $\mathbb{R}^2$ pois não é conjunto LI: $(1,1) = (1,0) + (0,1)$.*

Exemplo 43 *O conjunto $\{(1,0),(1,1)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$. De fato eles são LIs (um não é múltiplo do outro) e geram o $\mathbb{R}^2$ pois dado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) = a(1,0) + (b-a)(1,1)$.*

Exemplo 44 *$\beta = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ é base do $\mathbb{R}^4$. De fato, dado $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $(a,b,c,d) = a(1,1,1,1) + (b-a)(0,1,1,1) + (c-b-a)(0,0,1,1) + (d-c-b-a)(0,0,0,1)$.*

Definição 13 (coordenadas) *As **coordenadas** do vetor $\mathbf{v}$ na base $\beta = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, são os coeficientes α_i's (únicos pela definição de base) usados para combinar linearmente os vetores $\mathbf{b}_i$'s de forma a gerar $\mathbf{v}$, isto é, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i$. Denotamos*

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Desta forma, as coordenadas são escritas como uma matriz de uma coluna.

Exemplo 45 *Dada a base canônica do $\mathbb{R}^n$ $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, e um vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, como $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n$ concluímos que $[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$.*

Exemplo 46 *Considere o vetor $\mathbf{v} = (2, 4)$ e as bases $\varepsilon = \{(1,0), (0,1)\}$ e $\beta = \{(1,1), (0,1)\}$. Então $[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, como ilustramos na Figura 1.9. Observe que o **mesmo** vetor pode possuir coordenadas distintas em bases distintas.*

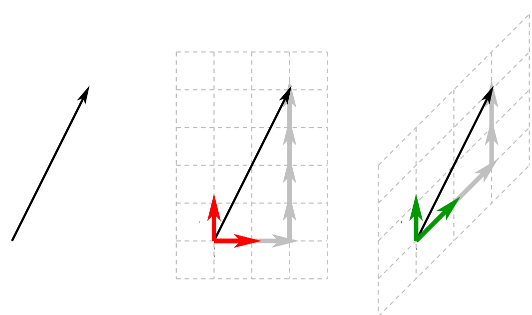


Figura 1.9: Vetor $\mathbf{v} = (2, 4)$ em bases distintas

Exemplo 47 *Considere a base $\beta = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ e o vetor $\mathbf{v} = (1,2,2)$. Então $[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ mas $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Exemplo 48 *Considere a base $\beta = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ e os vetores $\mathbf{v} = (1,2,2)$ e $\mathbf{w} = (1,1,0)$.*
Então $[\mathbf{w}]_\varepsilon = [\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Portanto vetores distintos podem possuir as mesmas coordenadas em bases distintas.

Embora coordenadas sem indicação da base não determinem um vetor, existe uma convenção (dizemos que é um abuso de notação, isto é, um uso da notação diferente do convencionado) que é assumir que a base é canônica. Assim, temos três formas equivalentes de determinar o mesmo vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$:

- considere o vetor $\mathbf{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (uso correto);
- considere o vetor $[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ (uso correto);
- considere o vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ (abuso de notação);

De fato, o último uso é tão comum que muitos livros usam como definição de vetor do $\mathbb{R}^n$: um vetor é uma matriz com uma coluna e n linhas. Note que um vetor poderia ser uma matriz linha, mas a convenção utilizada em **todos** os livros é como uma matriz coluna.

1.4 Exercícios de Introdução à Álgebra Linear

1.4.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1. Determine se é ponto, reta ou plano o conjunto representado pela(s) equação(ões):

(a) $x = 4$ em $\mathbb{R}^2$; (b) $x = -1$ em $\mathbb{R}$; (c) $y = 3$ em $\mathbb{R}^3$;
(d) $x + y = 2$ em $\mathbb{R}^2$; (e) $x - y = -1$ em $\mathbb{R}^3$;
(f) $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$ em $\mathbb{R}^2$; (g) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$ em $\mathbb{R}^3$; (h) $\begin{cases} x - y = -5 \\ y = 2 \end{cases}$ em $\mathbb{R}^3$;

Exercício 2. Quando representamos vetores como setinhas:

(a) dois vetores iguais são necessariamente __________ (*coincidentes, paralelos*);

(b) fazendo produto por $k > 1$ obtemos vetor com __________ (*mesmo, maior, menor*) tamanho e com ______________ (*mesmo sentido, sentido oposto*).

(c) fazendo produto por $k = -1$ obtemos vetor com __________ (*mesmo, maior, menor*) tamanho e com ______________ (*mesmo sentido, sentido oposto*).

(d) fazendo produto por $k < -1$ obtemos vetor com __________ (*mesmo, maior, menor*) tamanho e com ______________ (*mesmo sentido, sentido oposto*).

(e) fazendo produto por k, com $-1 < k < 0$, obtemos vetor com __________ (*mesmo, maior, menor*) tamanho e com ______________ (*mesmo sentido, sentido oposto*).

Exercício 3. Determine se é ponto, reta ou plano:

(a) $\langle (1, 2, 0, 0), (2, 4, 0, 0) \rangle + (2, 1, 2, 2)$; (b) $\langle (1, 2, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle + (0, 0, 0, 0)$;
(c) $\langle (1, 1, 1, 1) \rangle + (0, 0, 0, 0)$; (d) $\langle (0, 0, 0, 0) \rangle + (1, 1, 1, 1)$;

Exercício 4. Se $\mathbf{u}$ é combinação linear de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ então, necessariamente $\mathbf{u}$ pertence:

(a) à reta gerada por $\mathbf{w}$? (b) ao plano gerado por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$?

Exercício 5. Seja S um conjunto com 5 vetores em $\mathbb{R}^n$. Determine se é V ou F:

(a) se $n = 3$, então S é sempre LD; (b) se $n = 4$, então S sempre gera $\mathbb{R}^4$.

[1]Versão 17.Mar.2008 17h

Exercício 6. Complete as lacunas:

(a) a base canônica do $\mathbb{R}^5$ é: $\varepsilon = \{$______________________________________$\}$;

(b) se $\beta = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ é base do $\mathbb{R}^4$ e $\mathbf{u} = \mathbf{w}_4 + 2\mathbf{w}_3 + 3\mathbf{w}_2 + 4\mathbf{w}_1$,

$$[\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix}.$$

Exercício 7. Considere S um conjunto ordenado de vetores. Determine se é V ou F:

(a) se todo vetor de um espaço pode ser escrito como combinação linear de elementos de S então S é base;

(b) se S é base então S é um conjunto linearmente dependente de vetores;

(c) as coordenadas de um vetor são sempre as mesmas, independente de base.

1.4.2 Problemas

Problema 1. Sabendo que $\mathbf{u} = (2, 3)$, $\mathbf{v} = (-1, 4)$ e $\mathbf{w} = (-2, -1)$, determine:

(a) $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (c) $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$

Problema 2. Calcule:

(a) $(1, -2, 3, -2, 1) + (-1, 2, -3, 4, 0) =$ _______;

(b) $-3(1, -2, 3, -2, 1) =$ _______;

Problema 3. Determine equações paramétricas para as retas (em $\mathbb{R}^2$):

(a) $y - 2x = 5$; (b) $y = -1$.

Problema 4. Determine equações paramétricas para as retas (em $\mathbb{R}^3$) com equações cartesianas dadas por:

(a) $\begin{cases} z - x = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$.

Problema 5. Determine equações paramétricas para a reta (em $\mathbb{R}^3$):

(a) que contém os pontos $(2, -3, -1)$ e $(1, 2, 1)$;

(b) que contém o ponto $(-1, 2, -1)$ e é paralela ao vetor $(0, 0, 1)$;

(c) que pertence ao plano $x - y = z - 1$ e ao plano $3x - y + 1 = z$.

Problema 6. Determine equações paramétricas para os planos (em $\mathbb{R}^3$) com equação cartesiana dada por:

(a) $x + y - z = 2$; (b) $y - z = 0$.

Problema 7. Determine equações paramétricas para o plano (em $\mathbb{R}^3$):

(a) que contém os pontos $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(-1, 0, 0)$.

(b) que contém o ponto $(3, 0, -1)$ e é simultaneamente paralelo aos vetores $(2, -1, 1)$ e $(0, 1, -1)$.

(c) que contém os pontos $(1, 3, 2)$ e $(-1, 2, 1)$ e é paralelo ao vetor $(1, -1, -1)$.

(d) que contém o ponto $(-3, 1, 0)$ e a reta de equação paramétrica $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 - t \\ z = t - 1 \end{cases}$.

Problema 8. Considere a reta $r = (1, 2, 0, 0) + t(0, 1/2, 1, -1)$. Determine:

(a) três pontos distintos de r; (b) se $(1, 4, 4, -4) \in r$;

(c) se $(1, 4, 3, 2) \in r$; (d) se $r = (1, 4, 3, 2) + s(0, 1/2, 1, -1)$;

(e) se $r = (1, 4, -4, 4) + s(0, -2, -4, 4)$.

Problema 9. Considere o plano $\Pi = (1, 1, 2, 0) + t(-1, 2, -1, 2) + s(1, 1, 1, 1)$ em $\mathbb{R}^4$. Determine:

(a) quatro pontos distintos de Π; (b) se $(2,5,3,4) \in \Pi$;
(c) se $(1,1,3,3) \in \Pi$; (d) se $\Pi = (1,1,3,3) + \langle(-1,2,-1,2),(1,1,1,1)\rangle$.

Problema 10. Determine uma equação paramétrica para o subespaço afim:
(a) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 |\ x - y + 3z - 2w = 4\}$; (b) $\{(x,y,z,w,u) \in \mathbb{R}^5 |\ z - 3u = 5\}$.

Problema 11. Determine por inspeção se é LI:
(a) $\{(1,2,2,3),(2,4,4,5)\}$; (b) $\{(-1,2,1,-3),(3,-6,-3,9\}$;
(c) $\{(1,2),(2,1),(3,3)\}$; (d) $\{(1,2,3,4,5),(0,0,0,0,0),(5,4,3,2,1)\}$.

Problema 12. Determine se:
(a) $(1,2,3,5) \in \langle(1,2,3,4)\rangle$; (b) $(-1,0,0) \in \langle(2,1,1),(3,1,1)\rangle$;
(c) $(-1,0,2) \in \langle(2,1,1),(3,1,1)\rangle$; (d) $\mathbb{R}^3 = \langle(0,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\rangle$;
(e) $\langle(2,1,2)\rangle = \langle(2,-1,2)\rangle$.

Problema 13. Considere $\mathbf{v} = (4,-1,-1)$ e $\beta = \{(1,-1,0),(0,1,-1),(0,0,1)\}$;
(a) escreva $\mathbf{v}$ como combinação linear dos vetores de β;
(b) determine $[\mathbf{v}]_\varepsilon$ (base canônica);
(c) determine $[\mathbf{v}]_\beta$;
(d) sabendo que $[\mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$; determine $[\mathbf{w}]_\varepsilon$.

1.4.3 Extras

Extra 1. Seja S um conjunto com 5 vetores em $\mathbb{R}^n$. Determine se é V ou F:
(a) se $n = 7$, então S é sempre LI; (b) se $n = 3$, então S pode gerar o $\mathbb{R}^3$;

Extra 2. Determine equações paramétricas para os conjuntos:
(a) $x = 3$ em $\mathbb{R}^2$; (b) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ em $\mathbb{R}^3$;
(c) $x - 2y = 1$ em $\mathbb{R}^3$; (d) $3x - 2z - 5 = 0$ em $\mathbb{R}^3$;

Extra 3. Determine se é ponto, reta ou plano:
(a) $(1,2,1,2,1) + \langle(0,0,0,0,0),(-1,2,1,2,1))\rangle$;
(b) $(1,2,1,1) + \langle(1,2,1,3),(1,2,1,4))\rangle$;
(c) $(1,2,1,1) + \langle(1,1,1,1),(0,2,0,2),(1,3,1,3))\rangle$;
(d) $(2,0,2,0) + \langle(1,2,0,0),(1,1,1,0),(0,0,0,0)\rangle$;
(e) $(0,0,0,0) + \langle(0,0,0,0))\rangle$;
(f) $\mathbf{v} + \langle\mathbf{u}, -\mathbf{u}, 3\mathbf{u}\rangle$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Capítulo 2

Sistemas Lineares

Ao longo deste capítulo aprenderemos a determinar quando um sistema possui solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução. Mais ainda determinaremos qual é a solução (se única) ou sua fórmula geral (se infinitas). São objetivos deste capítulo introduzir:

(a) interpretação geométrica da solução de sistemas (embora sirva mais para motivação, pois não precisamos dela para resolver sistemas);

(b) operações elementares na matriz aumentada do sistema e sistemas equivalentes;

(c) algoritmo da eliminação de Gauss (forma escalonada) e Gauss-Jordan (forma totalmente escalonada)

(d) novas interpretações do produto matriz-vetor implicando em novas interpretações de soluções de um sistema linear.

(e) solução simultânea de sistemas lineares com mesma matriz de coeficientes;

Até o final do capítulo apresentaremos os seguintes termos técnicos:

- matriz aumentada, de coeficientes e lado direito de sistema linear;
- matriz diagonal, triangular superior (e inferior);
- sistemas equivalentes, operações elementares, pivôs, forma escalonada e totalmente escalonada,
- variáveis dependentes e livres,
- eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan;
- sistema com solução única, infinitas soluções e nenhuma solução;
- produto escalar ou interno;
- hiperplano;
- solução trivial, particular e geral (conjunto-solução) de sistema linear, sistema homogêneo.

[0]Versão 14.jul.2008 09h

2.1 Aplicações de Sistemas Lineares

Sistemas lineares aparecem em diversos tipos de aplicações na Física, Química e Engenharia e dentro de diversos problemas da própria Matemática. Vamos apresentar diversos exemplos que servem de motivação para este estudo. O Exemplo 49 é típico do ensino médio: não sugere necessidade de muitas (milhares de) variáveis. Foi incluido somente para contrastar com os outros.

Exemplo 49 *Há dois tipos de moeda indistinguíveis, exceto pelo peso. As de material X pesam 10 g cada e as de material Y, 20 g cada. Se um conjunto de 100 moedas pesa 1.25 Kg, quantas são do material X?*

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 100 \\ 10x & + & 20y & = & 1250 \end{array}\right. .$$

Exemplo 50 *A combustão do propano produz dióxido de carbono e água. Encontre a, b, c e d de forma a balancear a equação da reação: $a\, C_3H_8 + b\, O_2 \longrightarrow c\, CO_2 + d\, H_2O$.*
Balanço de C: $3a = c$, balanço de H: $8a = 2d$, balanço de O: $2b = 2c + d$,

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} 3a & +0b & -1c & +0d & = & 0 \\ 8a & +0b & +0c & -2d & = & 0 \\ 0a & +2b & -2c & -1d & = & 0 \end{array}\right. .$$

Exemplo 51 *Existe uma única parábola γ da forma $y = ax^2 + bx + c$ passando pelos pontos $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,4)$ e $(3,9)$? Caso não exista, qual a parábola que melhor aproxima estes pontos?*

$$\begin{array}{lcl} (0,1) \in \gamma & \Rightarrow & 1 = a(0^2) + b(0) + c \\ (1,3) \in \gamma & \Rightarrow & 3 = a(1^2) + b(1) + c \\ (2,4) \in \gamma & \Rightarrow & 4 = a(2^2) + b(2) + c \\ (3,9) \in \gamma & \Rightarrow & 9 = a(3^2) + b(3) + c \end{array}$$

Obtemos um sistema com 4 equações e 3 variáveis (a, b, c):

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 0a & +0b & +1c & = & 1 \\ 1a & +1b & +1c & = & 3 \\ 4a & +2b & +1c & = & 4 \\ 9a & +3b & +1c & = & 9 \end{array}\right. .$$

Exemplo 52 *Determine a função cúbica da forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que melhor aproxima a função $\cos(x)$ nos pontos k_i com $i = 1, \ldots, N$ (N tão grande quanto se queira). Observe o exemplo anterior para obter:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ak_1^3 & +bk_1^2 & +ck_1 & +d & = & \cos(k_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ak_N^3 & +bk_N^2 & +ck_N & +d & = & \cos(k_N) \end{array}\right. .$$

Exemplo 53 *Queremos determinar a distribuição de temperatura no interior da placa representada na Figura 2.1 sabendo a temperatura em volta desta placa, conforme indicado na figura. Para isto vamos utilizar um princípio físico que garante (de forma aproximada) que a temperatura em um vértice é igual a média das temperaturas dos quatro vértices mais próximos. Deste modo, a temperatura a por exemplo é igual a $(20+25+b+d)/4$. Procedendo desta forma vamos obter 6 equações correspondendo a cada uma das 6 variáveis (a,b,c,d,e,f):*

$$\begin{cases} 4a-b-d &= 45\\ 4b-a-c-e &= 15\\ 4c-b-f &= 25\\ 4d-e-a &= 55\\ 4e-b-d-f &= 20\\ 4f-c-e &= 35 \end{cases}.$$

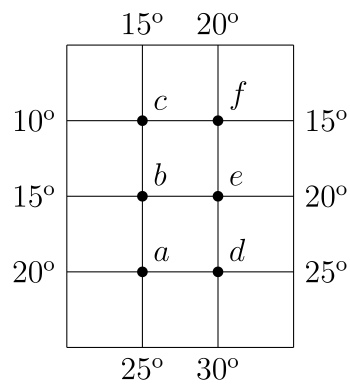


Figura 2.1: Placa Aquecida

Neste último exemplo poderíamos utilizar, ao invés de uma malha 4×5, uma malha 100×100 (em torno de 10 mil variáveis). Ou então considerar a distribuição de calor em uma peça sólida, com três dimensões espaciais. Neste caso, utilizando um malha de $100\times100\times100$, chegamos a cerca de 1 milhão de variáveis. Desta forma surge, naturalmente, a resolução de sistemas com **muitas** equações e o $\mathbb{R}^n$ com n arbitrariamente grande. Dimensões muito grandes surgem pela mesma razão em diversos problemas da Física: forças atuantes em uma peça ou prédio, fluxo de água em um cano ou rio, etc. Em todos estes casos o meio contínuo é discretizado em malhas bi ou tridimensionais, levando o número de variáveis facilmente para dezenas de milhares ou mesmo milhões de variáveis.

Exemplo 54 *Determinar o fluxo de carros em ruas faz parte do planejamento urbano de uma cidade. Outros fluxos importantes são de água, energia, mercadoria, ou bytes (internet). Nesses sistemas existem vias (ruas, canos, estradas ou fios) que transportam estes fluxos e que devem ser planejados de forma a suportar as capacidades. Estes problemas são traduzidos em sistemas lineares que devem ser resolvidos. Consulte livros de álgebra linear (por exemplo Lay ou Leon ou Anton) para mais detalhes sobre estes modelos.*

Exemplo 55 *Foram realizadas medições de dados bidimensionais (por exemplo distância percorrida e consumo de combustível de um automóvel) obtendo-se N pontos (x_i,y_i) no plano. Sabendo-se que a relação deve ser linear, qual a equação da reta que melhor aproxima esta relação?*

Precisamos determinar $a, b \in \mathbb{R}$ tal que a reta $y = ax + b$ passe o mais perto possível (em sentido a ser precisado) de todos os pontos (x_i, y_i), como indicado na Figura 2.2. A reposta é dada através do chamado método de mínimos quadrados, que busca a melhor solução (com menor erro) do sistema com 2 variáveis (a, b) e N equações:

$$\begin{cases} ax_1 + b & = & y_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ ax_N + b & = & y_N. \end{cases}$$

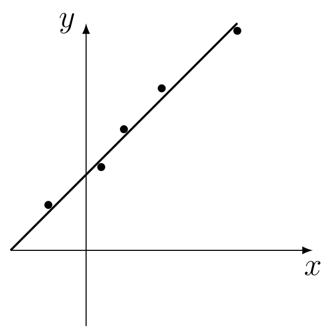


Figura 2.2: Reta Aproximada

Exemplo 56 *O vetor $(0, 6, 10)$ é combinação linear de $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 1)$ e $(4, -1, -3)$?*

Precisamos saber existem α, β, γ tais que

$$\begin{aligned} & \alpha(1,2,3) + \beta(2,1,1) + \gamma(4,-1,-3) \\ = \; & (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (2\beta, \beta, \beta) + (4\gamma, -\gamma, -3\gamma) \\ = \; & (\alpha + 2\beta + 4\gamma, 2\alpha + \beta - \gamma, 3\alpha + \beta - 3\gamma) \\ = \; & (0, 6, 10). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1\alpha & +2\beta & +4\gamma & = & 0 \\ 2\alpha & +1\beta & -1\gamma & = & 6 \\ 3\alpha & +1\beta & -3\gamma & = & 10 \end{cases}$$

Desta forma observamos que:

- sistemas lineares modelam muitos problemas distintos;
- problemas da Álgebra Linear recaem na resolução de sistemas lineares de modo que as técnicas para resolvê-los nos acompanharão por todo o curso;
- facilmente os sistemas podem ter milhares de variáveis – neste caso a teoria será fundamental para se entender as soluções que serão geradas por *softwares* de computação científica.

2.2 Interpretação Geométrica

Vamos discutir e interpretar geometricamente soluções de sistemas lineares em $\mathbb{R}$ (reta) e em $\mathbb{R}^2$ (plano). Na Seção 2.6 retomamos a interpretação geométrica, generalizando-a para $\mathbb{R}^n$. Deixamos para os alunos (e para os exercícios) a aplicação em $\mathbb{R}^3$ (espaço) destas idéias.

2.2.1 Na Reta ($\mathbb{R}$)

Vamos começar com o sistema mais simples que existe que é o sistema 1×1 (1 variável e 1 equação): determine $x \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\left\{ \; ax = b \right. .$$

Para resolvê-lo, consideramos três casos:

(a) se $a \neq 0$ então $x = a^{-1}b$: sistema **com solução única**;

(b) se $a = b = 0$ então qualquer $x \in \mathbb{R}$ é solução: sistema **com infinitas soluções**;

(c) se $a = 0$ e $b \neq 0$ então nenhum $x \in \mathbb{R}$ é solução: sistema **sem solução**.

Observação 13 *É utilizado como sinônimo de **variável** o termo **incógnita**.*
Classificaremos os sistemas lineares como sem solução, com solução única ou com infinitas soluções. No ensino médio utiliza-se outro vocabulário (que não utilizaremos) para classificar, segundo o número de soluções, os sistemas lineares. Para um sistema linear:

- ***sem solução**: **incompatível** ou **impossível** ou **inconsistente**;*
- ***com solução**: **compatível** ou **possível** ou **consistente**;*
- ***com solução única**: (compatível ou consistente ou possível e) **determinado***
- ***com infinitas soluções**: (compatível ou consistente ou possível e) **indeterminado**;*

No ensino médio aprendemos a fazer esta análise para sistemas 2×2 e 3×3 da forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Se $\det(A) \neq 0$ (similar a condição $a \neq 0$ acima), então existe **solução única** $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Caso contrário, dependendo de condições que relacionam A e $\mathbf{b}$, o sistema possui **infinitas soluções** ou **não existe solução**.

2.2.2 No Plano ($\mathbb{R}^2$)

No sistema $\left\{ \begin{array}{rcll} a_{11}x + a_{12}y & = & b_1 & (r_1) \\ a_{21}x + a_{22}y & = & b_2 & (r_2), \end{array} \right.$ cada equação representa uma reta (r_1 e r_2). Resolver o sistema equivale a buscar interseções destas retas. Por outro lado o sistema pode ser escrito como

$$x \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Definindo vetores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

resolver o sistema corresponde a perguntar se $\mathbf{b}$ é combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, isto é, se existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}.$$

Exemplo 57 *Considere o sistema* $\left\{ \begin{array}{rrcll} 1x & +1y & = & 2 & (r_1) \\ 1x & -1y & = & 0 & (r_2) \end{array} \right. .$

Defina $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$*. A Figura 2.3 apresenta as duas interpretações para a solução deste sistema, que possui* ***solução única*** *igual ao ponto* $(1,1)$*: no lado esquerdo a interseção de duas retas, no lado direito observe que* $\mathbf{b}$ *é combinação linear única de* $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$ *(mais exatamente, neste caso* $\mathbf{b} = 1\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2$*).*

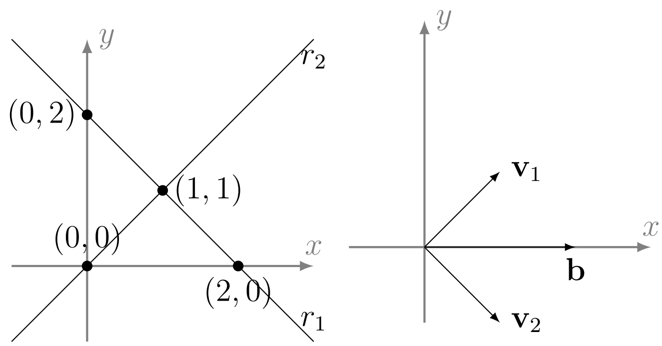


Figura 2.3: Solução Única

Exemplo 58 *Considere o sistema* $\begin{cases} 1x & -2y & = & 2 & (r_1) \\ -2x & +4y & = & 2 & (r_2) \end{cases}$.

Defina $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$*. A Figura 2.4 apresenta as duas interpretações para a solução deste sistema, que é* ***sem solução****: no lado esquerdo duas retas paralelas (portanto sem interseção), no lado direito observe que* $\mathbf{b}$ *não é combinação linear de* $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$ *pois ambos estão na mesma reta. Portanto qualquer combinação deles ficará nesta mesma reta.*

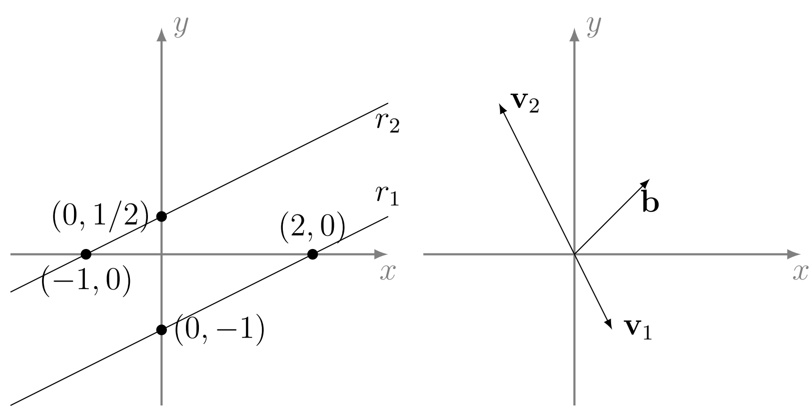


Figura 2.4: Sem Solução

Exemplo 59 *Considere o sistema* $\begin{cases} 1x & -2y & = & 2 & (r_1) \\ -2x & +4y & = & -4 & (r_2) \end{cases}$.

Defina $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$*. A Figura 2.5 apresenta as duas interpretações para a solução deste sistema, que possui* ***infinitas soluções****: no lado esquerdo duas retas coincidentes, no lado direito observe que* $\mathbf{b}$ *pode ser escrito de infinitas formas* *como combinação linear de* $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$ *pois os três estão na mesma reta. Por exemplo,* $\mathbf{b} = 0\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - 1/2\mathbf{v}_2$*. O conjunto-solução nesse caso será* $\{(x,y) \mid x+y = 2\} = \{(t, 2-t) = (0,2)+t(1,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}$*. Na linguagem do Capítulo 1, o conjunto-solução é o subespaço afim* $(0,2) + \langle(1,-1)\rangle$.

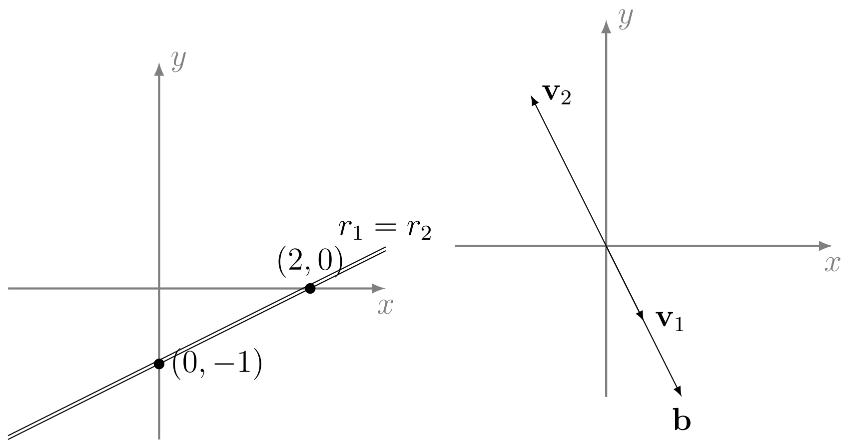


Figura 2.5: Infinitas Soluções

Em resumo, o conjunto-solução de um sistema **linear** de equações tem sempre:

- ou **uma única** solução;
- ou **nenhuma** solução;
- ou **infinitas** soluções.

Compare com o caso **não-linear** representado Figura 2.6. Caso se busquem as interseções de duas curvas quaisquer no plano, poderemos ter um número finito de soluções maior que um, no caso 5 soluções.

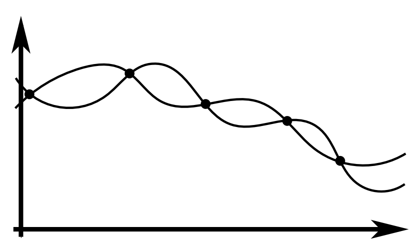


Figura 2.6: Sistema Não-linear

2.3 Operações Elementares

Definição 14 (matriz de coeficientes, matriz aumentada e lado direito) *Considere o sistema, com m equações em n variáveis:*

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Definimos como matriz de coeficientes, matriz aumentada e o lado direito do sistema acima as matrizes indicadas na figura abaixo.

$$\overbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {}_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]}^{\textit{matriz aumentada}}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\textit{matriz de coeficientes}}\ \underbrace{\qquad}_{\textit{lado direito}}$$

Note que a matriz de coeficientes possui m linhas e n colunas que correspondem as m equações em n variáveis do sistema.

Observação 14 *É utilizado como sinônimo de **matriz aumentada** o termo **matriz ampliada**.*
É comum o abuso de linguagem "considere o sistema A", onde A é a matriz aumentada do sistema a ser considerado.

Quando a matriz de coeficientes possui algumas formas particulares, o sistema se torna extremamente fácil de ser resolvido. O primeiro caso é quando a matriz de coeficientes é **diagonal**.

Definição 15 (matriz diagonal) *A é **diagonal** se $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.*

Exemplo 60 *São matrizes diagonais:* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

No caso de matriz de coeficiente diagonal a solução do sistema é imediata.

Exemplo 61 *Considere o sistema* $\left\{\begin{array}{rcr} 3x_1 & = & 5 \\ -2x_2 & = & 4 \\ x_3 & = & -2 \end{array}\right.$ *cuja matriz aumentada é*
$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{3} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \end{array}\right]$. *Neste caso é fácil ver que o conjunto-solução é* $\left\{\left(\frac{5}{3}, -2, -2\right)\right\}$.

Outro caso fácil é quando matriz de coeficientes é **triangular**.

Definição 16 (matriz triangular superior) *A é **triangular superior** se $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.*

Exemplo 62 *São triangulares superiores:* $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 12 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Observação 15 *Existe o conceito similar de matriz **triangular inferior**, cuja definição deixamos para o leitor.*

Quando a matriz é **triangular superior** a solução é calculada através da **substituição para trás**. Começando-se da última equação, onde se determina a última variável, determina-se cada variável, sucessivamente, de trás para frente.

Exemplo 63 *Considere o sistema* $\left\{ \begin{array}{rrrcr} 3x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ & -2x_2 & +x_3 & = & -5 \\ & & 2x_3 & = & -2 \end{array} \right.$ *cuja matriz aumentada é:* $\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right]$. *Fazendo a Substituição para trás, calculamos primeiro x_3 da última equação. Substituímos seu valor na segunda equação e obtemos x_2. Finalmente, substituindo x_1 e x_2 na primeira equação, calculamos x_1:*

$$\begin{array}{rrrcrcrcr} & & 2x_3 & = & -2 & \Rightarrow & x_3 & = & -1 \\ & -2x_2 & +(-1) & = & -5 & \Rightarrow & x_2 & = & 2 \\ 3x_1 & +(2) & +3(-1) & = & 2 & \Rightarrow & x_1 & = & 1 \end{array}.$$

Vamos ver como podemos transformar um sistema qualquer num sistema diagonal que possua o mesmo conjunto-solução, isto é, como transformar num sistema diagonal **equivalente**.

Definição 17 (sistemas equivalentes) *Dois sistemas (nas mesmas variáveis) são **equivalentes** se têm o mesmo conjunto-solução.*

Exemplo 64 *Os dois sistemas da Figura 2.7 são equivalentes, embora com número de equações distintas, pois possuem o mesmo conjunto-solução $\{(1, 1)\}$.*

A estratégia para Solução de Sistemas Lineares é buscar um sistema equivalente "fácil":

- na **forma escalonada** ("tipo" triangular) ou
- na **forma totalmente escalonada** ("tipo" diagonal).

Para isto precisamos ver como gerar sistemas equivalentes utilizando as **operações elementares**, que são efetuadas na matriz aumentada de um sistema. Estas operações podem ser vistas também como operações nas equações do sistema, embora quando efetuamos os cálculos fazemos as operações diretamente na matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

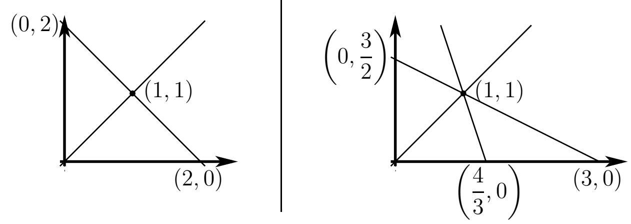


Figura 2.7: Sistemas equivalentes

Definição 18 (operações elementares) *São **operações elementares** numa matriz:*

(a) trocar a ordem das linhas: (denotado $l_1 \leftrightarrow l_2$):

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{—} \; l_1 \; \text{—} & b_1 \\ \text{—} \; l_2 \; \text{—} & b_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} \text{—} \; l_2 \; \text{—} & b_2 \\ \text{—} \; l_1 \; \text{—} & b_1 \end{array}\right];$$

(b) multiplicar uma linha por um escalar não-nulo: (denotado $l_2 \leftarrow \alpha l_2$):

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{—} \; l_1 \; \text{—} & b_1 \\ \text{—} \; l_2 \; \text{—} & b_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} \text{—} \; l_1 \; \text{—} & b_1 \\ \text{—} \; \alpha l_2 \; \text{—} & \alpha b_2 \end{array}\right];$$

(c) substituir linha por sua soma com múltiplo de outra (denotado $l_2 \leftarrow l_2 + \alpha l_1$):

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{—} \; l_1 \; \text{—} & b_1 \\ \text{—} \; l_2 \; \text{—} & b_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} \text{——} \; l_1 \; \text{——} & b_1 \\ \text{—} \; l_2 + \alpha l_1 \; \text{—} & b_2 + \alpha b_1 \end{array}\right];$$

(d) descartar ou acrescentar linhas só de zeros:

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{—} \; l_1 \; \text{—} & b_1 \\ 0\,0 \cdots 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} \text{—} \; l_1 \; \text{—} & b_1 \end{array}\right].$$

Definição 19 (matriz equivalente) *Uma matriz A é **equivalente** a B se pode ser obtida por meio de uma seqüência de operações elementares. Denotamos $A \sim B$.*

Lema 1 (sistemas e matrizes equivalentes) *Sejam A e B matrizes aumentadas de dois sistemas (nas mesmas variáveis). Se as matrizes são equivalentes ($A \sim B$), então os sistemas correspondentes são equivalentes (possuem mesmo conjunto-solução).*

Prova: A cada uma das operações elementares efetuadas na matriz aumentada de um sistema corresponde uma operação nas equações desse sistema que não altera o conjunto-solução:

(a) trocar a ordem das linhas: substituir o sistemas $\left\{ \begin{array}{rcl} A & = & B \\ C & = & D \end{array} \right.$ por $\left\{ \begin{array}{rcl} C & = & D \\ A & = & B \end{array} \right.$ não altera o conjunto-solução;

(b) multiplicar uma linha por um escalar não-nulo: substituir o sistemas $\begin{cases} A &= B \\ C &= D \end{cases}$ por $\begin{cases} A &= B \\ \alpha C &= \alpha D \end{cases}$. Se $C = D$ então é claro que $\alpha C = \alpha D$. Note que isto é verdade inclusive se $\alpha = 0$. Por outro lado, se $\alpha C = \alpha D$, utilizando o fato que $\alpha \neq 0$, multiplicamos os dois lados por α^{-1}, obtendo $\alpha^{-1}\alpha C = \alpha^{-1}\alpha D$. Logo, como $\alpha^{-1}\alpha = 1$, $C = D$. Portanto não alteramos o conjunto-solução.

(c) substituir linha por sua soma com múltiplo de outra: substituir o sistema $\begin{cases} A &= B \\ C &= D \end{cases}$ por $\begin{cases} A &= B \\ C+\alpha A &= D+\alpha B \end{cases}$. Se $C = D$, como $A = B$, $\alpha A = \alpha B$ para qualquer α (mesmo $\alpha = 0$). Somando esta equação nos dois lados de $C = D$ obtemos que $C + \alpha A = D + \alpha B$. Por outro lado, suponha que $C + \alpha A = D + \alpha B$. Como $A = B$, $\alpha A = \alpha B$ para qualquer α. Logo subtraindo αA dos dois lados de $C + \alpha A = D + \alpha B$, obtemos $C = D + \alpha B - \alpha A = D$.

(d) descartar (ou acrescentar) linhas só de zeros: substituir o sistema $\begin{cases} A &= B \\ 0 &= 0 \end{cases}$ por $\begin{cases} A = B \end{cases}$ (ou vice-versa) não altera o conjunto-solução pois uma linha nula corresponde a uma equação sempre verdadeira $(0 = 0)$. ■

Observação 16 *Dessas operações podemos deduzir outras como por exemplo: "se duas linhas são iguais, uma delas pode ser descartada". Isto porque o sistema* $\begin{cases} B &= C \\ B &= C \end{cases}$ *equivale a* $\begin{cases} B &= C \\ B-B &= C-C \end{cases}$ *tomando $\alpha = -1$ na operação (c). Portanto obtemos o sistema* $\begin{cases} B &= C \\ 0 &= 0 \end{cases}$. *Pela operação (d) este é equivalente a* $\begin{cases} B = C \end{cases}$.

Deve-se tomar cuidado pois nem toda operação gera sistemas equivalentes. No próximo exemplo ilustramos um erro que não é comum mas serve para ajudar a entender o exemplo depois desse.

Exemplo 65 *Embora se possa substituir uma linha pela soma dela com outra, não se pode fazer isto* ***simultaneamente*** *com duas linhas pois senão transformaríamos o sistema* $\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases}$ *em* $\begin{cases} A+C = B+D \\ A+C = B+D \end{cases}$. *Mas este sistema é equivalente a* $\begin{cases} A+C = B+D \end{cases}$ *pela observação anterior.*

Vamos ver num caso particular. Considere $\begin{cases} x+y &= 3 \\ 2x-y &= 0 \end{cases}$ *cujo conjunto-solução é* $\{(1,2)\}$. *Somando as duas linha obtemos* $\begin{cases} 3x &= 3 \\ 3x &= 3 \end{cases}$ *cujo conjunto-solução é* $\{(x,y) = (1,t); t \in \mathbb{R}\}$.

Note que isto é diferente de substituir a primeira linha pela soma dela com a segunda obtendo $\begin{cases} 3x &= 3 \\ 2x-y &= 0 \end{cases}$ *e depois substituir a segunda linha pela soma dela com a primeira obtendo* $\begin{cases} 3x &= 3 \\ 5x-y &= 3 \end{cases}$. *Note que agora preservamos o conjunto-solução* $\{(1,2)\}$.

O erro apresentado no exemplo anterior dificilmente é cometido. No próximo exemplo apresentamos um erro que ocorre com certa freqüência com alunos que não aplicam uma operação elementar de cada vez.

Exemplo 66 *Considere o sistema* $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ y+z & = & 2 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right.$ *cuja solução única é* $x=y=z=$

1. *Na forma matricial ele corresponde a* $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$. *Vamos fazer* ***simultaneamente*** $l_1 \leftarrow l_1 - l_2$, $l_2 \leftarrow l_2 - l_3$, $l_3 \leftarrow l_3 - l_1$, *obtendo* $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$. *Isto corresponde ao sistema* $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ -x+z & = & 0 \\ -z & = & -1 \end{array}\right.$ *cuja solução é* $x=z=1$ *e* y *pode assumir qualquer valor. Portanto o conjunto-solução é* $\{(x,y,z) = (1,t,1) = (1,0,1)+t(0,1,0),\ t \in \mathbb{R}\}$. *Na linguagem do Capítulo 1, o conjunto-solução é o subespaço afim* $(1,0,1)+\langle(0,1,0)\rangle$. *Note que o conjunto-solução foi modificado.*

O último exemplo mostra a importância de sermos **extremamente** cuidadosos quando aplicamos as operações elementares, aplicando uma de cada vez.

Antes de apresentar um algoritmo para resolver sistemas lineares, vamos apresentar, através de um exemplo, a transformação de um **sistema linear qualquer**, utilizando somente as **operações elementares**, num **sistema equivalente diagonal**, que pode ser facilmente resolvido.

Exemplo 67 *Considere o sistema* $\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & -25 \\ 3 & 13 & 4 & 16 \end{array}\right]$. *Fazendo* $l_3 \leftarrow l_3 + 3l_1$, *calculamos* $\begin{array}{rrrrr} & 3 & 13 & 4 & 16 \\ + & 3\times(-1 & -2 & -4 & 2\ ) \end{array} = \begin{array}{rrrrr} & 3 & 13 & 4 & 16 \\ + & -3 & -6 & -12 & 6 \\ \hline & 0 & 7 & -8 & 22 \end{array}$ *e obtemos* $\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & -25 \\ 0 & 7 & -8 & 22 \end{array}\right]$. *Fazendo* $l_3 \leftarrow l_3 + l_2$ *calculamos* $\begin{array}{rrrrr} & 0 & -7 & 11 & -25 \\ + & 0 & 7 & -8 & 22 \\ \hline & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}$ *e obtemos* $\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & -25 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$. *Fazendo* $l_3 \leftarrow \frac{1}{3}l_3$, *obtemos* $\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$. *Para fazer* $l_1 \leftarrow l_1 + 4l_3$ *calculamos* $\begin{array}{rrrrr} & -1 & -2 & -4 & 2 \\ + & 0 & 0 & 4 & -4 \\ \hline & -1 & -2 & 0 & -2 \end{array}$. *Para fazer* $l_2 \leftarrow l_2 - 11l_3$ *calculamos* $\begin{array}{rrrrr} & 0 & -7 & 11 & -25 \\ + & 0 & 0 & -11 & 11 \\ \hline & 0 & -7 & 0 & -14 \end{array}$. *Obtemos então* $\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$. *Fazendo* $l_2 \leftarrow -\frac{1}{7}l_2$, *obtemos* $\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$. *Fazendo* $l_1 \leftarrow l_1 + 2l_2$ *calculamos* $\begin{array}{rrrrr} & -1 & -2 & 0 & -2 \\ + & 0 & 2 & 0 & 4 \\ \hline & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}$ *e obtemos* $\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$. *Finalmente fazendo* $l_1 \leftarrow -l_1$ *obtemos o* $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$.

*Agora o sistema é **diagonal** e pode ser facilmente resolvido:* $\left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & -2 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & -1 \end{array}\right.$. *Portanto o conjunto-solução é* $\{(-2, 2, -1)\}$.

O plano de ação para a solução de sistemas lineares é:

- definir o que é a **forma escalonada** e **forma totalmente escalonada** de uma matriz;
- apresentar o **algoritmo de eliminação de Gauss** que transforma uma matriz qualquer para forma escalonada ou totalmente escalonada;
- estudar como resolver um sistema cuja matriz ampliada está na forma escalonada ou totalmente escalonada.

Definição 20 (forma escalonada) *Diz-se que uma matriz está (na forma)* ***escalonada*** *("tipo" triangular superior) se*

- ***o número de zeros no início de cada linha aumenta estritamente*** *de uma linha para outra e*
- *não há linhas só de zeros.*

Exemplo 68 *A matriz abaixo está na forma escalonada.*

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -7 & 0 & -14 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 6 \end{array}\right]$$

Exemplo 69 *A matriz abaixo* ***não*** *está na forma escalonada.*

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -7 & 0 & -14 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 6 \end{array}\right]$$

Definição 21 (pivô) *São denominados* ***pivôs*** *os primeiros elementos não nulos de cada linha de uma matriz escalonada.*

Exemplo 70 *Na matriz abaixo são pivôs (indicados em negrito)* $\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{-13}$.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{4} & -7 & 0 & -14 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-13} & 6 \end{array}\right]$$

Definição 22 (forma totalmente escalonada) *Uma matriz escalonada está* ***totalmente escalonada*** *ou* ***escalonada reduzida*** *("tipo" diagonal) se os seus pivôs*

- *são todos 1's e*
- *são os únicos elementos não-nulos de suas colunas.*

Exemplo 71 *A matriz abaixo está na forma totalmente escalonada.*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Exemplo 72 *A matriz abaixo* ***não*** *está na forma totalmente escalonada.*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

2.4 Escalonamento

Vamos agora descrever o algoritmo de **Eliminação de Gauss**, que é dividido em duas partes.

Definição 23 (Eliminação de Gauss Parte I: Forma Escalonada)

(a) Descarte linhas só de zeros.

(b) $p \leftarrow$ *(nº de linhas).*

(c) $k \leftarrow 1$.

(d) Enquanto $k < p$, *repita:*

- *Considere apenas as linhas* $l_k, l_{k+1}, \ldots, l_p$.
- *Identifique a coluna não nula mais à esquerda.*
- *Troque linhas para obter pivô não nulo.*
- *Anule entradas abaixo do pivô subtraindo de* $l_{k+1}, \ldots, l_p$ *múltiplos de* l_k.
- *Descarte linhas só de zeros.*
- $p \leftarrow$ *(nº de linhas).*
- $k \leftarrow k + 1$.

Definição 24 (Eliminação de Gauss Parte II: Forma Totalmente Escalonada)

(a) Execute a Parte I do algoritmo.

(b) Repita, para $k = p, p-1, \ldots, 1$:

- *Divida* l_k *pelo seu pivô, tornando-o 1.*
- *Anule entradas acima do pivô subtraindo de* $l_1, \ldots, l_{k-1}$ *múltiplos de* l_k.

Observação 17 *Alguns livros chamam a Parte I de* ***eliminação de Gauss*** *e a Parte I + Parte II de* ***eliminação de Gauss-Jordan****.*

Vamos agora aplicar o algoritmo em detalhes na matriz $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & -2 & 10 \\ -4 & -12 & -7 & 0 & -10 \\ 6 & 18 & 11 & 0 & 14 \end{array}\right]$.

(a) Descarte linhas só de zeros (não tem nenhuma).

(b) $p \leftarrow 4$.

(c) $k \leftarrow 1$.

(d) Início do primeiro laço.

• Considere apenas as linhas l_1, l_2, l_3 e l_4 (ou seja, todas as linhas).

• Identifique a coluna não nula mais à esquerda: $\left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{2} & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & -2 & 10 \\ -4 & -12 & -7 & 0 & -10 \\ 6 & 18 & 11 & 0 & 14 \end{array}\right]$.

• Troque linhas para obter $\boxed{\textbf{pivô}}$ não nulo (como o pivô não é nulo, não precisa fazer nada).

• Anule as entradas abaixo do $\boxed{\textbf{pivô}}$ $\mathbf{2}$, subtraindo de l_2, l_3, l_4 múltiplos de l_1. Fazendo $l_2 \leftarrow l_2 - l_1$, $l_3 \leftarrow l_3 + 2l_1$,$l_4 \leftarrow l_4 - 3l_1$ obtemos: $\left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{2} & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right]$.

• Descarte linhas só de zeros (não tem nenhuma).

• $p \leftarrow 4$.

• $k \leftarrow 2$.

(d) Início do segundo laço.

• Considere apenas as linhas 2, 3 e 4 (ignore a primeira): $\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right]$.

• Identifique a coluna não nula mais à esquerda: $\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right]$.

• Troque linhas para obter $\boxed{\textbf{pivô}}$ não nulo: $\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right]$.

• Anule as entradas abaixo do $\boxed{\textbf{pivô}}$ $-\mathbf{1}$, subtraindo de l_3 e de l_4 múltiplos de l_2. Fazendo $l_4 \leftarrow l_4 + 2l_2$ (l_3 já está com entrada zerada abaixo do pivô) obtemos: $\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$.

• Descarte linhas só de zeros (não tem nenhuma).

• $p \leftarrow 4$.

• $k \leftarrow 3$.

(d) Início do terceiro laço.

• Considere apenas as linhas 3 e 4 (ignore a primeira e a segunda): $\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$.

• Identifique a coluna não nula mais à esquerda. $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

• Troque linhas para obter $\boxed{\text{pivô}}$ não nulo (como o pivô não é nulo, não precisa fazer nada).

• Anule as entradas abaixo do $\boxed{\text{pivô}}$ $-\mathbf{3}$, subtraindo de l_4 um múltiplo de l_3. Fazendo $l_4 \leftarrow l_4 + 1/3 l_3$ obtemos: $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

• Descarte linhas só de zeros: $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right]$.

• $p \leftarrow 3$.

• $k \leftarrow 4$.

(d) Fim do laço pois $k \geq p$. **Fim da Parte I**: matriz já está escalonada.

Vamos agora fazer o escalonamento total da matriz.

(b) Início do primeiro laço. $k \leftarrow 3$.

• Divida l_3 pelo seu $\boxed{\textbf{pivô}}$ $-\mathbf{3}$ obtendo: $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\mathbf{1}} & -2 \end{array}\right]$.

• Anule as entradas acima do $\boxed{\text{pivô}}$, subtraindo de l_1, l_2 múltiplos de l_3. Faça $l_1 \leftarrow l_1 - l_3$ e $l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1$ obtendo: $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\mathbf{1}} & -2 \end{array}\right]$.

(b) Início do segundo laço. $k \leftarrow 2$.

• Divida l_2 pelo seu $\boxed{\textbf{pivô}}$ $-\mathbf{1}$ obtendo: $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{\mathbf{1}} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$.

• Anule as entradas acima do $\boxed{\text{pivô}}$, subtraindo de l_1 múltiplos de l_2. Faça $l_1 \leftarrow l_1 - 3l_2$ obtendo: $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & \boxed{\mathbf{1}} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$.

(b) Início do terceiro laço. $k \leftarrow 1$.

• Divida l_1 pelo seu $\boxed{\textbf{pivô}}$ $\mathbf{2}$ obtendo: $\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{\mathbf{1}} & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$.

• Anule as entradas acima do $\boxed{\textbf{pivô}}$ $\mathbf{1}$. Não tem nada a fazer (nenhuma linha está acima da primeira).

(b) Fim do laço pois $k = 1$. Chegamos ao fim e a matriz está totalmente escalonada.

2.5 Resolvendo Sistema após Escalonamento

Para estudar como resolver o sistema após o escalonamento, introduzimos a seguinte notação para elementos da matriz: $\left\{\begin{array}{lllll} 0 & - & \text{zero} & \blacksquare & - \text{ não-zero} \\ 1 & - & \text{um} & \star & - \text{ qualquer número} \end{array}\right.$.

Com esta notação, um sistema **totalmente escalonado** possuirá somente uma das três formas:

1º forma: $\left[\begin{array}{cccc|c} \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$ – sistema **sem solução**.

A última linha do sistema corresponde a equação $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1$. Como $0 = 1$ não será verdade nunca, o conjunto-solução é vazio.

2º forma: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \star \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \star \end{array}\right]$ – sistema **com solução única**.

O sistema correspondente é $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \star \\ x_2 & = & \star \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & \star \end{array}\right.$. O conjunto-solução é $\{(\star, \star, \ldots, \star)\}$.

3º forma: nenhuma das anteriores – sistema **com infinitas soluções**.

O conjunto-solução será infinito conforme veremos na seqüência.

Exemplo 73 (sem solução) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Exemplo 74 (com solução única) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right]$, $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right]$.

Exemplo 75 (com infinitas soluções) *Considere o sistema:*

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Suponha conhecidos os valores de x_2 e x_4, digamos $x_2 = r$ e $x_4 = s$. O sistema pode ser reescrito como: $\left\{\begin{array}{lcl} 1x_1 & = & 4 + 3r - 5s \\ \quad 1x_3 & = & -2s \\ \qquad 1x_5 & = & -2 \end{array}\right.$.

Agora este é um sistema em 3 variáveis: x_1, x_3 e x_5 da forma: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 + 3r - 5s \\ 0 & 1 & 0 & -2s \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

Sabemos resolver esse sistema, que está no 1° caso. Ele possui solução única: $(x_1, x_3, x_5) = (4 + 3r - 5s,\ -2s,\ -2)$. *Como* $x_2 = r$ *e* $x_4 = s$, *obtemos o conjunto-solução* $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = \{(4 + 3r - 5s,\ r,\ -2s,\ s,\ -2) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$ *ou ainda:*

$$\{(4, 0, 0, 0, -2) + r(3, 1, 0, 0, 0) + s(-5, 0, -2, 1, 0) \mid r, s \in \mathbb{R}\}.$$

Na linguagem do Capítulo 1, o conjunto-solução é o subespaço afim

$$(4, 0, 0, 0, -2) + \langle (3, 1, 0, 0, 0), (-5, 0, -2, 1, 0) \rangle .$$

Neste exemplo o sistema possui um total de 5 variáveis e, por possuir 3 equações relacionando-as, ficou com somente $5 - 3 = 2$ variáveis livres para assumir qualquer valor. A essas duas variáveis (x_2 e x_4) foram atribuídos os dois parâmetros r, s e, utilizando as 3 equações remanescentes do sistema foram obtidas soluções em função destes parâmetros. Para o mesmo número total de variáveis, quanto maior o número de linhas (equações) no sistema escalonado menor o número de variáveis livres.

Observação 18 *A eliminação de linhas é a operação mais importante no processo de escalonamento de uma matriz pois reduz o número de equações do sistema. O fato de uma equação ser eliminada significa que era combinação linear das outras, sendo, portanto, redundante para a resolução do sistema. Ao final do escalonamento saberemos quantas equações são independentes entre si. Em termos de variáveis, zero equações significa que todas variáveis estão livres, e cada equação a mais introduz uma restrição em alguma variável, reduzindo o número de variáveis livres.*

Definição 25 (variável livre e variável (in)dependente) *Após o escalonamento total de um sistema obteremos uma matriz com $n + 1$ colunas (correspondendo ao total de n variáveis) e p linhas (correspondendo ao número de **pivôs** ou de equações após o escalonamento). Chamamos de **variável livre** ou **independente** aquela associada a coluna sem pivô. Como são n variáveis no total e p equações, são $n - p$ variáveis livres. A cada variável livre é atribuído um **parâmetro** variável (usualmente denotado por $t, r, s, \ldots$) que pode assumir qualquer valor. Chamamos de **variável dependente** as que não são livres pois seu valor depende de **parâmetros**. Em resumo temos que:*
n = nº total de variáveis,
*p = nº de equações = nº de linhas = nº de **pivôs** = nº de **variáveis dependentes**,*
*$n - p$ = nº de **variáveis livres** = nº de **parâmetros**.*

$$\left\{ \left[\underbrace{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star \end{array}}_{n} \middle| \begin{array}{c} \star \\ \star \end{array} \right] \right.$$

Observação 19 *É utilizado como sinônimo de **variável dependente** o termo **variável líder** pois estão associadas a pivôs (líderes).*
*Alguns livros chamam o **número de variáveis livres**, que é igual ao **número de parâmetros**, de **grau de liberdade** ou **grau de indeterminação** do sistema linear.*

Exemplo 76 *Considere o sistema*

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Como $n = 7$ e $p = 4$ são $7 - 4 = 3$ variáveis livres. Como as colunas sem pivô são $1, 3, 7$, são variáveis livres x_1, x_3, x_7. São 4 variáveis dependentes: x_2, x_4, x_5, x_6. Introduzindo parâmetros r, s, t e atribuindo-os as variáveis livres obtemos que $x_1 = r,\ x_3 = s,\ x_7 = t$. Das equações obtemos que $x_2 = -2x_3 + x_7 = -2s + t,\ x_4 = 4 - 3x_7 = 4 - 3t,\ x_5 = -1,\ x_6 = 2 - 3x_7 = 2 - 3t$. Portanto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (r,\ -2s + t,\ s,\ 4 - 3t,\ -1,\ 2 - 3t,\ t)$, ou ainda, o conjunto-solução é

$$\{(0, 0, 0, 4, -1, 2, 0) + r(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) + s(0, -2, 1, 0, 0, 0, 0) + t(0, 1, 0, -3, 0, -3, 1)\},$$

com $r, s, t \in \mathbb{R}$. Na linguagem do Capítulo 1, o conjunto-solução é o subespaço afim

$$(0, 0, 0, 4, -1, 2, 0) + \langle (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, -2, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -3, 0, -3, 1) \rangle .$$

Exemplo 77 *Considere o sistema*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Como $n = 4$ e $p = 2$ são $4 - 2 = 2$ variáveis livres. Como as colunas sem pivô são $1, 3$, são variáveis livres x_1 e x_3. São 2 variáveis dependentes: x_2, x_4. Introduzindo parâmetros r, s e atribuindo-os as variáveis livres obtemos que $x_1 = r$ e $x_3 = s$. Das equações obtemos que $x_2 = -7 - 3x_3 = -7 - 3s$ e $x_4 = 4$. Portanto $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (r,\ -7 - 3s,\ s,\ 4)$, ou ainda, o conjunto-solução é $\{(0, -7, 0, 4) + r(1, 0, 0, 0) + s(0, -3, 1, 0) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$. Na linguagem do Capítulo 1, o conjunto-solução é o subespaço afim $(0, -7, 0, 4) + \langle (1, 0, 0, 0), (0, -3, 1, 0) \rangle$.

Retomando o exemplo anterior, podemos **gerar soluções** fazendo variar os parâmetros r, s. Por exemplo, tomando $r = 0$ e $s = 0$, obtemos a solução $(0, -7, 0, 4) + 0(1, 0, 0, 0) + 0(0, -3, 1, 0) = (0, -7, 0, 4)$. Obtemos outra solução tomando $r = 3$ e $s = -2$: $(0, -7, 0, 4) + 3(1, 0, 0, 0) - 2(0, -3, 1, 0) = (3, -1, -2, 4)$. Podemos obter **infinitas soluções** pois para cada escolha de valores para os parâmetros r e s, uma nova solução é gerada.

Vamos resumir tudo que dissemos nesse capítulo através de dois teoremas e um corolário.

Teorema 1 (conjunto-solução de sistema linear) *O conjunto-solução (quando não-vazio) S de um sistema linear é sempre um subespaço afim. Pode portanto ser escrito na forma paramétrica*

$$S = \{\mathbf{v}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_q\mathbf{v}_q,\quad \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n,\ t_i \in \mathbb{R}\},$$

ou, em termos de espaço gerado

$$S = \mathbf{v}_0 + \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q \rangle .$$

Observação 20 *Este Teorema é provado com outra técnica, utilizando propriedades (linearidade) do produto matriz-vetor, sem determinar explicitamente o subespaço afim, no Teorema 3 da página 45.*

Observação 21 *Resolver um sistema linear pelo método de eliminação de Gauss significa obter a parametrização do espaço afim S de forma explícita: determinar quantos parâmetros são necessários (na notação da Definição 25, $q = n - p$) e quais são os vetores $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_q$.*

Teorema 2 (existência e unicidade pela forma totalmente escalonada) *Da forma **totalmente escalonada** determinamos se o sistema possui solução e, caso possua, se ela é única:*

- $\left[\begin{array}{cccc|c} \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$ — *sistema sem solução;*

- $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \star \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \star \end{array}\right]$ — *sistema com solução única;*

- *caso contrário* — *sistema com infinitas soluções*

É fácil ver que podemos transformar um sistema na forma escalonada para a forma totalmente escalonada conforme indicamos nos diagramas abaixo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \blacksquare & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \blacksquare & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \star \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \blacksquare & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \blacksquare & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \star \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$

Isto prova o próximo corolário.

Corolário 1 (existência e unicidade pela forma escalonada) *Da forma **escalonada** determinamos se o sistema possui solução e, caso possua, se ela é única:*

- $\left[\begin{array}{cccc|c} \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \blacksquare \end{array}\right]$ — *sistema sem solução;*

- $\left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & \blacksquare & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \blacksquare & \star \end{array}\right]$ — *sistema com solução única;*

- *caso contrário* — *sistema com infinitas soluções*

Concluimos que **não** precisamos fazer a forma totalmente escalonada para determinar se um sistema possui solução e se ela é única: para isto basta a forma escalonada. Mas, para calcular a solução, recomendamos fortemente que se escalone totalmente a matriz ao invés de se fazer a substituição para trás na matriz escalonada. A prática mostra que se reduzem erros númericos desta forma.

Portanto, use a forma escalonada somente para decidir se o sistema possui solução: não use-o para calculá-la.

Exemplo 78 $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\pi} & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 311 \end{array}\right]$*: sem solução devido a linha:* $0 = 311$.

Exemplo 79 $\left[\begin{array}{cccc|c} 13 & 2 & 0 & -6 & 33 \\ 0 & 10^{-7} & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$*: com infinitas soluções* (1 *variável livre).*

Exemplo 80 $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -8 & 12 & 0 \\ 0 & e^3 & 11 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \log(3) & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 77 & -3 \end{array}\right]$*: com solução única pois todos os números* 2, e^3, $\log(3)$, 77 *são não-nulos.*

2.6 Produto Matriz-Vetor e Sistemas Lineares

Iniciamos recordando o produto escalar entre dois vetores. Retomaremos este assunto bem mais adiante no texto (veja Definição 94 da página 183) generalizando-o. No momento queremos somente utilizar a notação para apresentar o produto matriz-vetor.

Definição 26 (produto escalar ou interno) *Dados dois vetores* $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *denotamos o* ***produto escalar*** *(ou* ***produto interno****) entre eles por* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, *um número definido por*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Exemplo 81 *Sejam* $\mathbf{u} = (1, -2, -3, 4, 5), \mathbf{v} = (-1, 2, -1, 3, 0) \in \mathbb{R}^5$. *Então*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(-1) + (-2)(2) + (-3)(-1) + (4)(3) + (5)(0) = (-1) + (-4) + (3) + (12) = 10.$$

Vamos agora relacionar a operação de produto matriz-vetor com sistemas lineares. Considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & \cdots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & \cdots & + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & \cdots & + & a_{mn} & x_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

Definimos $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$. Sabemos da definição usual do produto matriz-vetor que podemos escrever este sistema como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Existem duas interpretações do produto matriz-vetor que implicarão duas interpretações para soluções do sistema linear acima:

(a) (produto escalar com linhas da matriz) Definimos $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}$, e de forma geral $\mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{bmatrix}$. Desta forma os vetores $\mathbf{u}_j$ são formados pelos coeficientes das linhas do sistema. Temos que $A = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_m \rightarrow \end{bmatrix}$ (cada linha é um vetor). Se lermos o sistema da maneira natural, linha por linha, observamos que o lado esquerdo de cada linha possui a estrutura de produto escalar do vetor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ com o vetor formado por cada linha da matriz A. Portanto podemos reescrevê-lo como

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x} &= b_1 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x} &= b_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{x} &= b_m \end{cases}.$$

Isto pode ser representado pelo esquema:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_m \rightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \mathbf{x} \\ \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Big| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

(b) (combinação linear das colunas da matriz) Agrupando as colunas dos coeficientes segundo o esquema

$$\left\{ \begin{array}{|c|c c|c|c c c|c|c c c} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & \cdots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & \cdots & + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & \cdots & + & a_{mn} & x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

e chamando $\mathbf{v}_1$, ..., $\mathbf{v}_n$ as colunas do lado esquerdo e de $\mathbf{b}$ a do lado direito,

$$x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2} + \cdots + x_n \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}},$$

obtemos a equação vetorial $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{v}_j = \mathbf{b}$. Escrevendo que $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ (cada coluna é um vetor), isto pode ser representado pelo esquema:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Big| & \Big| & \Big| & \Big| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{v}_j = \begin{bmatrix} \Big| & \Big| \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

Para interpretar precisamos de uma definição.

Definição 27 (hiperplano) *Um* ***hiperplano*** *em* $\mathbb{R}^n$ *é um subespaço afim de dimensão* $n-1$.

Exemplo 82 *Em* $\mathbb{R}^3$ *um plano possui dimensão* $3-1=2$ *e é um hiperplano. Em* $\mathbb{R}^2$ *uma reta possui dimensão* $2-1=1$ *e é um hiperplano. Em* $\mathbb{R}^4$ *um subespaço afim de dimensão* $4-1=3$ *é um hiperplano.*

Se introduzirmos uma equação relacionando as coordenadas de um vetor $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, reduziremos a dimensão em uma unidade pois, utilizando a equação, determinamos uma variável em função das $n-1$ outras. Por isso uma equação linear determina um subespaço afim de dimensão $n-1$, isto é, um hiperplano.

Exemplo 83 *Determine parametrização do subespaço afim dos pontos* $(x,y,z,w,u)\in\mathbb{R}^5$ *tais que* $x-2y+3z+w-u=4$.
Podemos escrever que $x=2y-3z-w+u+4$. *Introduzindo parâmetros* $t_1=y, t_2=z, t_3=w$ *e* $t_4=u$, *obtemos que* $x=2t_1-3t_2-t_3+t_4+4$. *Portanto o subespaço afim é parametrizado por quatro parâmetros* (t_1,t_2,t_3,t_4) *da seguinte forma:* $(x,y,z,w,u)=(4,0,0,0,0)+t_1(2,1,0,0,0)+t_2(-3,0,1,0,0)+t_3(-1,0,0,1,0)+t_4(1,0,0,0,1)$. *Trata-se de um subespaço afim de dimensão* 4 *em* $\mathbb{R}^5$, *isto é, um hiperplano em* $\mathbb{R}^5$.

Em resumo podemos escrever $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ ou $A = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_m \rightarrow \end{bmatrix}$. Note que o número de colunas n não é necessariamente o mesmo que o número de linhas m. As duas interpretações do produto matriz-vetor $A\mathbf{x}$ determinam duas interpretações para a solução de sistemas lineares:

(a) (produto escalar com linhas da matriz $\rightarrow$ interseção de hiperplanos) Cada equação $\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{x}=b_j$ representa um hiperplano H_j (um subespaço afim de dimensão $n-1$ em $\mathbb{R}^n$). A interseção de todos estes hiperplanos, representado por $\bigcap_{j=1}^{m} H_j$, determinará soluções do sistema linear. Esta interpretação possui um sabor geométrico. É a idéia usualmente apresentada no ensino médio para interpretar sistemas. Em $\mathbb{R}^2$ estudamos interseção de retas (hiperplanos em $\mathbb{R}^2$); em $\mathbb{R}^3$ estudamos interseção de planos (hiperplanos em $\mathbb{R}^3$).

Note que a intuição geométrica funciona para garantir que, de forma geral, tanto a interseção de duas retas no plano quanto a interseção de três planos em $\mathbb{R}^3$ é um único ponto. Mas como visualizar que, de forma geral, a interseção de 4 hiperplanos em $\mathbb{R}^4$ é um único ponto? Para entender sistemas com muitas equações devemos nos libertar desta interpretação geométrica, que não pode ser experimentada em dimensão maior que 3, em favor da próxima interpretação.

(b) (combinação linear das colunas da matriz $\rightarrow$ combinação linear das colunas) O sistema terá solução se o vetor $\mathbf{b}$ for combinação linear dos vetores coluna da matriz, isto é, se $\mathbf{b} = \sum x_j \mathbf{v}_j$ para alguns $x_j \in \mathbb{R}$ ($\mathbf{b} \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$). Note que se isto ocorrer podem existir diferentes combinações dos vetores coluna, isto é, o sistema pode ter mais de uma solução. Por outro lado, se o vetor $\mathbf{b}$ não estiver no espaço gerado pelos vetores coluna da matriz, isto é, se não for combinação linear ($\mathbf{b} \notin \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$), então o sistema não possuirá solução. Esta interpretação possui sabor algébrico. É a interpretação importante no curso de Álgebra Linear.

Podemos resumir da seguinte forma:

Sistema	$b = \sum x_j \mathbf{v}_j$?	$\bigcap H_j \neq \emptyset$?
sem solução	não	não
com solução única	sim (única)	sim (1 ponto)
com infinitas soluções	sim (várias)	sim (infinidade de pontos)

2.7 Casos Especiais

2.7.1 Sistemas Homogêneos, Solução Geral e Particular

Definição 28 (Sistema homogêneo) *é um sistema cujo lado direito é todo igual a zero:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & +a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}.$$

Definição 29 (solução trivial) *O vetor nulo $(0, 0, \ldots, 0)$ é sempre solução do sistema homogêneo. Esta solução é chamada **solução trivial**.*

Observe que num sistema homogêneo o lado direito de zeros é preservado por operações elementares:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \star & \cdots & \star & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 \end{array}\right].$$

Por isso a forma escalonada de um sistema homogêneo não possui linha da forma $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & \blacksquare \end{array}\right]$. Isto implica que um sistema homogêneo **sempre** possui solução. Mais ainda, num sistema homogêneo com n variáveis, o número de pivôs p (equações) após o escalonamento determina se a solução é única:

(a) $p = n \quad \Rightarrow$ **solução única** (apenas a trivial);
(b) $p < n \quad \Rightarrow$ **infinitas soluções**, $(n - p)$ variáveis livres.

Definição 30 (solução geral e particular) *Considere o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.*

*Chamamos de **solução geral** seu conjunto-solução S.*

*Chamamos de **solução particular** um elemento $\mathbf{v}_0 \in S$ qualquer.*

Exemplo 84 *Vamos ver a relação entre soluções de um sistema não-homogêneo e do sistema homogêneo associado. Considere o sistema não-homogêneo:*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Este sistema foi resolvido no Exemplo 77 e obtivemos que o conjunto-solução é $\{(0,-7,0,4) + r(1,0,0,0) + s(0,-3,1,0) \mid r,s \in \mathbb{R}\}$. *Na linguagem do Capítulo 1, o conjunto-solução é o subespaço afim*

$$(0,-7,0,4) + \langle (1,0,0,0),(0,-3,1,0) \rangle .$$

Considere o sistema homogêneo associado:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Resolvendo-o de forma análoga, obtemos o conjunto-solução $\{r(1,0,0,0) + s(0,-3,1,0) \mid r,s \in \mathbb{R}\}$. *Na linguagem do Capítulo 1, o conjunto-solução é o subespaço afim*

$$\langle (1,0,0,0),(0,-3,1,0) \rangle .$$

Note que o conjunto-solução do sistema não-homogêneo e do homogêneo associado diferem somente pelo vetor $(0,-7,0,4)$, *que é uma solução particular (dentre as infinitas soluções) do sistema não-homogêneo.*

Teorema 3 (solução geral de sistema) *A solução geral (se* $\neq \emptyset$*) do sistema não-homogêneo é obtida transladando o conjunto-solução do sistema homogêneo associado por uma solução particular* $\mathbf{v}_0$ *(do sistema não-homogêneo).*

Mais precisamente, seja S *o conjunto-solução (solução geral) do sistema não-homogêneo,* V *o conjunto-solução do sistema homogêneo associado e* $\mathbf{v}_0 \in S$ *uma solução particular (do sistema não-homogêneo). Então* $S = \mathbf{v}_0 + V$.

Prova: Seja $S \neq \emptyset$ a solução geral do sistema não-homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{v}_0 \in S$ solução particular qualquer (do sistema não-homogêneo).

Seja V o conjunto-solução do sistema homogêneo associado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Queremos provar que $S = \mathbf{v}_0 + V$. Para isto basta provar que $\mathbf{v}_0 + V \subset S$ e que $S \subset \mathbf{v}_0 + V$.

Tome $\mathbf{v} \in V$ qualquer. Como $A(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}) = A\mathbf{v}_0 + A\mathbf{v} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$, concluimos que $\mathbf{v}_0 + V \subset S$.

Tome $\mathbf{w} \in S$ qualquer. Como $A(\mathbf{w} - \mathbf{v}_0) = A\mathbf{w} - A\mathbf{v}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, concluimos que $\mathbf{w} - \mathbf{v}_0 \in V$ e portanto $\mathbf{w} \in \mathbf{v}_0 + V$. Logo $S \subset \mathbf{w}_0 + V$. ■

Observação 22 *Este Teorema é provado com outra técnica, utilizando o algoritmo (método de Gauss ou Gauss-Jordan) de solução de sistemas lineares, no Teorema 1 da página 39.*

A **solução geral** do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é da forma $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$, soma de uma **solução particular** com uma **solução do sistema homogêneo associado** $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

A dimensão de V, conjunto-solução do sistema homogêneo associado, que é igual a dimensão de S, determina quantos parâmetros são necessários para parametrizar todas as soluções do sistema. Ela caracteriza "quão grande" é o conjunto S de soluções. Portanto, são equivalentes:

(a) a dimensão de S é igual a zero;
(b) o sistema possui solução única (igual a $\mathbf{v}_0$);
(c) a dimensão de V é igual a zero;
(d) o sistema homogêneo associado possui solução única (a trivial).

2.7.2 Mesma Matriz de Coeficientes

Podemos resolver de forma **simultânea** sistemas lineares com mesma matriz de coeficientes mas com lado direito distinto.

Exemplo 85 *Suponha que queiramos resolver o sistema* $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+5y=9 \end{cases}$ *e também o sistema* $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x+5y=-3 \end{cases}$. *De forma direta poderíamos calcular*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

determinando a solução do primeiro sistema ($x=2, y=1$), e depois calcular

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right],$$

determinando a solução do segundo sistema ($x=1, y=-1$). Podemos evitar retrabalho aumentando a matriz com vários lados direitos de uma vez. Desta forma calculamos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 9 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

para obter a solução dos dois sistemas de forma simultânea.

2.8 Exercícios de Sistemas Lineares

2.8.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1. Sem fazer contas,[1] determine se os sistemas abaixo possuem uma única, nenhuma ou infinitas soluções.

(a) $\begin{cases} x+y &= 1 \\ 2x+2y &= 2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x+y &= 1 \\ 2x-3y &= 2 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x+y &= 1 \\ 2x+2y &= 3 \end{cases}$

Exercício 2. Considere as seguintes operações em um sistema de quatro equações:

(a) trocar duas equações;
(b) descartar uma equação;
(c) substituir a terceira equação pela soma da primeira com a segunda;
(d) substituir a quarta equação pela sua soma com um múltiplo da segunda;
(e) multiplicar uma equação por -1;

---

[0] Versão 14.jul.2008 09h

[1] Por "sem fazer contas", queremos dizer, neste e em outros exercícios, "sem fazer quaisquer contas que não possam ser feitas mentalmente com facilidade"

(f) multiplicar uma equação por 0.

As operações ___________ **nunca alteram** e as operações ___________ **podem alterar** o conjunto-solução do sistema.

Exercício 3. O conjunto-solução do sistema $\left\{\begin{array}{rcl} x-2y & = & 3 \\ 3x+y & = & 1 \end{array}\right.$ (não resolva o sistema!) não se altera se acrescentarmos a equação $2x+3y=$ ___.

Exercício 4. Considere um triângulo ABC equilátero

(a) um sistema formado pelas três retas que contêm os lados de ABC possui _________ (*nenhuma; três; uma única; infinitas*) solução(ções);

(b) um sistema formado por quaisquer duas destas retas possui _________ (*nenhuma; três; uma única; infinitas*) solução(ções).

Exercício 5. Sem fazer contas, determine, se possível, a condição em ξ para que os sistemas abaixo não possuam solução:

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} -x+y & = & 3 \\ 2x-2y & = & \xi \end{array}\right.$; (b) $\left\{\begin{array}{rcl} -x+y & = & 3 \\ 2x+y & = & \xi \end{array}\right.$.

Exercício 6. Determine se é verdadeiro ou falso:

(a) se durante o escalonamento uma linha ficar zerada então o sistema têm infinitas soluções;

(b) um sistema homogêneo possui sempre solução;

(c) um sistema não-homogêneo não pode possuir infinitas soluções.

Exercício 7. Determine se é verdadeiro ou falso:

(a) um sistema com 5 equações e 3 variáveis é sempre sem solução;

(b) um sistema com 3 equações e 5 variáveis possui infinitas soluções;

(c) um sistema homogêneo com 3 equações e 5 variáveis possui infinitas soluções;

(d) um sistema homogêneo com 5 equações e 9 variáveis possui pelo menos 4 variáveis livres;

(e) um sistema homogêneo com 9 equações e 9 variáveis possui sempre solução única.

Exercício 8. Sem fazer contas, discuta a existência e a unicidade de solução dos sistemas abaixo. No caso de infinitas soluções, determine ainda o número de variáveis livres.

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$; (b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$; (c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$.

Exercício 9. Em $\mathbb{R}^5$:

(a) o conjunto-solução de um sistema linear pode ser visto como a _________ (*união; interseção*) de _________ (*retas; planos; hiperplanos*);

(b) uma reta é um subespaço de dimensão ___;

(c) um plano é um subespaço de dimensão ___;

(d) um hiperplano é um subespaço de dimensão ___.

Exercício 10. Considere o sistema:

$$A\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_m \rightarrow \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \uparrow \\ \mathbf{x} \\ \downarrow \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right] = \mathbf{b}.$$

Defina $H_j = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{x} = b_j\}$.

(a) o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui solução se, e somente se, $\bigcap_{j=1}^{m} H_j$ ___$(=, \neq)$ $\emptyset$;

(b) o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui solução se, e somente se, $\mathbf{b}$ __$(\in, \notin)$ $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$;

Exercício 11. Seja $S \neq \emptyset$ a solução geral de um sistema não-homogêneo com V o conjunto-solução do sistema homogêneo associado. Escolha uma opção. É sempre verdade que:

(A) $S = \mathbf{v}_0 + V$ com $\mathbf{v}_0 \in V$;
(B) $S = \mathbf{v}_0 + V$ com $\mathbf{v}_0 \in S$;
(C) $V = \mathbf{v}_0 + S$ com $\mathbf{v}_0 \in S$;
(D) $V = \mathbf{v}_0 + S$ com $\mathbf{v}_0 \in V$;

2.8.2 Problemas

Problema 1. Considere o sistema $\left\{ \begin{array}{rcr} x + 3y & = & 1 \\ 2x + y & = & -3 \\ 2x + 2y & = & 0 \end{array} \right.$. No ensino fundamental um método de resolução de sistema é resolver uma equação para uma variável e substituir a expressão nas outras equações. Isto é repetido até ficarmos com somente uma variável. Com isso, determinamos uma variável e, substituindo nas outras equações, determinamos as outras. Este método, além de mais longo que a eliminação de Gauss em termos de operações necessárias induz, freqüentemente, ao erro.

(a) resolva a primeira equação para x e substitua a expressão na segunda equação. Determine y;

(b) Novamente resolva a primeira equação para x, mas desta vez substitua a expressão na terceira equação. Encontre este y;

(c) qual é a solução correta para o sistema?

Problema 2. Para cada um dos sistemas abaixo interprete cada equação como uma reta em $\mathbb{R}^2$, faça o gráfico e determine geometricamente o número de soluções:

(a) $\left\{ \begin{array}{rcr} x + y & = & 3 \\ x - y & = & 1 \end{array} \right.$; (b) $\left\{ \begin{array}{rcr} 3x - y & = & 6 \\ -6x + 2y & = & 6 \end{array} \right.$;

Problema 3. Suponha que um sistema de três variáveis é composto de três equações. Em $\mathbb{R}^3$ cada equação representa um plano. Qual a posição relativa destes três plano quando o sistema:

(a) não possui solução?
(b) possui exatamente uma solução?
(c) possui infinitas soluções?

Problema 4. Considere o paralelogramo $ABCD$ (não-degenerado: todos os pontos são distintos entre si) com lados paralelos AB e CD. Definimos quatros retas r, s, t, u de modo que: r passa por A e B, s passa por B e C, t passa por A e C, u passa por A e D. Determine a solução de cada um dos sistemas abaixo, onde representamos cada equação pela reta que ela determina:

(a) $\left\{ \begin{array}{c} s \\ t \end{array} \right.$; (b) $\left\{ \begin{array}{c} u \\ s \end{array} \right.$; (c) $\left\{ \begin{array}{c} r \\ s \\ t \end{array} \right.$; (d) $\left\{ \begin{array}{c} r \\ t \\ u \end{array} \right.$.

Problema 5. Para cada um dos itens abaixo, dê um exemplo de um sistema com as características pedidas ou explique por que tal exemplo não pode existir:

(a) (nº equações) = (nº variáveis), infinitas soluções;
(b) (nº equações) < (nº variáveis), solução única;
(c) (nº equações) < (nº variáveis), nenhuma solução;
(d) (nº equações) > (nº variáveis), infinitas soluções;

Problema 6. Encontre a forma <u>totalmente escalonada</u> das matrizes abaixo:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

Problema 7. Resolva cada um dos sistemas abaixo:

(a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$; (b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$;

(c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$; (d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$;

(e) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & -2 & 10 \\ -4 & -12 & -7 & 0 & -10 \\ 6 & 18 & 11 & 0 & 14 \end{array}\right]$; (f) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & -4 & -18 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right]$.

Problema 8. Os sistemas abaixo são equivalentes (o segundo está totalmente escalonado):

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 2 & 41 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -24 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -17 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Dê descrições paramétricas dos conjuntos-solução de ambos. Encontre três soluções distintas para o primeiro sistema.

Problema 9. Resolva os sistemas lineares abaixo, escrevendo o conjunto solução em equações paramétricas:

(a) $\begin{cases} 2x - y + 2z &= 1 \\ -4x + 2y - 4z &= -2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x + y - 2z &= -2 \\ x - y &= 0 \\ 2x + y - 3z &= -3 \end{cases}$;

Problema 10. Determine os valores de m para que o sistema $\begin{cases} 2x + 8y + 2z = 3 \\ 4x + m^2y + mz = 6 \end{cases}$ possua:

(a) uma única variável livre; (b) duas variáveis livres.

Problema 11. Determine todos os valores possíveis para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que o sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z &= a \\ 5y + 6z &= b \\ cz &= d \end{cases}$ possua:

(a) nenhuma solução; (b) infinitas soluções.

Problema 12. Considere a parábola $y(x) = ax^2 + bx + c$ que passa por $(1, 2)$, $(2, 4)$ e $(3, 8)$. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Problema 13. Resolva os dois sistemas

$\begin{cases} 6x + 3y &= 9 \\ 4x + 3y &= 5 \end{cases}$ e $\begin{cases} 6x + 3y &= -3 \\ 4x + 3y &= 1 \end{cases}$

simultaneamente colocando em forma totalmente escalonada a matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 3 & 9 & -3 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right].$$

Problema 14. Calcule $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (produto matriz-vetor) de duas formas:

(a) como CL das colunas da matriz (usando como coeficientes as entradas do vetor);
(b) como produtos escalares das linhas da matriz pelo vetor.

Problema 15. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$. Note que a terceira coluna é a soma das duas primeiras. Sem escalonar, encontre um vetor $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2.8.3 Desafios

Desafio 1. Embora não tenha sido definida ainda, todos sabemos como fazer o produto de duas matrizes. Seja A uma matriz para ser escalonada. Determine para cada uma das três operações elementares uma matriz P tal que PA seja a matriz resultante após a aplicação da operação elementar;

Dica: Aplique operação elementar na matriz identidade.

Desafio 2. Prove que as operações elementares (de escalonamento de uma matriz) são reversíveis, isto é, mostre que se a matriz A é equivalente a B então a matriz B é equivalente a matriz A.

Desafio 3. Um sistema linear com n equações e n variáveis tem a propriedade que os coeficientes, quando lidos linha por linha, da esquerda para direita, forma uma progressão aritmética. Prove que o sistema tem solução única. Determine sua solução. (Hefferon)

Desafio 4. Considere um sistema de n equações em n variáveis. Prove a alternativa de Fredholm:
(a) ou o sistema possui solução única para todo lado direito;
(b) ou o sistema homogêneo associado tem solução não-trivial.

2.8.4 Extras

Extra 1. Para cada um dos sistemas abaixo interprete cada equação como uma reta em $\mathbb{R}^2$, faça o gráfico e determine geometricamente o número de soluções:

(a) $\begin{cases} 2x - 3y &= -1 \\ -6x + 9y &= 3 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 2x + 2y &= 6 \\ x - y &= 1 \\ x + 3y &= 6 \end{cases}$;

Extra 2. Um dado comum é um cubo cujas 6 faces apresentam os números de 1 até 6, distribuídos de forma que faces opostas somam sempre 7 (o 1 é oposto ao 6; o 2 oposto ao 5 e o 3 oposto ao 4). Vamos representar por "face 1" a equação do plano que contém a face com o número 1, por "face 2" a equação do plano que contém a face com o número 2, etc.

Determine o número de soluções de cada um dos sistemas abaixo:

(a) $\begin{cases} \text{face2} \\ \text{face6} \end{cases}$; (b) $\begin{cases} \text{face3} \\ \text{face4} \end{cases}$; (c) $\begin{cases} \text{face1} \\ \text{face3} \\ \text{face5} \end{cases}$; (d) $\begin{cases} \text{face3} \\ \text{face5} \\ \text{face6} \end{cases}$; (e) $\begin{cases} \text{face1} \\ \text{face3} \\ \text{face6} \end{cases}$;

Extra 3. Para cada um dos itens abaixo, dê um exemplo de um sistema com as características pedidas ou explique por que tal exemplo não pode existir:
(a) (n° equações) = (n° variáveis), solução única;
(b) (n° equações) = (n° variáveis), nenhuma solução;
(c) (n° equações) < (n° variáveis), infinitas soluções;
(d) (n° equações) > (n° variáveis), solução única;

[1]Versão 14.jul.2008 09h

(e) (nº equações) > (nº variáveis), nenhuma solução;

Extra 4. A equação geral do círculo em $\mathbb{R}^2$ com centro em (A, B) e raio r é dada por $(x-A)^2 + (y-B)^2 = r^2$.

(a) determine a, b, c em função de A, B, r para que a equação do círculo seja escrita como $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$;

(b) Dados três pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ por onde passa o círculo, escreva o sistema que determina a, b, c.

(c) (Anton) Determine a equação do círculo que passa em $(-4, 5), (-2, 7)$ e $(4, -3)$.

Extra 5. Determine condições nos parâmetros (δ, β) para que o sistema associado possua uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução:

(a) $\begin{cases} \delta x + 2y &= 0 \\ 2x + \delta y &= 2 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x + \delta y + z &= 1 \\ 2x - \delta y + 3z &= \delta \\ -x + 3y &= -2 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x + 2y + (\delta+1)z &= 2 \\ y + \delta^2 z &= \delta + 1 \\ x + (1-\delta)z &= 0 \end{cases}$;

(d) $\begin{cases} x - y + z &= -1 \\ x + y - z &= 1 \\ 3x - y + z &= -1 \\ x + y + (\beta - 1)z &= \delta \end{cases}$;

(e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \delta & \beta \end{array}\right)$;

(f) $\begin{cases} x + y - z &= 2 \\ y + 5z &= 5 \\ x + 2y + \delta z &= 7 \end{cases}$.

Extra 6. Encontre os valores de a tais que o sistema linear abaixo tenha solução.

$$\begin{cases} x - y &= a \\ x + y + z &= a \\ 2x + z &= a \end{cases};$$

Extra 7. (a) Qual a condição em b_1, b_2 e b_3 para que o sistema abaixo possua solução?

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 2 & -5 & 8 & b_1 \\ 2 & 1 & 0 & b_2 \\ 1 & -4 & 6 & b_3 \end{array}\right]$$

(b) Sem refazer todas as contas, diga se o sistema possue solução com o lado direito (3,5,-1).

Extra 8. Seja $y = \beta_4 x^4 + \beta_3 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$ um polinômio que passa por 5 pontos dados: (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4), e (a_5, b_5). Escreva a matriz ampliada (conhecida como matriz de Vandermonde) do sistema que determina as 5 variáveis $\beta_4, \beta_3, \beta_2, \beta_1, \beta_0$. Note que os pares (a_i, b_i) são dados, e serão coeficientes da matriz ampliada.

Capítulo 3

Espaços Vetoriais

Neste capítulo generalizamos os conceitos do capítulo 1 (combinação linear, espaço gerado, LI/LD, dimensão, base, coordenadas) para generalização do $\mathbb{R}^n$ conhecido como espaço vetorial.

O desafio neste capítulo é aplicar estes conceitos nos espaços vetoriais de polinômio e funções (quaisquer, contínuas, diferenciáveis).

3.1 Definição e Exemplos

Definição 31 (escalar) *Escalares são um conjunto de* números *no qual estão bem definidas as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão. Neste curso, entenderemos sempre por escalar um número real ($\mathbb{R}$).*

Definição 32 (Espaço vetorial) *é um conjunto V no qual estão definidos uma operação de soma vetorial e uma multiplicação por escalar (produto escalar-vetor) satisfazendo os axiomas detalhados mais abaixo, dividido em três categorias:*
(a) axiomas da soma vetorial;
(b) axiomas da multiplicação por escalar (produto escalar-vetor);
(c) axiomas distributivos.

Axioma 1 (axiomas da soma vetorial) *Dados vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$:*

- *comutativa:* $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
- *associativa:* $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}), \ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$;
- *elemento neutro da soma:* $\exists\, \mathbf{0}$ *t.q.* $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \ \forall \ \mathbf{u}$;
- *inverso aditivo: dado* $\mathbf{u}$, $\exists\, (-\mathbf{u})$ *t.q.* $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Axioma 2 (axiomas da multiplicação por escalar (produto escalar-vetor)) *Dados vetor $\mathbf{u} \in V$ e escalares α, β:*

- $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}), \ \forall\, \alpha, \ \forall\, \mathbf{u}$;
- *elemento neutro do produto:* $1\mathbf{u} = \mathbf{u}, \ \forall \mathbf{u}$.

[0]Versão 14.jul.2008 15h

Axioma 3 (axiomas distributivos) *Dados vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ *e escalares* α, β*:*

- $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v},\ \forall\, \alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}$;
- $(\alpha+\beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u},\ \forall\, \alpha, \beta, \mathbf{u}$.

O primeiro, e principal exemplo, foi visto em detalhes no Capítulo 1, o espaço $\mathbb{R}^n$. Ele é um exemplo muito importante pois, num certo sentido (ver Lema 7 da página 69), todo espaço vetorial de dimensão finita é igual a ele.

Exemplo 86 $\mathbb{R}^n$

Espaços de funções terão papel importante neste curso. São usados (entre inúmeras aplicações) para se entender:
(a) como aproximar uma função utilizando polinômios;
(b) métodos numéricos que aproximam derivada ou integral;
(c) espaços de soluções de equações diferenciais.

Definição 33 (espaço de polinômios de grau máximo n) *Definimos o* ***espaço dos polinômios*** *(com coeficientes em $\mathbb{R}$) de grau até n* $\mathcal{P}_n = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n;\ a_i \in \mathbb{R}\}$. *Definimos:*

(a) soma vetorial: $\left(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} b_ix^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)\, x^i$;

(b)multiplicação por escalar: $\alpha\left(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i)\, x^i$.

Pode-se verificar que é um espaço vetorial com elemento neutro da soma $\mathbf{0} \in \mathcal{P}_n$ *(polinômio identicamente nulo) definido por* $\mathbf{0}(x) = \sum_{i=0}^{n} 0x^i$.

Definição 34 (espaço de polinômios) *Definimos por $\mathcal{P}$ a união de todos os espaços $\mathcal{P}_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Assim $\mathcal{P}$ inclui TODOS os polinômios, de todos os graus possíveis.*

Definição 35 (espaço de funções) *Dado conjunto I (não-vazio) qualquer, denotamos $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ o conjunto das funções de I em $\mathbb{R}$. Dadas duas funções $f, g \in \mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos:*

(a) Soma vetorial: $f+g$ por $f(x)+g(x)$ para todo $x \in I$; e

(b) multiplicação por escalar: $\lambda \cdot f$ por $\lambda \cdot f(x)$ para todo $x \in I$.

Pode-se verificar que é um espaço vetorial com elemento neutro da soma $\mathbf{0} \in \mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ (função identicamente nula) definido por $\mathbf{0}(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Observação 23 *Note que o sinal "+" (mais) em "$f+g$" e "$f(x)+g(x)$" (bem como de "$\cdot$") possui significado distinto em cada expressão: soma de vetores, num caso, e de soma de números reais (escalares) no outro.*

Como entender (e visualizar) que um conjunto de funções com valores em $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial?

Vamos começar vendo uma nova representação geométrica de vetores no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$. Já mostramos que podemos representar vetores como "setinhas" (segmentos orientados equivalentes). Agora vamos representá-los como gráficos de funções da seguinte forma. Dado $f \in \mathcal{F}(\{1,2\};\mathbb{R})$, ou seja, dada uma função $f : \{1,2\} \to \mathbb{R}$, ela fica inteiramente determinada uma vez fixado os valores $f(1)$ e $f(2)$. Portanto associamos a $f \in \mathcal{F}(\{1,2\};\mathbb{R})$ o vetor $\mathbf{f} = (f(1), f(2)) \in \mathbb{R}^2$. Reciprocamente, dado $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, associamos a função $f \in \mathcal{F}(\{1,2\};\mathbb{R})$ tal que $f(1) = a_1$ e $f(2) = a_2$. Por exemplo, o vetor $\mathbf{f} = (5,3) \in \mathbb{R}^2$ pode ser representado como o gráfico de $f \in \mathcal{F}(\{1,2\};\mathbb{R})$, como indicado na Figura 3.1. De forma análoga, dada $g \in \mathcal{F}(\{1,2,3\};\mathbb{R})$, ou seja, dada uma função $g : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$, associamos o vetor $\mathbf{g} = (g(1), g(2), g(3)) \in \mathbb{R}^3$. Reciprocamente, dado $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, associamos a função $g \in \mathcal{F}(\{1,2,3\};\mathbb{R})$ tal que $g(1) = a_1$, $g(2) = a_2$ e $g(3) = a_3$. Por exemplo, o vetor $\mathbf{g} = (3,5,2) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado como o gráfico de $\mathbf{g}$, como indicado na Figura 3.1.

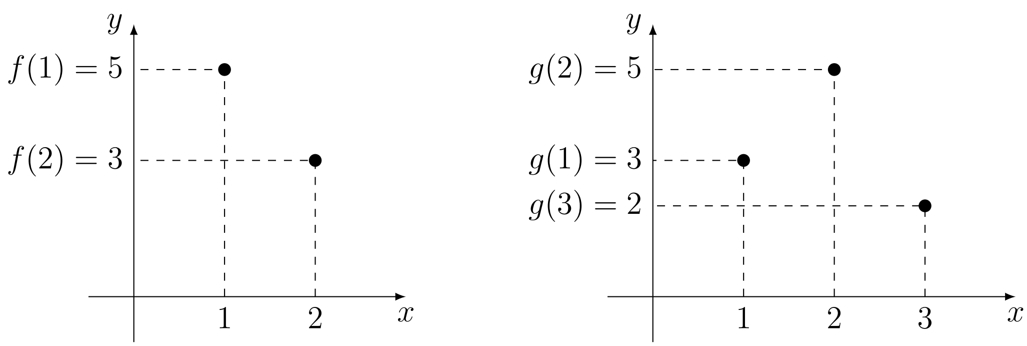


Figura 3.1: Representando $\mathbf{f} = (5,3) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{g} = (3,5,2) \in \mathbb{R}^3$.

.

A vantagem deste ponto de vista é que os desenhos são bidimensionais, e podemos representar, por exemplo, o vetor $\mathbf{f} = (2,4,3,4,1) \in \mathbb{R}^5$ pelo gráfico de $f \in \mathcal{F}(\{1,2,3,4,5\};\mathbb{R})$ definida por $f(i) = a_i$, $i = 1,\ldots,5$, como indicado na Figura 3.2. Note que com a interpretação geométrica de setinhas **não** tínhamos como representar vetores do $\mathbb{R}^n$ com $n > 3$.

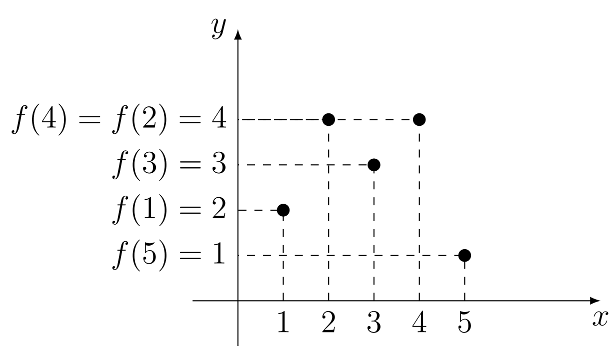


Figura 3.2: Representando $f = (2,4,3,4,1) \in \mathbb{R}^5$.

Generalizando, como um vetor é um $n-$upla de números reais, podemos associar a $\mathbf{f} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ uma função $f : \{1,\ldots,n\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n$. Assim podemos representar $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, para n qualquer, pelo gráfico de $f \in \mathcal{F}(\{1,\ldots,n\};\mathbb{R})$. Agora se substituirmos $\{1,\ldots,n\}$ por I com $I \subset \mathbb{R}$ qualquer, podemos representar o vetor (elemento do espaço de funções) $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ pelo gráfico de $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}$. Por exemplo $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([0,\pi];\mathbb{R})$, definido por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, pode ser representado pelo seu gráfico, como indicado na Figura 3.3.

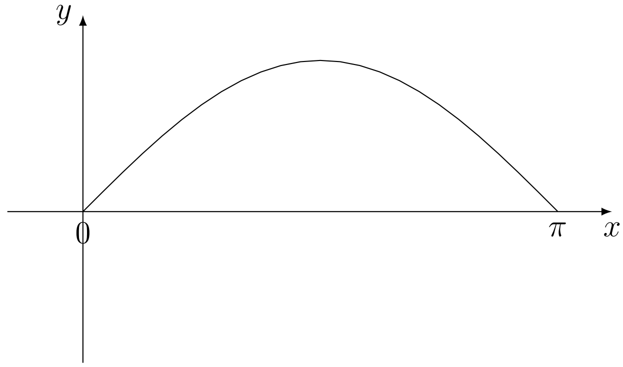


Figura 3.3: Representando $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([0,\pi];\mathbb{R})$, com $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Observação 24 *Fixemos a notação $I_n = \{1, \ldots, n\}$. A representação de vetores do $\mathbb{R}^n$ como função é coerente no seguinte sentido. Vamos nos concentrar na operação de soma de vetores (a multiplicação por escalar é análogo). Já definimos anteriormente como somar vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$: basta somar componente a componente. Se interpretarmos estes vetores como funções $u, v : I_n \to \mathbb{R}$, definimos a função soma (veja Definição 35) $u + v : I_n \to \mathbb{R}$ por $(u+v)(i) = u(i) + v(i)$ para $i = 1, \ldots, n$. Note que apesar de ser definido de outra forma, obtemos a mesma coisa.*

Exemplo 87 *Considere $f, g \in \mathcal{F}([0,1] \times [0,1];\mathbb{R})$, onde cada função representa o nível de cinza de cada ponto do quadrado $[0,1] \times [0,1]$. Desta forma cada função representa uma imagem. Agora vamos visualizar os elementos da reta $r(t) = tg + (1-t)f$, onde $r(0.0) = f$ e $r(1.0) = g$. Neste exemplo, conforme mostra a Figura 3.4, a função $f = r(0.0)$ é um quadrado e $g = r(1.0)$ um círculo. Observe a transformação de um quadrado em um círculo, onde representamos os pontos intermediários da reta r: $r(0.2), \ldots, r(0.8)$.*

Em processamento de imagem estas transformações são chamadas de morfismos. Podemos, por exemplo, criar rostos intermediários entre fotos distintos, misturando características. Ver [Anton].

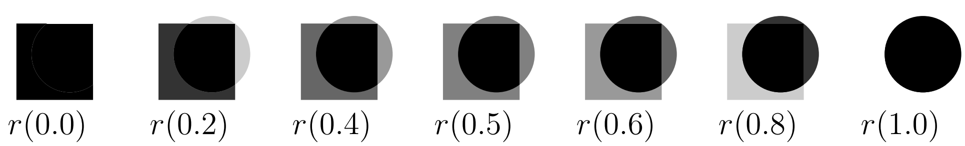


Figura 3.4: Quadrado se transforma em círculo

Definição 36 (subespaço vetorial) *Subconjunto de um espaço vetorial que também é espaço vetorial.*

Definição 37 (subespaço trivial) *Todo espaço vetorial V possui pelo menos dois subespaços vetoriais, chamados de* ***subespaços triviais****, $\{0\}$ e V.*

Exemplo 88 *$V \subset V$ é subespaço (trivial) vetorial de V.*

Exemplo 89 *$\{\mathbf{0}\} \subset V$ é subespaço (trivial) vetorial de V.*

Lema 2 (caracterização de subespaço) *$H \subset V$ é subespaço vetorial se*

- *$\mathbf{0} \in H$,*
- *H é fechado para a soma vetorial, isto é, se dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$, e*
- *H é fechado para a multiplicação por escalar, isto é, se dados $\mathbf{u} \in H, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\mathbf{u} \in H$.*

Prova: Deixamos para o leitor. ∎

Exemplo 90 *Seja $\mathbf{u} \in V$. $H = \{\mathbf{v} \in V | \ \mathbf{v} = \alpha\mathbf{u},\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de V, uma reta paralela a $\mathbf{v}$ passando pela origem.*

De fato, $\mathbf{0} \in H$ e dados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $\mathbf{v}_1 = \alpha_1\mathbf{u},\ \mathbf{v}_2 = \alpha_2\mathbf{u}$. Logo $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{u} \in H$. Dado e $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta\mathbf{v}_1 = (\beta\alpha_1)\mathbf{u}_1 \in H$.

Exemplo 91 *$H = \{(x, y, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ é subespaço. De fato,*

- *$(0, 0, 0) \in H$.*
- *Sejam $(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0) \in H$. Então $(x_1, y_1, 0)+(x_2, y_2, 0) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ 0) \in H$.*
- *Sejam $(x, y, 0) \in H$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\alpha(x, y, 0) = (\alpha x,\ \alpha y,\ 0) \in H$.*

Para se entender um conceito é importante ver contra-exemplos também.

Exemplo 92 *$H = \{(x, y, 1),\ x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$, translação do Exemplo 91 pelo vetor $(0, 0, 1)$, não é subespaço.*

- *$(0, 0, 0) \notin H$.*
- *Sejam $(x_1, y_1, 1), (x_2, y_2, 1) \in H$. Então $(x_1, y_1, 1)+(x_2, y_2, 1) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ 2) \notin H$.*
- *Sejam $(x, y, 1) \in H$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\alpha(x, y, 1) = (\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha) \notin H$, se $\alpha \neq 1$.*

Exemplo 93 *Uma reta r que não passa pela origem não é um subespaço pois $\mathbf{0} \notin r$.*

Exemplo 94 *A parábola $H = \{(x, x^2).\ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ não é subespaço. Embora $(0, 0) \in H$, dado $(1, 1), (2, 4) \in H$, $(1, 1) + (2, 4) = (3, 5) \notin H$.*

Exemplo 95 *Considere H o primeiro quadrante do $\mathbb{R}^2$. Não é subespaço pois dado $\mathbf{v} \in H$, $-\mathbf{v} \notin H$ (porque?).*

Exemplo 96 *Verifique que $H = \{\mathbf{p} \in \mathcal{P}_3 | \ \mathbf{p}(1) = 0\} \subset \mathcal{P}_3$ é subespaço.*

- *$\mathbf{0} \in H$.*
- *Sejam $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in H$. Como $\mathbf{p}(1) = \mathbf{q}(1) = 0$, então $(\mathbf{p} + \mathbf{q})(1) = \mathbf{p}(1) + \mathbf{q}(1) = 0$.*
- *Sejam $\mathbf{p} \in H$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{p}(1) = 0$, então $(\alpha\mathbf{p})(1) = \alpha(\mathbf{p}(1)) = \alpha(0) = 0$.*

O conceito de subespaço afim generaliza a idéia de retas e planos.

Definição 38 (subespaço afim) *Seja V um espaço vetorial e $H \subset V$. Dizemos que H é um **subespaço afim** se H for a translação de um subespaço vetorial $W \subset V$. Mais precisamente, se existe um vetor $h_0 \in V$ e um subespaço vetorial $W \subset V$ tal que $H = h_0 + W = \{h_0 + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in W\}$.*

Exemplo 97 (retas e planos) *São subespaços vetoriais: retas e planos passando pela origem. Não são subespaços vetoriais, mas subespaços afins: retas e planos que não passam pela origem.*

Exemplo 98 (conjunto-solução de sistema linear) *É subespaço afim o conjunto-solução (quando não-vazio) de um sistema linear (veja Teorema 1 da página 39 e Teorema 3 da página 45, que provam com técnicas distintas).*

O conjunto-solução é um subespaço vetorial se, e somente se, o sistema é homogêneo.

Os próximos exemplos apresentam dois subespaços associados a uma matriz que são **muito** importantes para a teoria.

Exemplo 99 *Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$, podemos descrevê-la por meio de vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$, $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$. Definimos dois conjuntos:*

(a) $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto-solução do sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(b) $W = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{b} = A\mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$. Pelas interpretações do produto matriz-vetor (veja página 42), $W = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{v}_i \mid x_i \in \mathbb{R}\right\}$, que é igual ao espaço gerado pelas colunas da matriz, isto é, $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\rangle$.

Ambos são subespaços vetoriais: V pelo Exemplo 98 e W pois é o espaço gerado pelas colunas da matriz.

Definição 39 (núcleo e imagem de matriz) *Dada uma matriz A, chamamos de **núcleo** da matriz A o subespaço-solução do sistema homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e de **imagem** da matriz o subespaço gerado pelas colunas da matriz A.*

Vamos ver alguns subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$.

Observação 25 *Todo polinômio de $\mathcal{P}_n$ pode ser pensado como um elemento (função) de $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ com $I \subset \mathbb{R}$. Neste sentido, $\mathcal{P}_n$ e é subespaço de $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$. Este exemplo é importante pois mais adiante no curso responderemos a seguinte questão: dada uma função qualquer $f \in \mathcal{F}(I;\mathbb{R})$, determine o polinômio $p \in \mathcal{P}_n$ "mais perto possível" (num sentido que será tornado preciso) de f.*

Definição 40 (espaço de funções contínuas e diferenciáveis) *Dado conjunto I (não-vazio) qualquer, denotamos $\mathcal{C}(I;\mathbb{R})$ o **espaço das funções contínuas** de I em $\mathbb{R}$ e por $\mathcal{C}^k(I;\mathbb{R})$ o **espaço das funções com k derivadas contínuas**. Finalmente temos o **espaço das funções com infinitas derivadas contínuas** $\mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R})$. As operações de soma e multiplicação por escalar são iguais as da Definição 35.*

Exemplo 100 *As funções $f(x) = \cos(x), g(x) = \exp(x^2)$ pertencem a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. As funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/(x^2 - 1)$ pertencem ao espaço $\mathcal{C}^\infty((0,1);\mathbb{R})$ mas não pertencem a $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ pois não estão definidas no 0 ou no 1.*

A função $f(x) = |x|$ pertence a $\mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ mas não pertence a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (não possui derivada em 0).

Observação 26 *Todo polinômio é infinitamente diferenciável; se uma função possui k derivadas então ela possui $k-1$ derivadas; toda função diferenciável é contínua; toda função contínua é função. Deste modo temos a sucessão de subespaços vetoriais (cada um é subespaço vetorial de todos os que se seguem):*

$$\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R}) \cdots \subset \mathcal{C}^k(I;\mathbb{R}) \cdots \subset \mathcal{C}^2(I;\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(I;\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(I;\mathbb{R}).$$

Exemplos importantes de espaços vetoriais aparecem na teoria de equações diferenciais.

Exemplo 101 *Considere $V = \{y(x)|\ y''(x) + 9y(x) = 0\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.*

V é subespaço vetorial. De fato, dados $y_1(x), y_2(x) \in V$ (soluções), se tomarmos $y = ay_1 + by_2$, $a, b \in \mathbb{R}$ (constantes), como a derivada da soma é igual a soma das derivadas (linearidade da derivada), calculamos $y'' + 9y = ay_1'' + by_2'' + 9(y_1 + y_2) = ay_1'' + 9y_1 + by_2'' + 9y_2 = 0 + 0 = 0$.

Note que em particular se $y_1(x) = \operatorname{sen}(3x)$ e $y_2 = \cos(3x)$, então $y_1, y_2 \in V$. Combinações destas funções também serão soluções (na realidade TODAS as soluções serão desta forma, mas não provaremos isto). Portanto, $V = \{a \operatorname{sen}(3x) + b\cos(3x);\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 102 *Considere $V = \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})|\ y''(x) + 9y(x) = 9x\}$.*

Observe que se $y_1(x), y_2(x) \in V$, e $y = y_1 + y_2$, $y'' + 9y = 9x + 9x = 18x \neq 9x$. Portanto $y \notin V$. Logo não é subespaço. Na realidade é um subespaço afim, translação do exemplo anterior. Mais precisamente, seja $y_0(x) = x$. Verifique que $y_0 \in V$, isto é, é solução (particular) da equação. Então $V = y_0 + \{a \operatorname{sen}(3x) + b\cos(3x);\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 103 *Considere $V = \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})|\ y'(x) + f(x)y(x) = 0\}$.*

Este conjunto é subespaço vetorial. De fato, dados $y_1(x), y_2(x) \in V$ (soluções), se tomarmos $y = ay_1 + by_2$, $a, b \in \mathbb{R}$ (constantes), como a derivada da soma é igual a soma das derivadas (linearidade da derivada), calculamos $y' + fy = ay_1' + by_2' + f(y_1 + y_2) = ay_1'' + fy_1 + by_2'' + fy_2 = 0 + 0 = 0$. Logo $y \in V$.

Exemplo 104 *Considere $V = \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})|\ y'(x) + y^2(x) = 0\}$.*

Este conjunto não é um subespaço vetorial. De fato se y é solução, $w = ay$, então $w' + w^2 = ay' + a^2y^2 = ay' + ay^2 + ay^2 = 0 + ay^2 \neq 0$. Note que apesar de homogêneo, existe um termo quadrático: V não é tampouco um subespaço afim.

3.2 Combinação Linear e Espaço Gerado

Vamos revisitar conceitos de combinação linear e espaço gerado já vistos em $\mathbb{R}^n$ no capítulo 1. A idéia de um vetor ser múltiplo (ou paralelo) de outro é generalizada pela definição abaixo.

Definição 41 (combinação linear) *Dizemos que* $\mathbf{v}$ *é* ***combinação linear*** *(CL) de* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *se* $\mathbf{v}$ *pode ser expresso como*

$$\mathbf{v} \;=\; \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_p\mathbf{v}_p \;=\; \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\mathbf{v}_i,$$

onde α_i*'s são escalares.*

Exemplo 105 $(2,1,7)$ *é combinação linear de* $(1,2,3)$*,* $(4,5,6)$ *e* $(7,8,7)$*?*

Temos que verificar se existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *tais que* $\alpha(1,2,3) + \beta(4,5,6) + \gamma(7,8,7) = ((\alpha + 4\beta + 7\gamma), (2\alpha + 5\beta + 8\gamma), (3\alpha + 6\beta + 7\gamma)) = (2,1,7)$.

Precisamos resolver o sistema: $\left\{ \begin{array}{rrrcr} 1\alpha & +4\beta & +7\gamma & = & 2 \\ 2\alpha & +5\beta & +8\gamma & = & 1 \\ 3\alpha & +6\beta & +7\gamma & = & 7 \end{array} \right.$.

Escalonando $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -5.5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3.5 \end{array}\right]$.

Como o sistema possui solução (poderiam ser infinitas soluções, mas é única), obtemos que é combinação linear e que $\alpha = -5.5, \beta = 8, \gamma = -3.5$.

Exemplo 106 *Considere os vetores de* $\mathcal{P}$ *(espaço de todos os polinômios)* $\mathbf{u} = x^3 + x$, $\mathbf{v} = x^2 - x$, $\mathbf{w}_1 = 3x^3 - x^2 + 4x$ *e* $\mathbf{w}_2 = x^3 + 2x^2 + 10$. *Determine se* $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ *são CL de* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$.

De fato, $\mathbf{w}_1$ *é CL pois* $\mathbf{w}_1 = 3x^3 - x^2 + 4x = 3(x^3 + x) - (x^2 - x) = 3\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Por outro lado, $\mathbf{w}_2$ *não é combinação linear. Isto pois* $\mathbf{w}_2 = x^3 + 2x^2 + 10 \;= \alpha(x^3 + x) + \beta(x^2 - x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + (\alpha - 1)x$. *Note que para qualquer valor de* α, β*, não obteremos o* 10. *Portanto,* $\mathbf{w}_2 \neq \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exemplo 107 *Considere os elementos de* $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ $\mathbf{u} = \operatorname{sen}^2(x)$ *e* $\mathbf{v} = \cos^2(x)$ *Determine se* $\mathbf{w} = \cos(2x)$ *é combinação linear de* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

É combinação pois, por uma identidade trigonométrica conhecida, $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$.

Definição 42 (combinação linear trivial) *A combinação linear (CL) trivial é obtida colocando* ***todos*** *os coeficientes iguais a zero:*

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_p.$$

Os exemplos anteriores mostram a conexão entre combinações lineares e sistemas. Para saber se um vetor é combinação linear de outros vetores (ou não) precisamos resolver um sistema linear.

Definição 43 (espaço gerado) *O* ***espaço gerado*** *pelo conjunto de vetores* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$*, denotado por* $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle$ *ou ainda (em inglês e em diversos livros) por* $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$*, é o conjunto de todas as combinações lineares de* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$. *Portanto,*

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle \;=\; \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} \;=\; \left\{ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\mathbf{v}_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, p \right\}.$$

Definição 44 (conjunto gerador) *O conjunto* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ ***gera*** *(é* ***conjunto gerador*** *de)* W *se* $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle$.

Convenção 1 *Convencionamos que* $\langle \emptyset \rangle = \{\mathbf{0}\}$, *isto é, o espaço gerado por um conjunto vazio de vetores é o subespaço trivial* $\{\mathbf{0}\}$. *Isto é consistente com a convenção que* $\sum_{i=1}^{0} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.

Lema 3 (conjunto gerado é subespaço) *O conjunto gerado por* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é um subespaço vetorial.*

Prova: De fato, seja $H = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle$. Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} u_i \mathbf{v}_i$, $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{p} w_i \mathbf{v}_i$. Então tomando $u_i = 0$ concluímos que $\mathbf{0} \in H$. A soma $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{p} (u_i + w_i)\mathbf{v}_i \in H$. Finalmente, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} (\alpha u_i)\mathbf{v}_i \in H$. ■

Exemplo 108 $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^2$.

Exemplo 109 *Prove que é subespaço e determine base para* $H = \{p \in \mathcal{P}_2 | \; p(2) = p(3)\}$ *contido em* $\mathcal{P}_2$.

É subespaço pois se dois polinômios possuem mesmo valor em 2 *e* 3, *combinações lineares também possuirão o mesmo valor.*

Seja $p(x) = ax^2 + bx + c$. *Como* $p(2) = p(3)$, $4a + 2b + c = 9a + 3b + c$, *temos a equação* $5a + b = 0$. *São três variáveis e uma equação. Portanto são duas variáveis livres:* $c = r$ *e* $b = s$, *com* $a = -b/5 = -s/5$.

Logo $V = \{-s/5x^2 + sx + r; \; r, s \in \mathbb{R}\}$, *um plano (dimensão* 2*) em* $\mathcal{P}_2$. *Tomando* $r = 0, s = 1$ *obtemos* $\mathbf{u} = -x^2/5 + x$, $r = 1, s = 0$ *obtemos* $\mathbf{v} = 1$. *Logo* $V = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Exemplo 110 *Determine uma base para* $H = \{p \in \mathcal{P}_3 | \; p(1) = 0\} \subset \mathcal{P}_3$.

Seja $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. *Como* $p(1) = 0$, $a + b + c + d = 0$. *São quatro variáveis e uma equação. Portanto são três variáveis livres:* $d = r, c = s, b = t$, *com* $a = -r - s - t$. *Logo* $H = \{(-r - s - t)x^3 + tx^2 + sx + r\}$. *Colocando* r, s, t *com* 0 *e* 1 *alternadamente, obtemos* $\mathbf{u} = -x^3 + 1, \mathbf{v} = -x^3 + x, \mathbf{w} = -x^3 + x^2$. *Portanto* $H = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

Outra parametrização possível é tomar como variáveis livres: $a = r, b = s, c = t$, *com* $d = -r - s - t$. *Colocando* r, s, t *com* 0 *e* 1 *alternadamente, obtemos* $\mathbf{u} = x^3 - 1, \mathbf{v} = x^2 - 1, \mathbf{w} = x - 1$. *Portanto* $H = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

Exemplo 111 *Seja* $W = \{\mathbf{p} \in \mathcal{P}_n \mid \mathbf{p}(1) = 0\}$. *Prove que*

$$W = \left\langle (x-1), \; x(x-1), \; \ldots, \; x^{n-1}(x-1) \right\rangle .$$

De fato, dado $p \in W$, *como* $p(1) = 0$ *(*1 *é raiz), podemos dividir o polinômio por* $(x - 1)$, *obtendo que* $\mathbf{p}(x) = (x - 1) \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(x^i (x - 1) \right)$.

Exemplo 112 *Como* $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, *temos que* $\cos(2x) \in \langle 1, \cos(x), \cos^2(x)\rangle$.

Exemplo 113 *Utilizando a identidade do Exemplo 112, que* $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ *e* $\cos(3x) = \cos(x)\cos(2x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2x)$, *obtemos que* $\cos(3x) = 2\cos^3(x) + 2\cos^2(x) - \cos(x) - 2$.

Concluímos que $\cos(3x) \in \langle 1, \cos(x), \cos^2(x), \cos^3(x)\rangle$.

Generalizando concluiremos que $\cos(nx) \in \langle 1, \cos(x), \ldots, \cos^n(x)\rangle$.

O próximo exemplo é mais sofisticado. Este tipo de combinação linear é utilizado nos chamados métodos dos elementos finitos, muito importante no cálculo de estruturas (engenharia civil, naval, mecânica etc.).

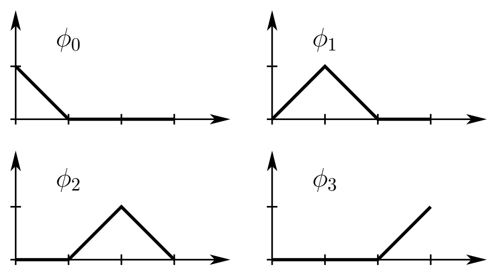
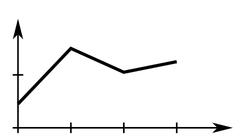


Figura 3.5: Elementos finitos

Exemplo 114 *Considere as funções* $\phi_0, \ldots, \phi_3$ *mostradas na Figura 3.5. Observe que elas são caracterizadas como funções lineares por partes (entre dois inteiros quaisquer elas são lineares, isto é, o gráfico é um segmento de reta) e que* $\phi_i(j) = \delta_{ij}$, *onde* δ_{ij} *é chamado de delta de Kroenecker, definido como* 1 *se* $i = j$ *e* 0 *caso contrário. Assim* $\phi_0(0) = 1$ *(*$i = j$*) e* $\phi_0(1) = \phi_0(2) = 0$. *Do mesmo modo,* $\phi_1(1) = 1$ *(*$i = j$*) e* $\phi_1(0) = \phi_1(2) = 0$.

Agora podemos fazer combinações lineares destas funções. Poderemos obter uma função linear por partes qualquer pois se quisermos que f *assuma valores* $f(j) = a_j$, *com* $j = 0, \ldots, 3$, *tome* $f = \sum_{i=0}^{3} a_i\phi_i$. *Deste modo* $f(0) = \sum_{i=0}^{3} a_i\phi_i(0) = a_0\phi_0(0) = a_0 \cdot 1 = a_0$ *(as outras funções* $\phi_1(0) = \phi_2(0) = \phi_3(0) = 0$*), e de forma análoga,* $f(1) = \sum_{i=0}^{3} a_i\phi_i(1) = a_1$, *e também* $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$. *Desta forma CL das* ϕ_i*'s podem gerar qualquer função linear por parte:*

$\langle \phi_0, \ldots, \phi_3\rangle = \Big\{$ funções tipo  $\Big\}$.

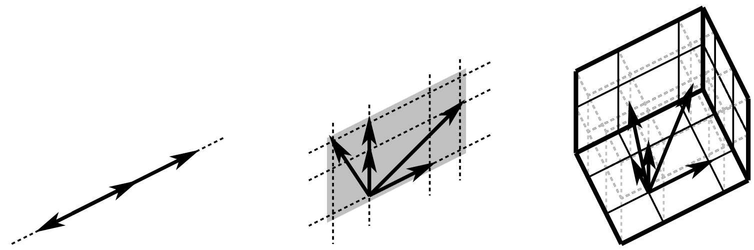
3.3 Dependência e Independência Linear

Vamos revisitar conceitos de LI e LD, já vistos em $\mathbb{R}^n$ e provar um lema que caracteriza conjuntos LDs.

Vamos iniciar motivando com dois exemplos o conceito de (in)dependência linear.

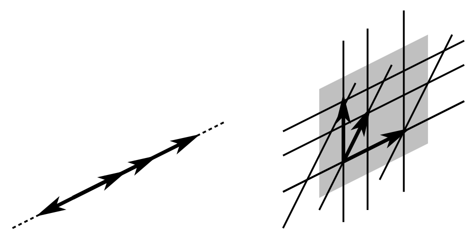
Exemplo 115 *Vamos ilustrar três casos típicos de conjuntos gerados por* $1, 2$ *e* 3 *vetores, que geram, respectivamente, uma reta, um plano e um espaço tridimensional:*

1 vetor *2 vetores* *3 vetores*



Exemplo 116 *Pode ocorrer, no entanto, de um dos vetores ser "redundante" (desnecessário), e o espaço gerado por* 2 *vetores ser uma reta ou por* 3 *vetores ser um plano:*

2 vetores *3 vetores*



Falamos que um vetor é "redundante" se ele é CL dos demais, isto é $\mathbf{v}_k$ é redundante num conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ se $\mathbf{v}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i$. Neste caso podemos escrever que

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} - 1\mathbf{v}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \ldots + \alpha_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

Portanto, $\mathbf{0}$ pode ser expresso como CL não-trivial dos $\mathbf{v}_i$'s.

A questão é: Vale a volta, isto é, se $\mathbf{0}$ é CL não trivial então um dos vetores é redundante? A resposta é sim. Suponha que $\mathbf{0}$ pode ser expresso como CL não-trivial dos $\mathbf{v}_i$'s,

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \quad \text{com } \alpha_k \neq 0.$$

Dividindo-se por $(-\alpha_k)$ obtemos que

$$-\tfrac{\alpha_1}{\alpha_k}\mathbf{v}_1 - \ldots - \tfrac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\mathbf{v}_{k-1} - 1\mathbf{v}_k - \tfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\mathbf{v}_{k+1} - \ldots - \tfrac{\alpha_p}{\alpha_k}\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

e portanto

$$\mathbf{v}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{p} -\frac{\alpha_i}{\alpha_k}\mathbf{v}_i.$$

Definição 45 (dependência linear) *Um conjunto de vetores é linearmente dependente (LD)*

- *se existe um vetor que é CL dos demais ou, equivalentemente,*
- *se o vetor nulo pode ser expresso como CL não-trivial destes vetores.*

Definição 46 (independência linear) *Um conjunto de vetores é linearmente independente (LI)*

- *se ele não é LD ou, equivalentemente,*
- *se a única forma de expressar o vetor nulo como CL destes vetores é com uma CL trivial.*

Convenção 2 *O conjunto vazio é dito LI.*

Lema 4 (caracterização dos conjuntos LD) *Os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ são LD se, e só se, existe um vetor que é combinação linear dos anteriores, $\mathbf{v}_k = \sum_{i<k} \alpha_i \mathbf{v}_i$.*

Prova: **Se:** trivial.

Só se: seja $k \geq 1$ mínimo tal que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ são LD. Seja $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v} i = \mathbf{0}$ CL não-trivial. Se α_k fosse zero, $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ seria CL não-trivial, contrariando a minimalidade de k. Assim, $\alpha_k \neq 0$ e $\mathbf{v}_k = -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \mathbf{v}_i$. ■

Exemplo 117 $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\} = \{(1,2,3),\ (2,3,4),\ (3,4,5)\}$ *é LD.*
De fato, $\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = 0$.

Exemplo 118 *Considere* $\mathbf{v}_1 = \operatorname{sen}(2x)$ *e* $\mathbf{v}_2 = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$. *O conjunto* $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\}$ *é LD.*
De fato, $\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, *isto é,* $\operatorname{sen}(2x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 119 *Considere* $\mathbf{v}_1 = \operatorname{sen}^2(x), \mathbf{v}_1 = \cos^2(x)$ *e* $\mathbf{v}_2 = 1$. *O conjunto* $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$ *é LD.*
De fato, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, *isto é,* $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) + -1 = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 120 $\{1, t, \ldots, t^n\}$ *é LI.*
De fato, $a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *se, e somente se,* $a_i = 0$ *para* $i = 1, \ldots, n$.

Exemplo 121 *Retomando as funções da Figura 3.5 da página 62. O conjunto* $\{\phi_0, \ldots, \phi_3\}$ *é LI.*
De fato, suponha que $f(t) = a_0\phi_0(t) + \cdots a_3\phi_3(t) = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Portanto* $f(0) = 0$. *Como* $f(0) = a_0\phi_0(0) + \cdots a_3\phi_3(0) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + \cdots + a_3 \cdot 0 = a_0 = 0$, *concluímos que* $a_0 = 0$. *De forma análoga,* $f(1) = a_0\phi_0(1) + a_1\phi_1(1) + \cdots a_3\phi_3(1) = a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1 + \cdots + a_3 \cdot 0 = a_1 = 0$, *concluímos que* $a_1 = 0$. *Procedendo desta forma, concluiremos que* $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, *e que a única CL de zero é trivial.*

Exemplo 122 $(1,2,3)$, $(4,5,6)$ *e* $(7,8,7)$ *é LI?*
Temos que verificar se existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *não-nulos tais que* $\alpha(1,2,3) + \beta(4,5,6) + \gamma(7,8,7) = ((\alpha + 4\beta + 7\gamma), (2\alpha + 5\beta + 8\gamma), (3\alpha + 6\beta + 7\gamma)) = (0,0,0)$.

Existe solução não-trivial para o sistema: $\begin{cases} 1\alpha & +4\beta & +7\gamma & = & 0 \\ 2\alpha & +5\beta & +8\gamma & = & 0 \\ 3\alpha & +6\beta & +7\gamma & = & 0 \end{cases}$?

Escalonando parcialmente, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$.

Concluímos que o sistema possui somente solução trivial. Portanto o conjunto é LI.

Exemplo 123 $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ *e* $(7, 8, 9)$ *é LI?*

Temos que verificar se existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *não-nulos tais que* $\alpha(1, 2, 3) + \beta(4, 5, 6) + \gamma(7, 8, 9) = ((\alpha + 4\beta + 7\gamma), (2\alpha + 5\beta + 8\gamma), (3\alpha + 6\beta + 9\gamma)) = (0, 0, 0)$.

Precisamos resolver o sistema: $\begin{cases} 1\alpha & +4\beta & +7\gamma & = & 0 \\ 2\alpha & +5\beta & +8\gamma & = & 0 \\ 3\alpha & +6\beta & +9\gamma & = & 0 \end{cases}$.

Escalonando, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Concluímos que o sistema possui infinitas soluções. Portanto existe solução não-trivial do sistema e o conjunto é LD.

Observação 27 *Para determinar se é LI ou LD basta escalonar matriz com vetores em cada* <u>*coluna*</u> *(veja os dois exemplos anteriores novamente).* ***Não*** *precisa ser forma totalmente escalonada. Isto segue do Corolário 1 da página 40, pois precisamos saber somente se o sistema homogêneo possui solução única ou infinitas soluções,* ***não*** *precisamos calcular a solução.*
Surpreendentemente (ver Lema 6 da página 66), também podemos determinar se é LI ou LD escalonando matriz com vetores em cada <u>*linha*</u>*, que de forma geral é um método mais eficiente pois linhas (vetores neste caso) será menor que o número de colunas (dimensão do espaço ambiente).*

3.4 Base e Coordenadas

Vamos revisitar conceitos de base e coordenadas, já vistos em $\mathbb{R}^n$ no Capítulo 1.

Qualquer vetor do $\mathbb{R}^n$ pode ser expresso como **combinação linear única** dos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ (base canônica) dado um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e_i} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ se, e somente se, $\alpha_i = v_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Definição 47 (base) *Um conjunto ordenado S é* ***base*** *de V se todo vetor de V se expressa de forma* <u>*única*</u> *como combinação linear dos elementos de S.*

Exemplo 124 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ *é base de* $\mathbb{R}^2$ *pois dado* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ *de forma única.*

Exemplo 125 $\{(0, -1), (1, 0), (0, 1)\}$ *não é base de* $\mathbb{R}^2$ *pois dado* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) = a(1, 0) + (b + \lambda)(0, 1) + \lambda(0, -1)$ *para qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Ou seja, todo vetor do* $\mathbb{R}^2$ *pode ser expresso porém de diversas formas distintas. Por exemplo* $(3, 2) = 3(1, 0) + 2(0, 1) + 0(0, -1) = 3(1, 0) + 1(0, 1) - 1(0, -1)$.

Exemplo 126 *O conjunto*
$\beta = \{(1, 1, \dots, 1),\ (0, 1, \dots, 1),\ \dots,\ (0, \dots, 0, 1)\} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ *é base.*

De fato, dado um vetor $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} = \sum \alpha_i \mathbf{b_i} = (\alpha_1,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\ \dots)$ *se, e somente se,*

$$\begin{cases} \alpha_1 = v_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = v_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = v_3 \\ \vdots \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = v_1 \\ \alpha_2 = v_2 - \alpha_1 = v_2 - v_1 \\ \alpha_3 = v_3 - (\alpha_1 + \alpha_2) = v_3 - v_2 \\ \vdots \end{cases}.$$

Ver outros exemplos em $\mathbb{R}^n$ na Seção 1.3 da página 15.

Exemplo 127 $\beta = \{1,\ t,\ t^2\}$ *é base de* $\mathcal{P}_2$ *pois dado* $p \in \mathcal{P}_2$, $p(t) = at^2 + bt + c1$, *CL dos vetores da base.*

Exemplo 128 $\beta = \{1,\ t,\ t^2,\ \dots,\ t^n\} \subset \mathcal{P}_n$ ***é base.***

É evidente que todo vetor do espaço pode ser expresso como CL destes vetores.

Unicidade: sabemos que $\sum_{i=0}^{n} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *se, e somente se,* $a_i = b_i,\ \ i = 0, 1, \dots, n.$

Lema 5 (caracterização de base) *O conjunto* β *é base de* V *se, e só se:*
(a) β *gera* V*;*
(b) β *é LI.*

Prova: **Se:** Seja β base de V. Da definição de base, segue que β é gerador. Da unicidade de representação de $\mathbf{0}$, segue que β é LI.

Só se: Seja β LI e gerador. Todo vetor pode ser gerado como CL dos vetores de β. Suponha $\mathbf{v} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \mathbf{v}_i$. Então, $\sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - \xi_i)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$. Como β é LI, $\alpha_i - \xi_i = 0$ para $i = 0, \dots, n$. Portanto $\alpha_i = \xi_i$ para $i = 0, \dots, n$ e a representação é única. ∎

Observação 28 *Por este Lema, para que um conjunto seja base ele deve ser:*
(a) grande o suficiente para gerar todos os vetores;
(b) pequeno o suficiente para ser LI.

Dado um espaço gerado por uma lista de vetores do $\mathbb{R}^n$ como extrair uma base?

Como operações elementares não alteram o espaço gerado, isto pode ser feito escalonando uma matriz que tem estes vetores como <u>linhas</u>.

Lema 6 (escalonamento e espaço gerado) *Seja* $A = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \cdots\cdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_m \rightarrow \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{v}_1 \rightarrow \\ \cdots\cdots \\ \leftarrow \mathbf{v}_k \rightarrow \end{bmatrix}$ *matrizes equivalentes, isto é,* B *é obtida através de operações elementares aplicadas em* A*. Então os espaços gerados* $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m \rangle$ *e* $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ *são iguais.*

Além disso, se B *estiver escalonada (não precisa ser totalmente escalonada) então* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ *é LI.*

Prova: Basta verificar que cada uma das operações elementares preserva o espaço gerado:

(a) Trocar a ordem das linhas claramente não altera;

(b) Multiplicar uma linha por um escalar não-nulo. Vamos provar quando o espaço é gerado por um único vetor. Suponha $k \neq 0$, vamos mostrar que $\langle \mathbf{v} \rangle = \langle k\mathbf{v} \rangle$. De fato, seja $\mathbf{w} = a\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v} \rangle$. Então $\mathbf{w} = a/k(k\mathbf{v}) \in \langle k\mathbf{v} \rangle$. Por outro lado, se $\mathbf{w} = b\mathbf{v} \in \langle k\mathbf{v} \rangle$. Então $\mathbf{w} = bk(\mathbf{v}) \in \langle \mathbf{v} \rangle$.

(c) Substituir linha por sua soma com múltiplo de outra. Podemos verificar no caso de espaço gerado por dois vetores: Vamos provar que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} + a\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$. Seja $\mathbf{w} = c\mathbf{u} + d\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Então $\mathbf{w} = c(\mathbf{u} + a\mathbf{v}) + (d - ac)\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u} + a\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$. Por outro lado se $\mathbf{w} = c(\mathbf{u} + a\mathbf{v}) + d\mathbf{v}$, então, $\mathbf{w} = c\mathbf{u} + (ac + d)\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u} + a\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

(d) Descartar linhas só de zeros preserva pois $\mathbf{0}$ é sempre um vetor LI.

Se a matriz B estiver escalonada, então qualquer combinação linear de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ resultará num sistema tipo triangular inferior (similar a forma escalonada, que é tipo triangular superior), cuja única solução é a trivial. ∎

Exemplo 129 *Determine uma base para o espaço gerado por*

$$W = \langle (1, 2, 1, -1), (2, 1, 0, 2), (3, 3, 1, 1), (4, 5, 2, 0 \rangle .$$

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. *Escalonando obtemos* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -4/3 \end{bmatrix}$ *(duas linhas foram descartados por conter somente zeros). Assim* $W = \langle (1, 2, 1, -1), (0, 1, 2/3, -4/3) \rangle$. *É claro que formam base pois a matriz está escalonada.*

Definição 48 (coordenadas) *As* ***coordenadas*** *do vetor* $\mathbf{v} \in V$ *na base* $\beta = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *de* V, *são os coeficientes* α_i*'s (únicos pela Definição 47 de base) usados para combinar linearmente os vetores* $\mathbf{b}_i$*'s de forma a gerar* $\mathbf{v}$, *isto é,* $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i$. *Denotamos por*

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Desta forma, as coordenadas são escritas como uma matriz de uma coluna.

Note que $\begin{array}{rccc} [\,\cdot\,]_\beta : & V & \to & \mathbb{R}^n \\ & \mathbf{v} & \mapsto & [\mathbf{v}]_\beta \end{array}$ é uma função que associa a cada vetor suas coordenadas, que são únicas pela Definição 47 de base.

Veja exemplos básicos em $\mathbb{R}^n$ na Seção 1.3 da página 15.

Exemplo 130 *Considere a base* β *do Exemplo 126.*

É fácil ver que um vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *pode ser escrito como*

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + (v_2 - v_1)\mathbf{b}_2 + \cdots + (v_n - v_{n-1})\mathbf{b}_n.$$

Desta forma as coordenadas de $\mathbf{v}$ *com relação à base* β *é:*

$$[\mathbf{v}]_\beta = \Big[(v_1, v_2, \ldots, v_n)\Big]_\beta = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - v_1 \\ \vdots \\ v_n - v_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Os dois exemplo a seguir mostram como determinar as coordenadas de um vetor numa base qualquer dadas suas coordenadas na base canônica e vice-versa. Note que um caso é direto, o outro envolve resolver um sistema linear. Juntando os dois exemplos podemos passar de uma base α qualquer para outra β, bastando passar pela base ε.

Como determinar coordenadas de vetor na base canônica dado suas coordenadas em uma outra base?

Exemplo 131 $\beta = \{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (2,0,-1)\}$ *é base de* $\mathbb{R}^3$*. Determine* $\mathbf{v}$ *sabendo que* $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Efetuando, $\mathbf{v} = 2(1,1,1) + 3(1,0,1) - (2,0,-1) = (3,2,6)$

Como determinar coordenadas numa base dada sabendo-se suas coordenadas na base canônica?

Resolvendo um sistema linear, conforme próximo exemplo.

Exemplo 132 $\beta = \{(1,1,1),\ \ (1,0,1),\ \ (2,0,-1)\}$ *é base de* $\mathbb{R}^3$*. Determine as coordenadas de* $(4,3,7)$ *na base* β*, isto é, determine* $[(4,3,7)]_\beta$*.*

Precisamos determinar $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ *tais que* $a_1(1,1,1) + a_2(1,0,1) + a_3(2,0,-1) = (4,3,7)$*. Expandindo, obtemos que* $(a_1 + a_2 + 2a_3,\ \ a_1,\ \ a_1 + a_2 - a_3) = (4,3,7)$*, o sistema linear:* $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 1a_1 & + & 1a_2 & + & 2a_3 & = & 4 \\ 1a_1 & + & 0a_2 & + & 0a_3 & = & 3 \\ 1a_1 & + & 1a_2 & + & (-1)a_3 & = & 7 \end{array}\right.$.

Escalonando obtemos $\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$.

Portanto a solução é única com $(a_1, a_2, a_3) = (3,3,-1)$*. Portanto,* $[(4,3,7)]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 133 *Dado* $\beta = \{1 + x, 1 - x, x^2\}$*,* $\mathbf{u} = 5$*,* $\mathbf{v} = 6 + 5x^2$ *e* $\mathbf{w} = 8x - 2$ *determine* $[\mathbf{u}]_\beta$*,* $[\mathbf{v}]_\beta$*,* $[\mathbf{w}]_\beta$*.*

Como $5 = 5/2(1+x) + 5/2(1-x)$*,* $[\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Como $6 + 5x^2 = 3(1+x) + 3(1-x) + 5x^2$*,* $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Queremos $8x - 2 = \alpha(1+x) + \beta(1-x) = \alpha + \beta + (\alpha - \beta)x$*. Temos que resolver o sistema* $\left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & 8 \\ \alpha - \beta & = & 2 \end{array}\right.$*. Resolvendo obtemos* $\alpha = 3, \beta = 5$*. Logo* $[\mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 134 *Dados* $\beta = \{\text{sen}^2(x), \cos^2(x)\}$, $\gamma = \{1, \text{sen}^2(x)\}$, $\mathbf{u} = \cos^2(x)$, $\mathbf{v} = \cos(2x)$ *e* $\mathbf{w} = 1$, *determine* $[\mathbf{u}]_\beta$, $[\mathbf{v}]_\beta$, $[\mathbf{w}]_\beta$, $[\mathbf{u}]_\gamma$, $[\mathbf{v}]_\gamma$, $[\mathbf{w}]_\gamma$.

Como $\cos(2x) = \cos^2(x) - \text{sen}^2(x) = 1 - 2\,\text{sen}^2(x)$, $[\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{u}]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{v}]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{w}]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

O próximo lema pode ser omitido numa primeira leitura. Ele diz que qualquer espaço vetorial com base formada por um número finito de vetores é essencialmente igual (mais precisamente, pode ser representado por) a $\mathbb{R}^n$. Em linguagem matemática mais precisa, dizemos que V e $\mathbb{R}^n$ são espaços vetoriais isomorfos.

Lema 7 (mapeamento vetor → coordenadas é linear) *Considere* V *espaço vetorial com base* β *com* n *vetores. O mapeamento* $\begin{array}{rcl} [\,\cdot\,]_\beta : & V & \to & \mathbb{R}^n \\ & \mathbf{v} & \mapsto & [\mathbf{v}]_\beta \end{array}$ *é*

(a) linear, isto é, preserva combinações lineares

$$[\alpha\mathbf{u} + \gamma\mathbf{v}]_\beta = \alpha[\mathbf{u}]_\beta + \gamma[\mathbf{v}]_\beta \quad \forall \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V;$$

(b) injetivo, isto é, se $[\mathbf{v}]_\beta = [\mathbf{w}]_\beta$ *então* $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

Observação 29 *Preservar combinações lineares é o mesmo que preservar soma vetorial e multiplicação por escalar:*

$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_\beta = [\mathbf{u}]_\beta + [\mathbf{v}]_\beta \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$[\alpha\mathbf{u}]_\beta = \alpha[\mathbf{u}]_\beta \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

Prova: (a) Seja $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base de V, $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$, $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{v}_i$, $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \gamma_i)\mathbf{v}_i$. É imediato que $[\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, $[\mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$, $[\mathbf{u} + \mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \gamma_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = [\mathbf{u}]_\beta + [\mathbf{w}]_\beta$. Analogamente, $[\xi\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \xi\alpha_1 \\ \vdots \\ \xi\alpha_n \end{bmatrix} = \xi[\mathbf{u}]_\beta$.

(b) segue da unicidade da representação de um vetor como CL de vetores de uma base.

■

3.5 Dimensão

Nesta seção definimos conceito de dimensão como o número de vetores em uma base. Para isto temos que provar que este número será sempre o mesmo independente da base. Além disso uma seqüência de resultados provará que se o espaço é de dimensão finita então qualquer conjunto LI pode ser estendido para formar uma base.

Vamos começar distinguindo os espaços de dimensão finita e infinita.

Definição 49 (dimensão finita e infinita) *Um espaço que admite base finita é de* ***dimensão finita****. Um espaço que não admite, é dito de* ***dimensão infinita****.*

Exemplo 135 *$\mathbb{R}^n$ é de dimensão finita, pois $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é base.*

Exemplo 136 *$\mathcal{P}_n$ é de dimensão finita, pois $\varepsilon = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é base.*

Exemplo 137 *$\mathcal{P}$ é de dimensão infinita.*

De fato, dado $\beta = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\} \subset \mathcal{P}$ conjunto finito qualquer, defina $N = \max\limits_{\mathbf{p}\in\beta} \operatorname{grau}(\mathbf{p})$ e $\mathbf{q}(x) = x^{N+1}$. Então $\mathbf{q} \in \mathcal{P}$, mas $\mathbf{q} \notin \langle\beta\rangle$ pois $\operatorname{grau}(\mathbf{q}) = N + 1 > N \geq \operatorname{grau}(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{p} \in \beta$. Logo, β não é base.

Exemplo 138 *Os espaços $\mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^k(I;\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^2(I;\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$, $\mathcal{C}(I;\mathbb{R})$ e $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ são de dimensão infinita.*

De fato todos os espaços acima contém o espaço $\mathcal{P}$ (vide Observação 26 da página 59).

O próximo lema é fundamental para a definição de dimensão. A demonstração pode ser omitida numa primeira leitura.

Lema 8 (conjunto gerador e LI) *Sejam $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}, \gamma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset H$. Se β é gerador de H e γ é LI, então $m \geq n$.*

Prova: Sejam a_{ij} tais que $\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{u}_i$. Defina $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$.

Suponha, por absurdo, que $n > m$. Portanto o número de variáveis (n) é maior que o número de equações (m) no sistema homogêneo. Neste caso, existe $\mathbf{x} \neq 0$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Logo $\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$, o que implica que $\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0$ para todo i. Segue que $\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}\right)\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$. Portanto $\sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{u}_i\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$.

Concluímos que γ não é LI! Como isto é absurdo, concluímos que $n \leq m$. ■

Corolário 2 *Toda base de um subespaço vetorial de dimensão finita tem o mesmo número de elementos.*

Prova: Sejam $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ e $\gamma = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ bases. Pelo Lema 8, como β é gerador e γ é LI, então $m \geq n$. Trocando os papéis de β e γ, novamente pelo Lema 8, como γ é gerador e β é LI, então $n \geq m$. Como $m \geq n$ e $n \geq m$, concluímos que $m = n$. ■

Este Corolário justifica a próxima definição.

Definição 50 (dimensão) *A **dimensão** de um (sub)espaço vetorial de dimensão finita é o número de vetores em (qualquer) uma de suas bases.*

O próximo lema nos diz que podemos eliminar vetores que são CL de outros de um conjunto sem modificar o espaço gerado.

Lema 9 (eliminando vetores redundantes) *Dado um conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ LD, seja $\mathbf{v}_k$ CL dos demais. Então $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\rangle = \langle S\rangle$.*

Prova: Temos que $\mathbf{v}_k = \sum_{i\neq k} \alpha_i\mathbf{v}_i$. Dado $\mathbf{w} \in \langle S\rangle$, temos $\mathbf{w} = \sum_{i} \gamma_i\mathbf{v}_i = \sum_{i\neq k}\gamma_i\mathbf{v}_i + \gamma_k\mathbf{v}_k = \sum_{i\neq k}\gamma_i\mathbf{v}_i + \gamma_k\sum_{i\neq k}\alpha_i\mathbf{v}_i = \sum_{i\neq k}(\gamma_i + \gamma_k\alpha_i)\mathbf{v}_i$. Logo $\mathbf{w} = \sum_{i\neq k}(\gamma_i + \gamma_k\alpha_i)\mathbf{v}_i$ e portanto, $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\rangle$. ■

Corolário 3 *Todo conjunto gerador contém uma base.*

Prova: Se o conjunto é LI, nada a fazer. Se é LD, há um vetor que é combinação linear dos demais. Descarte este vetor; o subconjunto obtido ainda é gerador (pelo lema anterior). Repita o procedimento até que o subconjunto obtido seja LI (assumimos tacitamente que o conjunto inicial é finito). ∎

Finalmente, o resultado abaixo garante que, dado um conjunto de vetores LI em um espaço vetorial de dimensão finita, este pode ser estendido a uma base.

Lema 10 (estendendo conjunto LI em base) *Todo conjunto LI em um espaço de dimensão finita pode ser estendido a uma base. Ou seja, se* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é LI, existem* $\mathbf{v}_{p+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ *tais que* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *é base.*

Prova: Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ LI e $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ base. Note que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é gerador. Aplique o resultado anterior, notando que, enquanto o subconjunto é LD, existe um vetor que é combinação linear dos **anteriores**. Este não pode ser um dos $\mathbf{v}_i$'s. Portanto, os $\mathbf{v}_i$'s não são descartados no processo. ∎

Corolário 4 *Em um espaço de dimensão* n*:*

- *um conjunto com mais de* n *vetores não é LI;*
- *um conjunto com menos de* n *vetores não é gerador; e*
- *um conjunto de* n *vetores é gerador se e só se é LI.*

3.6 Exercícios de Espaços Vetoriais

3.6.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1. Determine se são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^n$:

(a) o conjunto-solução de um sistema linear homogêneo;

(b) o conjunto-solução de um sistema linear cujo lado direito tem como entradas inteiros maiores do que 1;

(c) plano passando pela origem no espaço;

(d) reta que não passa pela origem no plano;

(e) parábola que passa pela origem no plano;

(f) primeiro quadrante do plano;

Exercício 2.

(a) Se o espaço gerado por $\mathbf{u}$ é igual ao espaço gerado por $\mathbf{v}$ então necessariamente ________($\mathbf{u} = \mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ *é múltiplo de* $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ *é perpendicular a* $\mathbf{v}$, *nenhuma das alternativas*)

(b) Se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ então necessariamente ________($\mathbf{v} = \mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ *é múltiplo de* $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ *é perpendicular a* $\mathbf{w}$, *nenhuma das alternativas*)

(c) Sabendo que o conjunto $\{\mathbf{w}\}$ é LI podemos afirmar que $\mathbf{w}$ é ________(*não nulo, nulo*).

Exercício 3. Escolha uma opção. Dizer que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é LI é o mesmo que dizer que:

(A) se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, então $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots \lambda_n \mathbf{v}_n = 0$;

(B) $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots \lambda_n \mathbf{v}_n = 0$ para todo $\lambda_i \in \mathbb{R}$;

(C) se $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots \lambda_n \mathbf{v}_n = 0$, então $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$;

---

[0]Versão 16.jul.2008 9h

(D) $\mathbf{v}_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$;
(E) $\mathbf{v}_i$ não é múltiplo de $\mathbf{v}_k$ se $i \neq k$.

Exercício 4. O vetor $(-2, 1, 5, -3) \in \mathbb{R}^4$ pode ser representado como o(a) __________(*domínio, imagem, gráfico, zero*) da função $f \in \mathcal{F}(\{1, 2, 3, 4\}; \mathbb{R})$ definida por $f(1) =$ ___, $f(2) =$ ___, $f(3) =$ ___, $f(4) =$ ___.

Exercício 5. O elemento neutro para soma do espaço vetorial das funções reais é o(a) __________________ (*número zero, função identidade, função identicamente nula, conjunto vazio*).

Exercício 6. Determine se são subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$:
(a) conjunto das funções contínuas;
(b) $\{f(x) = a \operatorname{sen}(x) + 2,\ a \in \mathbb{R}\}$;
(c) $\{f(x) = ax^2 + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$;

Exercício 7. Considere $W = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$. Obtemos base de W __________(*escalonando, multiplicando, zerando, somando*) uma matriz que tem estes vetores como __________(*linhas, colunas*).

Exercício 8. Seja W o subespaço-solução de um sistema linear homogêneo com 4 equações:
(a) eliminando uma equação, $\dim(W)$ ____________(*pode aumentar, pode diminuir, permanece a mesma*);
(b) acrescentando uma equação (com lado direito igual a zero), $\dim(W)$ ____________(*pode aumentar, pode diminuir, permanece a mesma*);

Exercício 9. Sejam $V, W \subset \mathbb{R}^3$ subespaços vetoriais, com $\dim(V) = 2$ e W uma reta.
(a) $\dim(W) =$ ___(*0, 1, 2, 3*); (b) V é um(a) _______(*ponto, reta, plano, sistema*);

Exercício 10. Pode ser base de $\mathbb{R}^5$ um conjunto de:
(a) 4 vetores LIs? (b) 5 vetores LDs? (c) 6 vetores?

Exercício 11. Seja $\beta \subset \mathbb{R}^7$ LI.
(a) β possui _______(*no máximo, exatamente, no mínimo*) 7 vetores;
(b) retirando de β um vetor, obteremos um conjunto que _______(*é LI, é LD, pode ser LD*);
(c) acrescentando a β um vetor $\mathbf{w} \notin \beta$, obteremos um conjunto que _______(*é LI, é LD, pode ser LD*);
(d) o vetor $\mathbf{0}$ _____(*pertence, não pertence, pode pertencer*) a β.

Exercício 12. Seja $\beta \subset \mathbb{R}^7$ gerador.
(a) β possui _______(*no máximo, exatamente, no mínimo*) 7 vetores;
(b) retirando de β um vetor, obteremos um conjunto que _______(*é gerador, não é gerador, pode ser gerador*);
(c) acrescentando a β um vetor $\mathbf{w} \notin \beta$, obteremos um conjunto que _______(*é gerador, não é gerador, pode ser gerador*);
(d) o vetor $\mathbf{0}$ _____(*pertence, não pertence, pode pertencer*) a β.

Exercício 13. Se $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ então:
(a) $\mathbf{0}$ ___$(\in, \notin)$ W; (b) $6\mathbf{v}_2 - 5\mathbf{v}_3$ ___$(\in, \notin)$ W; (c) $\dim W$ ___$(=; <; \leq; >; \geq)$ n.

3.6.2 Problemas

Subespaços do $\mathbb{R}^n$

Problema 1. Determine se é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$:
(a) $\{(a, b, c) |\ a, c \in \mathbb{R}, b = a + c + 1\}$;
(b) $\{(a, 1, 1) |\ a \in \mathbb{R}\}$;
(c) $\{(a, b, c) |\ a, b \in \mathbb{R}, 2a + 3b = 5c\}$;

Problema 2. (Shilov p.56 #1,#2) Determine se formam um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$ subconjunto de todos vetores:

(a) com exceção daqueles paralelos a uma reta dada;

(b) cujas coordenadas são maiores ou iguais a zero.

Problema 3. (Shilov p.57 #9) Considere V e W planos distintos contendo a origem em $\mathbb{R}^3$. Determine:

(a) $V \cap W$; (b) $V + W$.

Problema 4. Determine se:

(a) $(1,0,6) \in \langle (1,0,1),(1,2,1) \rangle$;

(b) $(1,-2,1) \in \langle (1,0,1),(1,2,1) \rangle$;

(c) $\{(0,0,2,2),(3,3,0,0),(1,1,0,-1)\}$ é LI;

Problema 5.

(a) $\{(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI?

(b) $\{(1,0,-2)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI?

(c) Caracterize, de forma geral, os conjuntos de <u>um único elemento</u> que são LI.

Problema 6.

(a) $\{(0,0,0),\ (1,0,-2)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI?

(b) $\{(1,0,-2),\ (1,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI?

(c) $\{(1,0,-2),\ (2,0,-4)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI?

(d) Caracterize, de forma geral, os conjuntos de <u>dois elementos</u> que são LI.

Problema 7.

(a) $\{(1,0,-2),\ (2,1,1),\ (4,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI?

(b) $\{(1,0,-2),\ (2,1,1),\ (1,2,8)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI?

(c) Existe uma caracterização fácil dos conjuntos de <u>três elementos</u> que são LI? (Fácil no sentido de que se possa decidir "de cabeça" se o conjunto é ou não LI, sem a necessidade de se escalonar nada.)

Problema 8. Fazendo o mínimo necessário de contas, diga se são bases de $\mathbb{R}^3$:

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Problema 9. Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

(a) hiperplano $\{(x,y,z,w) \mid x+y-w=0\}$;

(b) conjunto-solução de $\begin{cases} x+z-w=0 \\ -z+w=0 \end{cases}$;

(c) conjunto-solução de $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$;

(d) $\left\{ \left[\begin{array}{c} r+2s+t \\ -s-2t \\ 2r+s-4t \\ r-3t \end{array} \right] \middle| r,s,t \in \mathbb{R} \right\}$.

Problema 10. Considere o conjunto-solução do sistema: $\left\{ \begin{array}{l} x-y=0 \\ y+w=0 \\ x+w=0 \end{array} \right.$. Queremos retirar uma equação e acrescentar uma equação ao sistema mantendo o mesmo espaço solução. Determine uma equação que pode ser:

(a) retirada;

(b) acrescentada, que seja não-nula e distinta das outras.

Problema 11. Considere $\mathbf{v} = (0,5,1)$. Determine $[v]_\beta$ (coordenadas de $\mathbf{v}$ com relação à base β), onde $\beta = \{(1,1,1),(-1,1,0),(1,0,-1)\}$.

LI e LD: teóricos

Problema 12. Prove que para qualquer $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ o conjunto $\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{v}-\mathbf{w},\mathbf{w}-\mathbf{u}\}$ é LD.

Problema 13. Sejam $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ vetores LI e $W = \langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\rangle$. Prove que:

(a) se $\mathbf{w} \in W$ então $\{\mathbf{w},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ é LDs;

(b) $\{\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ é LI;

(c) $\langle \mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\rangle \neq W$.

Espaços de Polinômios e Funções

Problema 14. Verifique se é subespaço vetorial de $\mathcal{F}([a,b];\mathbb{R})$ as funções $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tais que:

(a) $f(a)=f(b)=0$; (b) $f(a)=f(b)=1$;

(c) $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$; (d) f é derivável e $f'+2f=0$.

Problema 15. Mostre que é LD:

(a) $\{1+2x,\ 1+x,\ 1-x\}\subset\mathcal{P}_2$;

(b) $\{1,\ \operatorname{sen}^2(x),\ \cos^2(x)\}\subset\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Problema 16. Determine se são LIs ou LDs em $\mathcal{P}_3$:

(a) $\{1,\ x^2,\ x^2+4\}$; (b) $\{x+2,\ x+3,\ x^2-3\}$; (c) $\{x^2-2x,\ 1+x,\ x^2+2\}$.

Problema 17. Considere o espaço das funções infinitamente diferenciáveis $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, denotado por $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Verifique que o subespaço:

(a) $\{f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})|\ f'=0\}$ é gerado por g tal que $g(x)=1$;

(b) $\{f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})|\ f'-f=0\}$ é gerado por g tal que $g(x)=e^x$;

Problema 18. Determine se é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_4$ (espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 4). Em caso afirmativo determine uma base e dimensão.

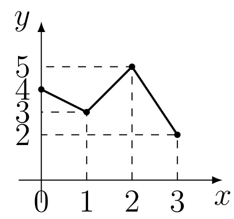
(a) $\{p\in\mathcal{P}_4|\ p(2)=0\}$; (b) $\{p\in\mathcal{P}_4|\ p(2)=1\}$.

Problema 19. Considere $\beta=\{1,1-x,x^2-1\}$. Determine:

(a) $[q]_\beta$ onde $q(x)=x^2-x$; (b) $[p]_\beta$ onde $p(x)=x^2+x+1$.

Problema 20. Considere as funções $\phi_0,\ldots,\phi_3$ mostradas na Figura 3.5 da página 62. Defina $\beta=\{\phi_0,\ldots,\phi_3\}$ (é base). Seja $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ a função representada no gráfico abaixo.

Determine $[f]_\beta$.



3.6.3 Desafios

Desafio 1. Prove que se $V \subset \mathbb{R}^1$ é um subespaço vetorial então $V = \mathbf{0}$ ou $V = \mathbb{R}$.

Desafio 2. (Shilov p.57 #10) Considere $W \subset V \subset \mathbb{R}^n$ com $\dim(W) = \dim(V)$. Prove que $W = V$.

Desafio 3. (Hefferon) Prove que se U e V são ambos subespaços de dimensão 3 contidos em $\mathbb{R}^5$ então $U \cap V$ é não-trivial (possui pelo menos dimensão 1). Generalize.

Desafio 4. (Shilov p.57 #12) Um **subspaço afim** H é a translação de um subespaço vetorial W, isto é, existe um vetor $\mathbf{h}_0 \in V$ e um subespaço vetorial $W \subset V$ tal que $H = \mathbf{h}_0 + W = \{\mathbf{h}_0 + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in W\}$.

(a) Prove que H é um subespaço afim se, e somente se, para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, vale $\theta\mathbf{u} + (1-\theta)\mathbf{v} \in H$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$;

(b) Qual propriedade geométrica é expressa por esta propriedade?

Desafio 5. Sejam $H, K \subset V$ subespaços vetoriais. Introduzimos duas definições, utilizadas neste exercício e em outros.

Definição 51 (soma e soma direta de subespaços) *Definimos a* ***soma de subespaços*** H *e* K *por*

$$H + K = \{\mathbf{h} + \mathbf{k} \mid \mathbf{h} \in H, \mathbf{k} \in K\}.$$

Se $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$*, dizemos que é* ***soma direta****, denotando-a por* $H \oplus K$.

(a) mostre que $H \cap K$ é subespaço;

(b) mostre que $H \cup K$ não é, em geral, subespaço;

(c) mostre que $H + K$ é subespaço;

(d) mostre que $H + K$ é o menor subespaço contendo $H \cup K$, isto é se W é subespaço com $H \subset W$ e $K \subset W$, então $H + K \subset W$;

(e) prove que

$$\dim(H + K) = \dim(H) + \dim(K) - \dim(H \cap K).$$

Desafio 6. Dados os espaços $W_1 = \{(s+t, t-s, s+t, 2s+t) \in \mathbb{R}^4 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z = 0 \text{ e } x - w + z = 0\}$, determine:

(a) base e a dimensão de W_1 e W_2;

(b) base e a dimensão de $W_1 + W_2$.

(c) Encontre um subespaço W_3 de modo que $W_1 \oplus W_3 = \mathbb{R}^4$ (soma direta, veja Definição 51 da página 75);

(d) Encontre uma base de $W_1 \cap W_2$.

Desafio 7. Suponha que $W_1 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ e $W_2 = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m \rangle$. Determine como:

(a) calcular $W_1 + W_2$;

(b) calcular $W_1 \cap W_2$;

(c) encontrar um subespaço W_3 de modo que $W_1 \oplus W_3 = \mathbb{R}^4$ (soma direta, veja Definição 51 da página 75);

(d) verificar se $W_1 \subset W_2$;

(e) verificar se $W_1 = W_2$.

Desafio 8. Sejam $p, q \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e $V \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o conjunto das soluções $f(x)$ da equação diferencial $f''(x) + p(x)f'(x) + q(x)f(x) = 0$ (conhecida como equação de Sturm-Liouville).

(a) Mostre que V é um subesepaço vetorial de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$;

(b) Dado $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, seja f_0 uma solução de $f_0''(x) + p(x)f_0'(x) + q(x)f_0(x) = g(x)$. Mostre que $h = f + g$, com $f \in V$, é solução também, isto é, dada uma solução particular da equação não-homogênea e uma solução qualquer da equação homogênea, a soma delas é soluçao da não-homogênea. Concluimos que o conjunto-solução da equação não-homogênea é um subespaço afim.

Desafio 9. Considere $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, o espaço das funções reais com domínio em $\mathbb{R}$. Sejam $V_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) |\ f(-x) = f(x)\}$ (funções pares) e $V_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) |\ f(-x) = -f(x)\}$ (funções impares). Exemplos são $\operatorname{sen}(x), x, x^3 \in V_2$ e $\cos(x), 1, x^2 \in V_1$. De forma geral $x^n \in V_1$ (é par) se n é par e $x^n \in V_2$ (é impar) se n é impar. Mostre que:

(a) são subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$;

(b) Mostre que $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$;

(c) Mostre que $V_1 \oplus V_2 = \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (soma direta, veja Definição 51 da página 75).

Desafio 10. Considere as funções reais $I_{[a,b]}$, definidas por $I_{[a,b]}(x) = 1$ se $x \in [a, b]$ e $I_{[a,b]}(x) = 0$ caso contrário. É chamada de função característica (ou indicadora) do intervalo $[a, b]$. Defina $f_k = I_{[k,k+1]}$.

(a) Prove que o conjunto $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é LI's para qualquer n.

(b) Conclua que o espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ possui dimensão infinita.

Desafio 11. Dado um espaço vetorial V e um conjunto I (não-vazio) qualquer, considere $\mathcal{F}(I;V)$, o espaço das funções de I em V. Definas as operações de soma e multiplicação por escalar utilizando as operações correspondentes em V, tal qual na Definição 35. Prove que $\mathcal{F}(I;V)$ é um espaço vetorial.

Desafio 12. Considere $V = \{p \in \mathcal{P}_4 |\ p(1) = 0\}$ e $W = \{p \in \mathcal{P}_4 |\ p(-1) = 0\}$. Determine dimensão e bases para:

(a) V; (b) W; (c) $V \cap W$.

Desafio 13. (Shilov p.56 #5) Considere o espaço das funções reais no intervalo (a, b). Mostre que as funções $x^{r_1}, \ldots, x^{r_k}$ formam um conjunto LI com $r_i \in \mathbb{R}$ distintos.

Desafio 14. Seja A matriz $m \times n$.

(a) Prove que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução para todo lado direito $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, se e só se as colunas de A formam um conjunto gerador.

(b) Prove que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem solução única se e só se as colunas de A formam um conjunto LI.

Desafio 15. (Shilov p.56 #3) Considere P o conjunto dos números reais positivos. Introduza em P duas operações:

(a) dados $x, y \in P$ a "soma" $x \oplus y$ por xy;

(b) dado $x \in P$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos o "produto" $\lambda \odot x$ por x^λ.

P é um espaço vetorial com estas operações? Se for, determine base e dimensão.

3.6.4 Extras

Subespaços do $\mathbb{R}^n$

Extra 1. Determine se:

(a) $(1,0,1) \in \langle (1,1,1),(1,2,1)\rangle$;

(b) $\{(k,1,1),(1,k,1),(1,1,k)\}$ é LI para $k \in \mathbb{R}$;

(c) $\mathbb{R}^3 = \langle (2,-1,3),(4,1,2),(8,-1,8),(6,0,5)\rangle$;

Extra 2. Fazendo o mínimo necessário de contas, diga se são bases de $\mathbb{R}^3$:

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

Extra 3. Determine uma base e a dimensão dos subespaços do $\mathbb{R}^4$, solução do sistema linear:

(a) $\left\{ \; x+y-w=0 \right.$; (b) $\left\{ \begin{array}{r} x+z-w=0 \\ -z+w=0 \end{array} \right.$;

(c) $\left\{ \; x-y+z-w=0 \right.$; (d) $\left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z-2w &=& 0 \\ 2x+y-z-w &=& 0 \\ x+2y-2z+w &=& 0 \end{array} \right.$.

Considere os subespaços acima:

(e) determine a interseção entre os subespaços (a) e (b);

(f) acrescente equações não-nulas a (d) que não alterem o subespaço.

Extra 4. Determine para cada subespaço do $\mathbb{R}^n$ abaixo a dimensão e base:

(a) $\langle (0,-1,2,1),(1,2,1,0),(1,1,3,1),(3,5,5,1)\rangle$;

(b) $\langle (1,0,1,-1),(2,3,3,0),(1,3,2,1),(0,3,1,2)\rangle$;

(c) $\langle (1,2,0,1,2),(-1,0,1,2,1),(0,6,3,9,9)\rangle$.

Extra 5. Um subespaço do $\mathbb{R}^n$ pode ser determinado por:

(a) espaço gerado, $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, por exemplo, $W = \langle (1,0,1),(1,2,1)\rangle$;

(b) solução de sistema homogêneo, $W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n |\ A\mathbf{w} = \mathbf{0}\}$, por exemplo,
$\left\{ \begin{array}{l} x-y=0 \\ y+z=0 \end{array} \right.$;

(c) parametrização, por exemplo, $W = \{(2s+3t, s+t, s-t) \in \mathbb{R}^3 |\ s,t \in \mathbb{R}\}$.

Descreva como converter entre estes três tipos utilizando os exemplos para efetuar as conversões;

Extra 6. Considere $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que eles são LDs se, e somente se, $ad-bc=0$.

LI e LD: teóricos

Extra 7. Suponha que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é um conjunto LI. Prove que $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ com $\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_i$ (com $i = 1,2,3$) é um conjunto LI.

Extra 8. Suponha que os sistemas lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ e $A\mathbf{x} = \mathbf{b_2}$ têm, ambos, soluções únicas. O que podemos dizer sobre o conjunto-solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$, onde:

(a) $\mathbf{c} = 3\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_1$?

(b) $\mathbf{c}$ é qualquer vetor?

Extra 9.

(a) Seja $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ tal que o subconjunto $\gamma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, com $k \leq n$, é LD. Mostre que β é LD.

(b) Mostre que se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é LI então qualquer subconjunto será LI também.

Extra 10. Seja $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ um conjunto de vetores tal que:
(a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ é LI;
(b) $\mathbf{v}_n \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle$.
Mostre que β é LI.

Espaços de Funções ou Polinômios

Extra 11. Considere o espaço das funções infinitamente diferenciáveis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, denotado por $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Verifique que o subespaço:
(a) $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) |\ f'' = 0\}$ é gerado por g e h tais que $g(x) = 1$ e $h(x) = x$;
(b) $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) |\ f'' - f = 0\}$ é gerado por g e h tais que $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $h(x) = \cos(x)$;

Extra 12. Verifique se é subespaço vetorial de $\mathcal{F}([a, b]; \mathbb{R})$ as funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que:
(a) f é uma função constante; (b) f é derivável;
(c) f não é derivável; (d) f é contínua e $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

Extra 13. Determine se é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_4$ (espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 4). Em caso afirmativo determine uma base e dimensão.
(a) $\{p \in \mathcal{P}_4 |\ p'(2) = 0\}$; (b) $\{p \in \mathcal{P}_4 |\ p(x) = p(-x)\}$;

Extra 14. Determine a dimensão de $\langle \cos^2(x), \operatorname{sen}^2(x), \cos(2x), \sin(2x) \rangle \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Extra 15. Considere a base de $\mathcal{P}_2$ $\beta = \{1 + x, 1 - x, x^2 + 1\}$. Se $p(x) = 4 + x - x^2$.
(a) Determine $[p]_\beta$ (coordenadas de p com relação à base β.
(b) prove que β é base de $\mathcal{P}_2$, o espaço dos polinômios de grau máximo menor ou igual a 2.

Capítulo 4

Transformações Lineares

Neste capítulo estudamos o objeto central de um curso de Álgebra Linear: **transformações lineares** (TLs daqui por diante). Vamos começar revendo conceitos e definições básicas sobre funções, incluindo domínio e imagem, injetiva e sobrejetiva, composição e função inversa. Além disso definiremos espaços vetoriais importantes associados a TLs:

(a) o conjunto das TLs;

(b) o núcleo de uma TL;

(c) a imagem de uma TL.

Os resultados principais deste Capítulo são:

– o Teorema 4 da página 86 (teorema do núcleo-imagem), que relaciona as dimensões do núcleo, imagem e domínio de uma TL; e

– o Teorema 5 da página 91, que relaciona o núcleo com a existência de inversa de uma TL.

Num primeiro curso de cálculo estudamos funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vamos agora estudar funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e, de forma ainda mais geral, $f : V \to W$ com V, W espaços vetoriais quaisquer.

Se os espaços vetoriais são de dimensão finita, num certo sentido (ver Lema 7 da página 69 e Definição 73 da página 110 e comentários antes), estamos de fato com função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

4.1 Fundamentos

No contexto de Álgebra linear é comum utilizar o termo **transformação** como sinônimo de **função**.

Definição 52 (domínio, contradomínio e imagem de função) *Seja $f : X \to Y$ uma função. Dizemos (veja Figura 4.1) que:*

- *X é o* ***domínio****;*
- *Y é o* ***contra-domínio*** *e*
- *$\{y \in B; y = f(x)$ para algum $x \in X\}$ é a* ***imagem****, denotada $\mathrm{Im}(f)$ ou $f(X)$.*

[0]Versão 18.jul.2008 16h

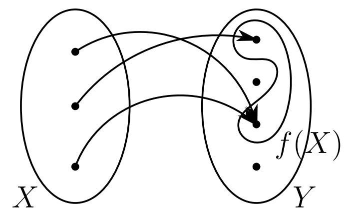
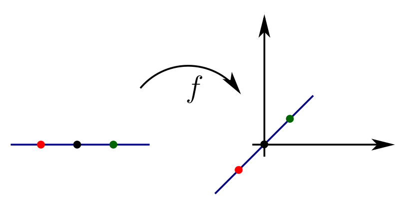


Figura 4.1: Função $f : X \to Y$

Definição 53 (função injetiva, sobrejetiva e bijetiva) *Seja* $f : A \to B$ *uma função. Dizemos que* f *é:*

- ***injetiva*** *se* $f(u) = f(v)$ *implica que* $u = v$. *No diagrama, cada elemento do contra-domínio é atingido* ***no máximo uma vez****;*
- ***sobrejetiva*** *se* $f(A) = B$. *No diagrama, cada elemento do contra-domínio é atingido* ***pelo menos uma vez****;*
- ***bijetiva*** *se é injetiva e sobrejetiva. No diagrama, cada elemento do contra-domínio é atingido* ***exatamente uma vez****.*

Exemplo 139 *Considere* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definido por* $f(x) = (x, x)$.



$\mathbb{R}$ *é o domínio,* $\mathbb{R}^2$ *é o contra-domínio. É injetiva pois* $f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad (x, x) = (y, y) \quad \Rightarrow \quad x = y$. *Não é sobrejetiva pois* $(1, 2) \neq f(x) = (x, x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. *A imagem é a reta* $y = x$.

Exemplo 140 *Considere* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definido por* $f(x, y) = x + y$.

$\mathbb{R}^2$ *é o domínio,* $\mathbb{R}$ *é o contra-domínio. Não é injetiva pois* $f(1, 0) = f(0, 1)$. *É sobrejetiva pois dado* $y \in \mathbb{R}$ *(elemento do contra-domínio), existe* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *(por exemplo,* $\mathbf{x} = (y, 0)$*) tal que* $f(\mathbf{x}) = f(y, 0) = y$. *A imagem de* f *é* $\mathbb{R}$.

Definição 54 (transformação linear) *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais. Uma função (ou transformação)* $T : V \to W$ *é dita* ***transformação linear (TL)*** *se preserva combinações lineares, isto é se*

$$T(k\mathbf{u} + \mathbf{v}) = kT(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}),$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ *e* k *escalar.*

Exemplo 141 *Determine se* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definido por* $T(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_3,\ -x_1)$ *é linear, injetiva, sobrejetiva.*

Como, $T(k\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(kx_1 + y_1,\ kx_2 + y_2,\ kx_3 + y_3) = (kx_3 + y_3,\ -(kx_1 + y_1)) = k(x_3,\ -x_1) + (y_3,\ -y_1) = kT(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$*, concluímos que é linear.*

Se $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y})$*, então* $(x_3,\ -x_1) = (y_3,\ -y_1)$. *Logo* $x_1 = y_1$ *e* $x_3 = y_3$ *mas* x_2 *pode ser diferente de* y_2*, e portanto não necessariamente* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. *Logo não é injetiva.*

É sobrejetiva pois para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $T(-b, 0, a) = (a, b)$.

Exemplo 142 *Seja A uma matriz $m \times n$. Dado $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, defina $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ (produto matriz-vetor). Determine se T é linear.*

Como $T(k\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(k\mathbf{x} + \mathbf{y}) = kA\mathbf{x} + A\mathbf{y} = kT(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$ concluímos que é linear.

Observação 30 *Por este exemplo, a cada matriz associamos uma TL. No próximo Capítulo veremos o procedimento contrário: a cada TL associamos uma matriz. Nesse sentido (explorado no próximo Capítulo), toda TL é dada por uma matriz e o estudo de TLs pode ser reduzido ao estudo de matrizes.*

Exemplo 143 *Determine se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,\ y,\ z) = (z,\ xy)$ é linear, injetiva, sobrejetiva.*

Como $T(1,1,1) = (1,1)$ e $T(2,2,2) = (2,4) \neq 2T(1,1,1)$, concluímos que não é linear.

Se $T(x,\ y,\ z) = T(a,b,c)$ então $(z,xy) = (c,ab)$. Logo $z = c$ e $xy = ab$. Portanto não é injetiva, pois, por exemplo $T(2,3,1) = T(3,2,1) = (1,6)$ mas $(2,3,1) \neq (3,2,1)$.

Dado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $T(b,1,a) = (a,b)$. Logo, é sobrejetiva.

Exemplo 144 *Seja $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço das funções continuamente diferenciáveis e $\mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas. Determine se a transformação derivada $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ definida por $D(f) = f'$ é linear, injetiva, sobrejetiva.*

Como $D(k\mathbf{f} + \mathbf{g}) = (k\mathbf{f} + \mathbf{g})' = k\mathbf{f}' + \mathbf{g}' = kD(\mathbf{f}) + D(\mathbf{g})$, concluímos que é linear.

Se $D(f) = D(g)$ concluímos que $f' = g'$, ou seja $(f - g)' = 0$, o que implica $f - g = C$. Portanto não necessariamente $f = g$ (duas funções cuja diferença seja uma constante possuem a mesma derivada). Logo não é injetiva.

Dada $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, defina $h(x) = \int_0^x g(s)\,ds$. Pelo Teorema fundamental do cálculo, $h'(x) = g(x)$, logo $T(h) = g$. Portanto é sobrejetiva.

Exemplo 145 *Determine se $P : \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definido por $P(f) = (f(1), f(2))$ é linear, injetiva, sobrejetiva.*

Como $P(kf + g) = ((kf + g)(1), (kf + g)(2)) = (kf(1) + g(1), kf(2) + g(2)) = k(f(1), f(2)) + (g(1), g(2)) = kP(f) + P(g)$, concluímos que é linear.

Não é injetiva pois se $f(x) = (x-1)(x-2)$ e $g(x) = 0$ então $P(f) = P(g) = (0,0)$ mas $f \neq g$.

É sobrejetiva pois dado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, seja $y = f(x)$ a equação da reta que passa por $(1,a)$ e $(2,b)$. Logo $P(f) = (a,b)$.

Note que neste último exemplo definimos uma espécie de projeção, que associa cada função contínua com seus valores em dois pontos. O leitor pode generalizá-lo e definir $P : \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ por $P(f) = (f(1), \ldots, f(n))$ e provar que P é uma TL.

Exemplo 146 *Em análise numérica é útil fixar o intervalo $[a,b]$ e definir uma projeção que toma os valores da função em $n+1$ pontos equiespaçados neste intervalo. Note a semelhança com a definição de integral, quando dividimos o intervalo $[a,b]$ em partes iguais. Assim, dado n qualquer, defina $\Delta x = (b-a)/n$ e $x_0 = a, x_1 = a+\Delta x, x_2 = a+2\Delta x, \ldots, x_n = a+n\Delta x = b$ (são $n+1$ pontos). Agora defina $P : \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ por $P(f) = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n))$. Novamente P é linear.*

Exemplo 147 *Determine se $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, definido por $T(p)(x) = (p(x))^2$ é linear, injetiva, sobrejetiva. Por exemplo se $p(x) = x^2 + 1$, $T(p)(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$.*

Embora $T(0) = 0$, se tomarmos $p(x) = x$, $T(kp)(x) = k^2x^2 \neq kT(p)(x) = kx^2$. Logo não é linear.

Por outro lado se tomarmos polinômios constantes iguais a 1 e (-1) observamos que $T(1) = 1 = T(-1)$. Logo não é injetiva.

Para qual p, $T(p)(x) = x$? Para isto teríamos $(p(x))^2 = x$, o que implicaria que $p(x) = \pm\sqrt{x}$. Mas isto não é um polinômio, logo T não é sobrejetiva, pois o polinômio $q(x) = x$ não é atingido nunca por T.

Observação 31 *É fácil verificar que:*

- *Uma função é linear se, e só se, preserva soma vetorial e multiplicação por escalar, isto é, se $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$) (preserva multiplicação por escalar) e $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$ (preserva a soma);*

- *Se T é linear, então $T(\mathbf{0}) = T(-\mathbf{0}+\mathbf{0}) = -T(\mathbf{0})+T(\mathbf{0}) = 0$. Note que a recíproca não é verdadeira: existem funções que satisfazem isto mas não são lineares (veja Exemplo 143 e Exemplo 147).*

Exemplo 148 (rotação em $\mathbb{R}^2$) *A rotação em torno da origem é uma transformação linear.*

Vamos provar através da seqüência da Figura 4.2 que $R(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = R(\mathbf{u}) + R(\mathbf{v})$. Na primeira mostramos $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Na segunda, $R(\mathbf{u}), R(\mathbf{v})$ e $R(\mathbf{u}) + R(\mathbf{v})$. Na terceira mostramos que $R(\mathbf{u})+R(\mathbf{v})$ é igual a rotação de $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, isto é que $R(\mathbf{u})+R(\mathbf{v}) = R(\mathbf{u}+\mathbf{v})$.

Argumento análogo vale para a multiplicação por escalar. Como a rotação preserva a soma e o produto por escalar, pela Observação 31, a rotação é linear. Na Seção 5.5 vamos aprender a determinar explicitamente esta rotação por um ângulo qualquer.

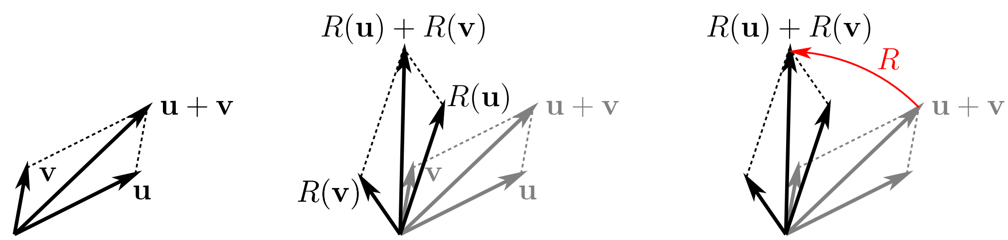


Figura 4.2: Rotação

O próximo lema é uma importante ferramenta para determinação de TLs pois mostra que basta determinar os valores numa base para se determinar em todos os vetores. Portanto podemos construir exemplos de TLs fixando seus valores num número finito de vetores.

Lema 11 (determinando uma TL) *Seja $T : U \to V$ transformação linear e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ base de U. Se conhecemos $T(\mathbf{u}_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, então $T(\mathbf{u})$ está bem determinado para qualquer $\mathbf{u} \in U$.*

Prova: Dado $\mathbf{u} \in U$ qualquer, pela definição de base, existem $\alpha_i's$ tais que $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i$. Pela linearidade, $T(\mathbf{u}) = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(\mathbf{u}_i)$. Como os valores $T(\mathbf{u}_i)$ são conhecidos, a transformação está determinada de modo único. ■

Exemplo 149 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma TL tal que $T(1,1) = 2$ e $T(0,1) = 3$. Determine T(x,y).*

Como $(1,1)$ e $(0,1)$ são LIs, formam uma base do $\mathbb{R}^2$. Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$. Logo, $T(x,y) = xT(1,1) + (y-x)T(0,1) = 2x + 3(y-x) = 3y - x$.

Definição 55 (espaço das TLs) *Dados U e V espaços vetoriais definimos por $\mathcal{L}(U;V)$ o espaço (pelo Lema 12 este conjunto é um espaço vetorial) das transformações lineares $T : U \to V$.*

Definição 56 (operações entre TLs) *Dados $T, S \in \mathcal{L}(U;V)$ e k escalar, definimos a soma de TLs e a sua multiplicação por escalar por:*

$$\begin{array}{rccc} T+S: & U & \to & V \\ & \mathbf{u} & \mapsto & T(\mathbf{u})+S(\mathbf{u}) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} kT: & U & \to & V \\ & \mathbf{u} & \mapsto & kT(\mathbf{u}) \end{array}.$$

Observação 32 *Note que o sinal "+" (mais) em "$T+S$" e "$T(\mathbf{u})+S(\mathbf{u})$" (bem como do produto) possui significado distinto em cada expressão: soma de TLs, num caso, e de soma de vetores no outro. Compare estas definições com as da Definição 35 da página 54 e veja que são inteiramente análogas.*

Lema 12 (espaço vetorial das TLs) *O conjunto $\mathcal{L}(U;V)$ com as operações acima é um espaço vetorial.*

Prova: É claro que $\mathcal{L}(U;V) \subset \mathcal{F}(U;V)$ (toda transformação linear é uma função). É um exercício fácil mostrar que $\mathcal{F}(U;V)$ é um espaço vetorial (dica: elemento neutro da soma é $E : U \to V$ definida por $E(x) \equiv 0$). Portanto basta verificar que $\mathcal{L}(U;V)$ é fechado com relação as operações de soma e produto por escalar (ver Lema 2 na página 57).

De fato, sejam $T, S \in \mathcal{L}(U;V)$. Então $(T+S)(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) + S(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) =$ (linearidade de T e S) $T(\mathbf{u}) + \lambda T(\mathbf{v}) + S(\mathbf{u}) + \lambda S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + S(\mathbf{u}) + \lambda(T(\mathbf{v}) + S(\mathbf{v}))$ $= (T+S)(\mathbf{u}) + \lambda(T+S)(\mathbf{v})$. Logo $T+S$ é uma TL, isto é, $T+S \in \mathcal{L}(U;V)$ (fechado pela soma).

De forma análoga, $(kT)(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) = kT(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) =$ (linearidade de T) $= kT(\mathbf{u}) + k\lambda T(\mathbf{v}) = (kT)(\mathbf{u}) + \lambda(kT)(\mathbf{v})$. Logo kT é uma TL, isto é, $kT \in \mathcal{L}(U;V)$ (fechado pelo produto).

Como $\mathcal{L}(U;V)$ é fechado com relação as operações de soma e produto por escalar é um espaço vetorial. ■

Observação 33 *A dimensão de $\mathcal{L}(U;V)$ é igual ao produto das dimensões de U e V. Este fato e a determinação explícita de uma base para $\mathcal{L}(U;V)$ é deixada para o exercício Desafio 4.4.3 da página 94.*

4.2 Núcleo e Imagem

Definição 57 (núcleo e nulidade) *O **núcleo** (ou **kernel**) de uma transformação linear T, denotado por $Nuc(T)$, é o conjunto dos vetores do domínio cuja imagem por $T : U \to V$ é o vetor nulo:*

$$Nuc(T) = \{\mathbf{u} \in U \mid T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}.$$

*A **nulidade** de uma transformação linear T é a dimensão do seu núcleo: $\dim(Nuc(T))$.*

Exemplo 150 *Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x,y) = y$. O núcleo são os elementos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que são levados no zero. Como $T(x,y) = 0 = y$, o núcleo é a reta $y = 0$, que corresponde ao eixo-x. Mais ainda, T leva a reta $y = 1$ no 1 e a reta $y = -1$ no -1, conforme indicado na Figura 4.3.*

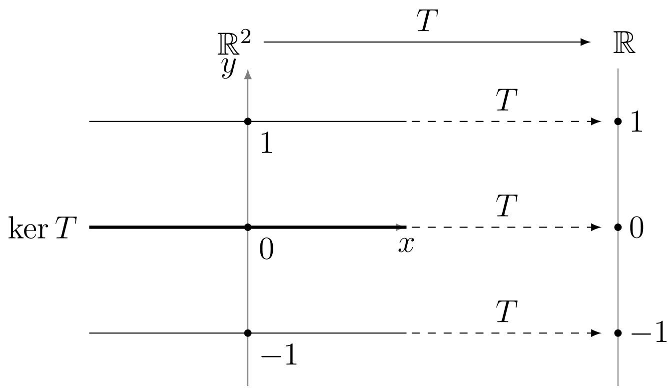


Figura 4.3: $T(x,y) = y$

Exemplo 151 *Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x,y) = y - x$. O núcleo são os elementos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que são levados no zero. Como $T(x,y) = 0 = y - x$, o núcleo é a reta $y = x$. Mais ainda, T leva a reta $y = x + 1$ no 1 e a reta $y = x - 1$ no -1, conforme indicado na Figura 4.4.*

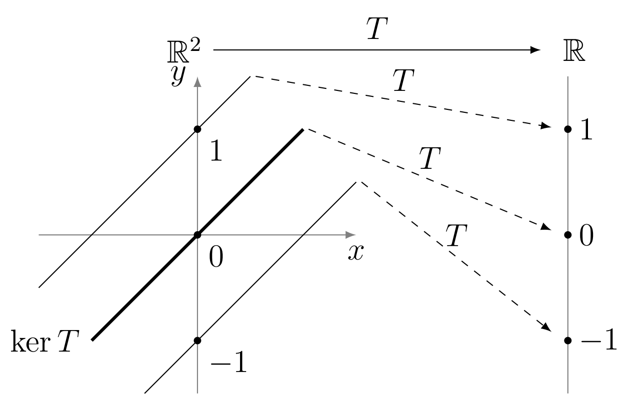


Figura 4.4: $T(x,y) = y - x$

Definição 58 (imagem e posto) *A **imagem** de uma transformação linear $T : U \to V$, denotada por $\mathrm{Im}(T)$, é o conjunto dos vetores do contra-domínio que são imagem por T de algum vetor do domínio:*

$$Im(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} = T(\mathbf{u}) \text{ para algum } \mathbf{u} \in U\}.$$

*O **posto** de uma transformação linear T é a dimensão da sua imagem $\dim(Im(T))$.*

Observação 34 *O termo **nulidade** é pouco utilizado, mas o termo **posto** é muito comum.*

O próximo lema mostra que a cada TL associamos dois subespaços vetoriais.

Lema 13 (núcleo e imagem são subespaços) *Dada uma transformação linear $T : U \to V$, o $\mathrm{Nuc}(T)$ é subespaço vetorial de U e a $\mathrm{Im}(T)$ é subespaço vetorial de V.*

Prova: Deixamos como exercício para o leitor. ∎

Observação 35 *Como obter o núcleo e a imagem de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?*
Para o núcleo resolva o sistema $T(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$. Para a imagem, escalone (não precisa ser totalmente escalonada, veja Lema 6 da página 66) matriz com os vetores $T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$ (geram a imagem de T) nas linhas para determinar base.

Exemplo 152 *Determine o núcleo, a imagem e suas respectivas dimensões de:*
(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = (x + 2y)$;
(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$, $T(x, y) = (-x, 2y + x, -2x + 2y, 2y - x, 2y)$;
(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, $T(x, y, z) = (y + z, y + z, x + z, x + z, x + z)$.

Para (a), achamos o núcleo resolvendo (o sistema linear) $T(x, y) = \mathbf{0} = x + 2y$. Logo $x = -2y$ e fazendo $y = t$, $x = -2t$. Logo $\mathrm{Nuc}(T) = \{(-2t, t)\} = \langle(-2, 1)\rangle$, dimensão 1. Como $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, a imagem é gerada por $\{T(1, 0), T(0, 1)\} = \{1, 1\}$. Logo a imagem é todo o $\mathbb{R}$, dimensão 1.

Para (b), achamos o núcleo resolvendo (o sistema linear) $T(x, y) = \mathbf{0} = (-x, 2y + x, -2x + 2y, 2y - x, 2y)$; Da primeira equação obtemos $-x = 0$ e da última $2y = 0$. Logo a única solução é $x = y = 0$. Concluímos que o núcleo é o $\mathbf{0}$ (dimensão 0). Como $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, a imagem é gerada por $\{T(1, 0), T(0, 1)\} = \{(-1, 1, -2, -1, 0), (0, 2, 2, 2, 2)\}$. Logo a imagem é (estes vetores são claramente LIs) o $\langle(-1, 1, -2, -1, 0), (0, 2, 2, 2, 2)\rangle$, dimensão 2.

Para (c), achamos o núcleo resolvendo (o sistema linear) $T(x, y, z) = \mathbf{0} = (y + z, y + z, x + z, x + z, x + z)$; Este sistema é equivalente ao sistema $\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. Escalonando e resolvendo, são duas equações e três variáveis. Tomando $z = t$, obtemos $y = x = -t$. Logo o núcleo é $\{(-t, -t, t)\} = \langle(-1, -1, 1)\rangle$, dimensão 1. Como $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, a imagem é gerada por
$\{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)\} = \{(0, 0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 1)\}$. Escalonando a matriz com estes vetores em cada linha, observamos que o último é combinação linear dos outros. Logo a imagem é $\langle(0, 0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 0\rangle$, dimensão 2.

Exemplo 153 *Considere $D : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $D(p) = p'$ (derivada). Determine $\mathrm{Nuc}(D)$ e $\mathrm{Im}(D)$.*

Para determinar o núcleo seja $p(x) = ax^2 + bx + c$, $D(p)(x) = 2ax + b = 0$ para todo x implica que $a = b = 0$. Logo $\mathrm{Nuc}(D)$ são os polinômios $p(x) = c$ (constantes). Esta mesma expressão mostra que a imagem são os polinômios de grau 1 ($\mathcal{P}_1$). Sem fazer contas, o conjunto dos polinômios cuja derivada é a função identicamente nula são os polinômios constantes. A imagem da derivada de polinômios de grau 2 são polinômios de grau 1.

Exemplo 154 *Seja $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma projeção ortogonal na reta $x = y$. Sem calcular explicitamente P, somente com argumentos geométricos, determine o núcleo e a imagem de P.*

Como P projeta na reta $x = y$, a imagem de P é esta reta. Como a projeção é ortogonal, serão levados no zero os vetores perpendiculares a esta reta, isto é, $\mathrm{Nuc}\,T$ é a reta $x = -y$.

Exemplo 155 *Seja $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma reflexão em torno da reta $x = y$. Sem calcular explicitamente R, somente com argumentos geométricos, determine o núcleo e a imagem de R.*

Dada um vetor $\mathbf{v}$ qualquer, ele é imagem de $\mathbf{w}$ (tome $\mathbf{w} = R(\mathbf{v})$). Logo a imagem é o $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, o único vetor que refletido vai na origem é a própria origem. Logo o núcleo é somente a origem.

Lema 14 (injetividade e sobrejetividade de TL) *Uma transformação linear $T : U \to V$ é:*

(a) injetiva se, e somente se, seu núcleo for igual a $\mathbf{0}$;

(b) sobrejetiva se, e somente se, seu posto ($\dim \mathrm{Im}(T)$) for igual a $\dim(V)$.

Prova: Como T é linear, $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ se, e somente se, $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$. Agora o conjunto $\{\mathbf{u} - \mathbf{v}\} = \mathrm{Nuc}(T)$. Logo $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ se, e somente se, o $\mathrm{Nuc}(T) = \mathbf{0}$.

Se T for sobrejetiva, $\mathrm{Im}(T) = V$ e portanto, o posto $= \dim \mathrm{Im}(T) = \dim(V)$. Por outro lado, se o posto $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim(V)$ então $\mathrm{Im}(T) \subset V$ é um subespaço vetorial de V com mesma dimensão que V. Portanto, $\mathrm{Im}(T) = V$. ■

O próximo teorema é tão importante que é conhecido em alguns livros como o Teorema Fundamental da Álgebra Linear. Ele relaciona as dimensões do núcleo e da imagem com a dimensão do domínio.

Teorema 4 (Teorema do núcleo-imagem TNI) *Seja $T : U \to V$ linear com U de dimensão finita. Então*

$$\dim(Nuc(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(U).$$

Portanto a soma das dimensões do núcleo e da imagem é igual a dimensão do domínio.

Prova: Suponha que $\dim(U) = n$ e que $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = k$. Tome base $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ de $\mathrm{Nuc}(T)$. Tome $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ para que $\gamma = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ seja base de U. Como $\dim(U) = n$ e toda base possui mesmo número de elementos, $k+r = n$, isto é, $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) + r = \dim(U)$.

Vamos mostrar que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = r$, mais precisamente, vamos mostrar que $\beta = \{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_r)\}$ forma uma base para $\mathrm{Im}(T)$:

(a) $\langle\beta\rangle = \mathrm{Im}(T)$: É claro que $\langle\beta\rangle \subset \mathrm{Im}(T)$. Vamos mostrar que $\mathrm{Im}(T) \subset \langle\beta\rangle$. Seja $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T)$. Então, $\mathbf{w} = T\mathbf{u}$ para algum $\mathbf{u} \in U$. Como γ é base de U, $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots a_k\mathbf{u}_k + b_1\mathbf{v}_1 + \cdots b_r\mathbf{v}_r$. Como $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ é base do núcleo, $T(\mathbf{u}_j) = \mathbf{0}$. Logo, $\mathbf{w} = T\mathbf{u} = b_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots b_rT(\mathbf{v}_r)$. Portanto $\mathbf{w} \in \langle\beta\rangle$.

(b) β é LI: Suponha que $\sum_i a_iT(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$. Pela linearidade de T, $T(\sum_i a_i\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$. Logo $\sum_i a_i\mathbf{v}_i \in \mathrm{Nuc}(T)$. Como $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ é base do núcleo, existem b_j tais que $\sum_i a_i\mathbf{v}_i = \sum_j b_j\mathbf{u}_j$. Logo $\sum_i a_i\mathbf{v}_i - \sum_j b_j\mathbf{u}_j = \mathbf{0}$. Como γ é LI, todos os coeficientes são iguais a zero.

Como β é uma base para $\mathrm{Im}(T)$ e possui r vetores, $\dim \mathrm{Im}(T) = r$. ■

Observação 36 *Podemos ver este teorema da seguinte forma. Caso a TL seja injetiva (núcleo igual a zero), a imagem será uma cópia fiel do domínio (uma bijeção) e portanto a imagem possuirá a mesma dimensão que o domínio. Note que esta será a dimensão máxima possível para a imagem. No entanto, se o núcleo for não nulo, perdemos dimensão da imagem.*

Como a dimensão da imagem não pode exceder a dimensão do contra-domínio, o núcleo pode ter um mínimo maior que zero, conforme veremos nos próximos exemplos.

Sabendo somente a dimensão do núcleo determinamos se a TL é sobrejetiva ou não: basta aplicar o TNI.

Exemplo 156 *Determine os valores máximos e mínimos possíveis para o núcleo e imagem das TLs:*

(a) $T : \mathbb{R}^8 \to R^6$*;*

(b) $T : \mathbb{R}^5 \to R^5$*;*

(c) $T : \mathbb{R}^4 \to R^{20}$.

Sejam $n = Nuc(T), i = \text{Im}(T)$.

Em (a) $n + i = 8$ *e* $i \leq 6$. *Aqui* n *NÃO pode ser* 0 *ou* 1 *pois* i *seria* 8 *ou* 7, *o que é impossível pois excederia a dimensão do contra-domínio, que é* 6. *Assim* $n = 2, \dots, 8$, $i = 6, \dots, 0$. *Neste caso,* $\dim Nuc(T)$ *é no* ***mínimo*** 2.

Em (b) $n + i = 5$ *e* $i \leq 5$. *Assim* $n = 0, \dots, 5$, $i = 5, \dots, 0$.

Em (c) $n + i = 4$ *e* $i \leq 40$. *Assim* $n = 0, \dots, 4$, $i = 4, \dots, 0$.

Exemplo 157 *Explique em cada caso abaixo porque não existe uma TL:*

(a) $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^3$ *injetiva;*

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *sobrejetiva;*

(c) $T : \mathbb{R}^{11} \to \mathbb{R}^{11}$ *com posto=* $\dim Nuc(T)$*;*

(d) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ *com* $Nuc(T) = \langle (1, 2, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5, 6) \rangle$.

(a) como contradomínio tem dimensão 3*, a imagem tem no máximo dimensão* 3 *e pelo TNI o núcleo tem dimensão no mínimo* 4. *Para ser injetiva deveria ser igual a* $\mathbf{0}$.

(b) a imagem tem no máximo dimensão 2*, igual a dimensão do domínio.*

(c) pelo TNI, posto $+ \dim Nuc(T) = 11$. *Como* 11 *é ímpar, isto é impossível.*

(d) como o núcleo tem dimensão 2*, pelo TNI a imagem teria dimensão* 3*, maior que a do contradomínio.*

Exemplo 158 *Em cada ítem dê um exemplo de TL satisfazendo as condições dadas.*

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *cujo núcleo seja o plano* $x + y + z = 0$ *e a imagem seja a reta* $(x(t), y(t), z(t)) = (0, t, t)$*;*

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *cujo núcleo seja gerado por* $(0, 1, 1, 1)$ *e* $(1, 0, 0, 0)$ *e a imagem seja o plano* $y + z = 0$.

(a) resolvendo o sistema obtemos que o núcleo é gerado por $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$. *É claro que acrescentando* $(1, 0, 0)$ *obteremos uma base do* $\mathbb{R}^3$. *A imagem deve ser* $\langle (0, 1, 1) \rangle$. *Utilizando o Lema 11, fixamos* $T(-1, 1, 0) = (0, 0, 0) = T(-1, 0, 1)$. *Para garantir a imagem fixamos* $T(1, 0, 0) = (0, 1, 1)$.

(b) Resolvendo o sistema $y + z = 0$*, a imagem é igual ao* $\langle (1, 0, 0), (0, -1, 1) \rangle$. *Completando o núcleo com uma base do* $\mathbb{R}^4$*, consideramos a base* $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$. *Definimos* $T(1, 0, 0, 0) = T(0, 1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, $T(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 0)$ *e* $T(0, 0, 0, 1) = (0, -1, 1)$. *a TL está bem definida pelo Lema 11.*

Exemplo 159 *Prove que se* $T : V \to V$ *então* T *é injetiva se, e somente se,* T *é sobrejetiva.*

De fato se Se T *é injetiva então* $Nuc(T) = 0$. *Logo, pelo Teorema 4 (TNI),* $\dim Nuc(T) + \dim Im(T) = 0 + \dim Im(T) = \dim V$. *Logo* $\dim Im(T) = \dim V$ *e, portanto,* $Im(T) = V$*, isto é,* T *é sobrejetiva.*

Se T *é sobrejetiva então* $\text{Im}(T) = V$. *Como* $\dim \text{Im}(T) = \dim V$*, pelo Teorema 4 (TNI)* $\dim Nuc(T) = \dim V - \dim \text{Im}(T) = \mathbf{0}$. *Portanto o* $Nuc(T) = \mathbf{0}$ *e* T *é injetiva.*

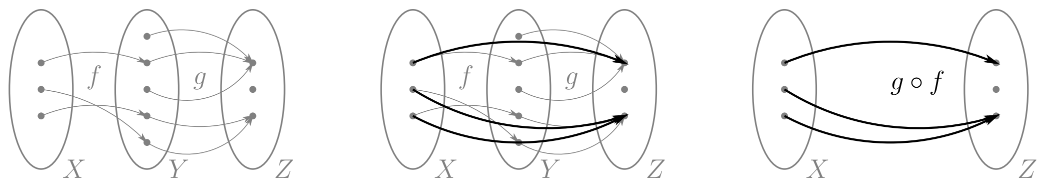
4.3 Composição e Inversa

Nesta seção recordamos a operação de composição de funções e aplicamos ao caso particular em que as funções são TLs. Um fato importante é que a composição (de funções e de TLs) não é comutativa de forma geral.

Recordamos também a definição de função inversa e obtemos propriedades de inversas de TLs. Note que podemos inverter somente funções (e TLs) que são bijetivas.

Definição 59 (composição de funções) *Dadas $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, define-se*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & X & \to & Z \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$



Lema 15 (propriedades da composição de funções) *Considere $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ e $h : Z \to W$.*

- *Associatividade: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$.*
- *Não-comutatividade: em geral, $g \circ f$ está bem definido, mas $f \circ g$ não está. Mesmo quando $Z = X$, caso em que ambas estão definidas, $g \circ f$ e $f \circ g$ podem diferir.*

Exemplo 160 (não-comutatividade) *Considere $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$.*
Então $f(g(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \neq g(f(x)) = x^2 + 1$. Portanto, neste caso, $f \circ g \neq g \circ f$.

Da definição de composição de funções em geral, definimos a composição de TLs. O próximo lema mostra que a composição de TLs gera uma TL. Além disso, a composição de TLs possui propriedades adicionais.
lema!propriedades da composição de TLs

Lema 16 (propriedades da composição de TLs) *Suponha que S, T, U são transformações lineares definidas em espaços vetoriais apropriados para que as composições abaixo façam sentido.*

- *$T \circ S$ é uma transformação linear (composição de TLs é uma TL);*
- *$(S + T) \circ U = S \circ U + T \circ U$ (distributividade);*
- *$S \circ (T + U) = S \circ T + S \circ U$ (distributividade);*
- *$S \circ (kT) = k(S \circ T) = (kS) \circ T$;*
- *De forma geral $S \circ T \neq T \circ S$.*

Prova: De fato, $(T \circ S)(k\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(S(k\mathbf{u} + \mathbf{v})) = T(kS(\mathbf{u}) + S(\mathbf{v})) = kT(S(\mathbf{u})) + T(S(\mathbf{v})) = k(T \circ S)(\mathbf{u}) + (T \circ S)(\mathbf{v})$.
As outras propriedades podem ser verificadas de maneira semelhante pelo leitor. ■

Exemplo 161 (não-comutatividade de TLs) *Considere $T, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidos por $T(x, y) = (-y, x)$ e $S(z, w) = (w, z)$. Então $S \circ T(x, y) = S(-y, x) = (x, -y) \neq T \circ S(x, y) = T(y, x) = (-x, y)$.*

Notação 1 *As distributividade da composição de TLs motiva a notação multiplicativa para composição de TLs: $T \circ S$ é escrito como TS. Neste sentido podemos dizer que fazemos o produto de duas TLs quando calculamos sua composição.*

Exemplo 162 *Considere TLs definidas em $\mathbb{R}^2$:*

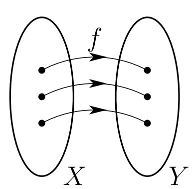
- *P projeção no eixo x: $P(a,b) = (a,0)$;*
- *R reflexão na reta $y = x$: $R(a,b) = (b,a)$;*
- *S reflexão no eixo y: $S(a,b) = (-a,b)$.*

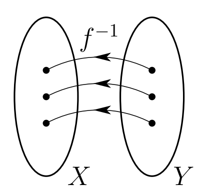
Calcule PS, SP, PR e RP. Quais composições comutam?

- *$PS(x,y) = P(-x,y) = (-x,0)$, $SP(x,y) = S(x,0) = (-x,0)$. Logo $PS = SP$.*
- *$PR(x,y) = P(y,x) = (y,0)$, $RP(x,y) = R(x,0) = (0,x)$. Logo $PR \neq RP$*

Exemplo 163 *Seja R_θ uma rotação de θ graus em torno da origem no plano.*
(a) Determine $(R_\theta)^3$.
(b) Determine um n tal que $(R_{60^o})^n = Id$ (identidade).
(a) rodar 3 vezes 60 graus é o mesmo que rodar 180 graus. Logo $R_\theta^3(x,y) = (-x,y)$.
(b) rodarmos 6 vezes é o mesmo que rodar $6 \times 60 = 360$ que é o mesmo que não rodar nada. Logo pode tomar $n = 6, 12, 18, \ldots$.

Definição 60 (Função Inversa) *Seja $f : X \to Y$ uma função bijetiva. Dado $y \in Y$:*
(a) sobrejetividade garante que existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;
(b) injetividade garante a unicidade de tal x.
Assim, fica bem definida a **inversa** *de f, denotada por $f^{-1} : Y \to X$, definida como $f^{-1}(y) = x$.*





Como funções bijetivas possuem inversas, usaremos, indistintamente, os termos **bijetiva** e **invertível**.

Exemplo 164 *A inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ pois $(\sqrt[3]{y})^3 = y$ e $\sqrt[3]{x^3} = x$.*
A inversa NÃO é $g(x) = 1/x^3$.

Exemplo 165 *A inversa de $f(x) = 10^x$ é $f^{-1}(x) = \log_{10}(x)$ pois $\log_{10}(10^x) = x$ e $10^{\log_{10}(y)} = y$.*

Exemplo 166 *A inversa de $f(x) = \cos(x)$ é $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ pois $\cos(\arccos(y)) = y$ e $\arccos(\cos(x)) = x$.*
A inversa NÃO é $g(x) = 1/\cos(x)$.

Lema 17 (propriedades da função inversa) *Seja $f : X \to Y$ uma função bijetiva.*
(a) $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in Y$;
(b) $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in X$.

Prova: Imediata pela definição da inversa. ∎

De fato, estas duas propriedades caracterizam a inversa, conforme veremos no próximo lema.

Lema 18 (caracterização da função inversa) *Seja $f : X \to Y$ uma função* **qualquer**. *Se existem $g, h : Y \to X$ satisfazendo:*
(a) $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in X$ e
(b) $(f \circ h)(y) = y$ para todo $y \in Y$,
então f é bijetiva e $g = h = f^{-1}$.

Prova: Seja I_X a identidade em X e I_Y a identidade em Y.

Note que, se $r \circ s$ é injetiva, então s é injetiva. E se $r \circ s$ é sobrejetiva, então r é sobrejetiva. Como I_X é injetiva, e I_Y é sobrejetiva, podemos concluir que f é bijetiva e f^{-1} está bem definida. Assim,

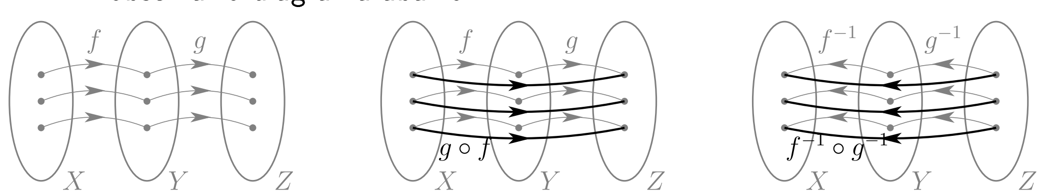
$$\begin{array}{lclcl} g \circ f = I_X & \Rightarrow & g \circ f \circ f^{-1} = I_X \circ f^{-1} & \Rightarrow & g = f^{-1} \quad \text{e} \\ f \circ h = I_Y & \Rightarrow & f^{-1} \circ f \circ h = f^{-1} \circ I_Y & \Rightarrow & h = f^{-1}. \end{array}$$

∎

Corolário 5 *Se f é bijetiva, então f^{-1} é bijetiva e $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Lema 19 (inversa da composta) *Se $f : Y \to Z$ e $g : X \to Y$ são invertíveis então $f \circ g$ também o é e $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.*

Prova: Basta observar o diagrama abaixo.



∎

Vamos agora particularizar para o caso em que a função é uma TL. Para isto precisamos que ela seja uma bijeção.

Lema 20 (propriedades da inversa de TL) *Sejam $S, T : U \to V$ é transformações lineares bijetivas (ou invertíveis), então:*
(a) T^{-1} também é linear;
(b) U e V têm a mesma dimensão;
(c) $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Prova:

(a) Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}_1 = T^{-1}(\mathbf{v}_1), \mathbf{u}_2 = T^{-1}(\mathbf{v}_2)$.
Então, pela linearidade de T, $T(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2) = \alpha T(\mathbf{u}_1) + \beta T(\mathbf{u}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$.
Logo $T^{-1}(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = T^{-1}(T(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2)) = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 = \alpha T^{-1}(\mathbf{v}_1) + \beta T^{-1}(\mathbf{v}_2)$.

(b) Pelo Lema 14, como T é injetiva, $\dim \mathrm{Nuc}(T) = 0$; como T é sobrejetiva, $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim(V)$. Pelo Teorema 4 (TNI), $\dim(U) = \dim \mathrm{Nuc}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = 0 + \dim(V) = \dim(V)$.

(c) segue pelo Lema 19. ■

O próximo teorema caracteriza as TLs (de V em V) que possuem inversa como aquelas com núcleo trivial. É resultado muito importante no curso.

Teorema 5 (inversa e o núcleo) *Suponha V de dimensão finita. Se $T : V \to V$ então T possui inversa se, e somente se, $Nuc(T) = 0$.*

Prova: Se T possui inversa então é injetiva e pelo Lema 14 o núcleo é nulo.

Suponha que $\mathrm{Nuc}(T) = 0$. Pelo Lema 14, T é injetiva. Pelo Teorema 4 (TNI), $\dim(V) = \dim(\mathrm{Nuc}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T))$ (pois $\dim \mathrm{Nuc}(T) = 0$). Logo T é sobrejetiva.

Como T é injetiva e sobrejetiva segue que T é invertível. ■

Exemplo 167 *Determine, se for possível, a inversa das transformações geométricas no plano:*

(a) rotação de 25 graus;

(b) reflexão em torno da reta $2x - 3y = 0$;

(c) projeção na reta $5x - 2y = 0$.

(a) inversa é rotação de $360 - 25 = 335$ graus pois rodar 25 graus e depois rodar 335 graus equivale a rodar 360 graus, isto é, ficar parado.

(b) inversa é refletir novamente em torno da mesma reta ($2x-3y = 0$) pois duas reflexões seguidas cancelam uma a outra;

(c) não possui inversa pois os vetores perpendiculares a reta $5y - 2y = 0$ farão parte do núcleo; como ele é não-trivial, esta TL não possui inversa.

4.4 Exercícios de Transformações Lineares

4.4.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1. Considere $I : V \to V$ e $T : V \to W$ definidas por $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ e $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in V$.

(a) $\mathrm{Nuc}(I) =$ __$(V, W, \mathbf{0})$;
(b) $\mathrm{Im}(I) =$ __$(V, W, \mathbf{0})$;
(c) $\mathrm{Nuc}(T) =$ __$(V, W, \mathbf{0})$;
(d) $\mathrm{Im}(T) =$ __$(V, W, \mathbf{0})$;

Exercício 2. Determine se são lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

(a) $T(x, y) = (x + 2y,\ xy)$;
(b) $T(x, y) = (x + 2y,\ x - y)$;
(c) $T(x, y) = (x^2 + 2y,\ y)$;
(d) $T(x, y) = (x + 2y,\ 0)$;
(e) $T(x, y) = (x + 2,\ 2x - y)$.

Exercício 3. Seja $T : V \to W$ uma TL. Para cada pergunta, escolha uma das opções.

(i) a definição de $\mathrm{Nuc}(T)$ é:

(A) $\{\mathbf{w} \in W |\ T(\mathbf{0}) = \mathbf{w}\}$;
(B) $\{\mathbf{w} \in W |\ T(\mathbf{w}) = \mathbf{0}\}$;
(C) $\{\mathbf{v} \in V |\ T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$;

[0] 19.jul.2008 16h

(D) $\{\mathbf{v} \in V |\ T(\mathbf{0}) = \mathbf{v}\}$.

(ii) a definição de $\mathrm{Im}(T)$ é:

(A) $\{\mathbf{w} \in W |\ \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ para algum } \mathbf{v} \in V\}$;

(B) $\{\mathbf{w} \in W |\ \mathbf{v} = T(\mathbf{w}) \text{ para algum } \mathbf{w} \in W\}$;

(C) $\{\mathbf{v} \in V |\ \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ para algum } \mathbf{v} \in V\}$;

(D) $\{\mathbf{v} \in V |\ \mathbf{v} = T(\mathbf{w}) \text{ para algum } \mathbf{w} \in W\}$;

(iii) T é sobrejetora se, e somente se:

(A) $\dim(V) = \dim(W)$;

(B) $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = \dim(V)$;

(C) $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = 0$;

(D) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(W)$;

(E) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 0$.

(iv) T é injetiva se, e somente se:

(A) $\dim(V) = \dim(W)$;

(B) $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = \dim(V)$;

(C) $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = 0$;

(D) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(W)$;

(E) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 0$.

Exercício 4. Seja $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^{10}$ linear.

(a) se $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = 0$ então $\dim(\mathrm{Im}(T)) =$___;

(b) se $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = 3$ então $\dim(\mathrm{Im}(T)) =$___;

(c) se $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = 5$ então $\dim(\mathrm{Im}(T)) =$___;

Exercício 5. Determine $\dim(\mathrm{Im}(T))$ sabendo que:

(a) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ com $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = 3$.

(b) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ com T injetiva;

Exercício 6. Determine $\dim(\mathrm{Nuc}(T))$ sabendo que:

(a) $T : V \to W$ com T sobrejetiva, $\dim(V) = 5, \dim(W) = 3$;

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sabendo que existe a inversa de T.

Exercício 7. Determine se são V ou F as seguintes afirmativas sobre TLs:

(a) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ pode ser injetiva;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ com $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ é injetiva.

(c) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisfaz $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ então T é linear.

(d) Se T é injetiva então não existe $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ tal que $T(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$.

(e) se $T : V \to V$ possui inversa então $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = \dim(V)$.

Exercício 8. Considere $D^2 : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definido por $D^2(f) = f''$ (duas derivadas). Determine se fazem parte do $\mathrm{Nuc}(D^2)$: $3x^3 + x^2$? $3x - 4$? x^2? 5?

4.4.2 Problemas

Problema 1. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (4x - y + 2z,\ -2x + y/2 - z)$. Determine se:

(a) $(1, 2) \in \mathrm{Im}(T)$; (b) $(1, 4, 0) \in \mathrm{Nuc}(T)$; (c) $(0, 2, 2) \in \mathrm{Nuc}(T)$.

Problema 2. Determine o núcleo, a imagem e suas respectivas dimensões de:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z) = (x - y,\ -y - z\ , y - x,\ y + z)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y,\ z + 2x,\ 2y + z)$;

(c) $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, $L(a, b, c, d, e) = (a + 3c - e,\ c - d + e,\ a + 4c - d)$.

Problema 3. Calcule a imagem e o núcleo de cada uma das TLs abaixo:

(a) $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, definido por $T(p) = p''$ (segunda derivada).
(b) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(p) = p(3)$.
(c) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ definido por $(T(p))(x) = xp(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
(d) $T : \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ definida por $T(f) = f'$.

Problema 4. Explique em cada caso abaixo porque não existe uma TL:
(a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a origem;
(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ que seja injetiva;
(c) $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^6$ cujo núcleo seja igual a imagem;
(d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{Nuc}(T) = \langle (1,0,0,0),(0,1,0,0)\rangle$ e $\mathrm{Im}(T) = \langle (1,1,2),(2,2,4)\rangle$.

Problema 5. Em cada item dê um exemplo de TL satisfazendo as condições dadas.
(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leva $(-1,2)$ em $(1,0)$ e $(1,-1)$ em $(-1,-1)$;
(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que o núcleo é plano $\begin{cases} x+y+z=0 \\ z-w=0 \end{cases}$ e a imagem $\langle (1,-1,1),(1,2,3)\rangle$;
(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cujo núcleo seja dado pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = t+s \end{cases}$ e a imagem seja solução do sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z-w=0 \end{cases}$.

Problema 6. Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço dos polinômios de grau $\leq n$. Determine se é linear:
(a) $L : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4$ definida por $(L(p))(x) = p(x+1)$;
(b) $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $(L(p))(x) = p'(x)+1$;
(c) $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $(L(p))(x) = cx^2+ax+b$ se $p(x) = ax^2+bx+c$.

Problema 7. Seja $W = \{p \in \mathcal{P}_3 |\ p(0) = 0\}$ e $D : W \to \mathcal{P}_3$ definida por $Dp = p'$. Mostre que D é injetiva.

Problema 8. Seja $D^2 : \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ definida por $D^2 f = f''$ (derivada segunda). Calcule uma base para o núcleo de D^2.

Problema 9. Seja $T(f)(x) = f(2x+2)$. Mostre que $S(f)(x) = f(x/2-1)$ é a TL inversa.

4.4.3 Desafios

Desafio 1. (Shilov p.114 #6 e #15) No espaço de todos os polinômios em x (que é um espaço de dimensão infinita) considere D o operador derivação com relação a x e S o operador multiplicação por x.

(a) Mostre que $DS - SD = I$; Isto significa que $DS \neq SD$.

(b) Utilize propriedades do traço (soma dos elementos da diagonal da matriz) para mostrar que em dimensão finita não existem transformações lineares A, B tais que $AB - BA = I$.

Desafio 2. (Shilov p.117 #36) Mostre que: (a) $\mathrm{Nuc}(T) \supset T(V)$ se, e somente se, $T^2 = 0$;
(b) $\mathrm{Nuc}(T) \subset \mathrm{Nuc}(T^2) \subset \mathrm{Nuc}(T^3) \cdots$.
(b) $\mathrm{Im}(T) \supset \mathrm{Im}(T^2) \supset \mathrm{Im}(T^3) \cdots$.

Desafio 3. Seja $T : V \to V$ linear com V de dimensão finita. Suponha que $\dim \mathrm{Im}\, T = \dim \mathrm{Im}\, T^2$. Prove que $\mathrm{Nuc}\, T \cap \mathrm{Im}\, T = \mathbf{0}$.

Desafio 4. Considere $T : V \to W$ linear, $X \subset V$ e $U \subset W$ subespaços vetoriais.

(a) Defina $T(X) = \{T(\mathbf{v}) \in W |\ \mathbf{v} \in X\}$ (imagem direta de X por T). Mostre que $T(X)$ é um subespaço vetorial de W.

(b) Defina $T^{-1}(U) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) \in U\}$ (imagem inversa de U por T). Mostre que $T^{-1}(U)$ é um subespaço vetorial de V.

Desafio 5. Encontre uma base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Qual a dimensão deste espaço?

Desafio 6. Encontre uma base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Qual a dimensão deste espaço?

Desafio 7. (a) Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Prove que existem $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ que não sejam todos nulos tais que $a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + a_4 T^4 = 0$.

Dica: $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) = 4$, o conjunto $\{I, T, T^2, T^3, T^4\}$ é LI?.

(b) Considere $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Prove que existe um polinômio $p(x)$ não-degenerado de grau n^2 tal que $p(T) = \mathbf{0}$.

Obs: Definimos $p(T)$ da seguinte forma. Se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^k$, definimos $p(T)$ como a matriz $a_0 I + a_T + \cdots + a_n T^k$.

Dica: Generalização de (a).

Desafio 8. Dado um espaço vetorial V, denotamos por V^* o conjunto $\mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ das transformações lineares de V em $\mathbb{R}$. Chamamos os elementos de V^* como **formas lineares** ou **funcionais lineares** em V. Já sabemos que este é um espaço vetorial pois V e $\mathbb{R}$ são espaços vetoriais. Suponha que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ é base de V. Prove que:

(a) $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ definido por $T_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$ é base de V^*. O símbolo δ_{ij} é conhecido como delta de Kronecker e vale 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$.

(b) $\dim(V) = \dim(V^*)$. Dica: Use (a).

Desafio 9. Considere U e V espaços de dimensão finita. Determine base e dimensão de $\mathcal{L}(U; V)$.

Desafio 10. (desigualdade de Sylvester) Sejam $T, S : V \to V$ com $\dim(V) = n$, $r_T = \dim \operatorname{Im}(T)$, $r_S = \dim \operatorname{Im}(S)$, $r_{ST} = \dim \operatorname{Im}(ST)$. Prove que

$$r_S + r_T - n \leq r_{ST} \leq \min(r_S, r_T).$$

4.4.4 Extras

Extra 1. Seja $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^{10}$ linear.

(a) o maior valor possível para $\dim(\operatorname{Nuc}(T))$ é ___;

(b) o maior valor possível para $\dim(\operatorname{Im}(T))$ é ___.

Extra 2. Determine $\dim(\operatorname{Im}(T))$ sabendo que:

(a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ e que a equação $T\mathbf{v} = \mathbf{w}$ possui uma única solução para um determinado $\mathbf{w}$.

(b) $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ com T sobrejetiva;

Extra 3. Determine $\dim(\operatorname{Nuc}(T))$ sabendo que:

(a) $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^8$ com $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 3$;

(b) $T : V \to W$ com T injetiva;

Extra 4. Considere $T_1, T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $T_1(x, y, z) = (x - y + z,\ 2x - y)$ e $T_2(x, y, z) = (3x - 2y + z,\ x - z)$. Determine uma base para $\operatorname{Nuc}(T_1) \cap \operatorname{Nuc}(T_2)$.

Extra 5. Determine o núcleo, a imagem e suas respectivas dimensões de:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, $T(x, y, z) = (z - x,\ 2y + x,\ 3z - 2x + 2y,\ 2y - x,\ 2y - z)$;

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z, w) = (x + z + w,\ 2y - x,\ x + 2y + 2z + aw)$ para todo $a \in R$;

(c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $L(x, y, z) = (2x - y + z,\ y - z,\ 4x - y + z,\ 2x - 2y + 2z)$;

(d) $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $L(x, y, z, w) = (x - y + z - 3w,\ 2x + y - z + w,\ 3x - 2w)$;

Extra 6. Explique em cada caso abaixo porque não existe uma TL:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que seja sobrejetiva;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja gerado pelo vetor $(1, 2, 1)$;

(c) $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja igual a imagem;

Extra 7. Em cada item dê um exemplo de TL satisfazendo as condições dadas.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $x = 2y$;

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja imagem seja a reta $2x + y = 0$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo seja o plano $x + y - z = 0$ e a imagem seja a reta $(x(t), y(t), z(t)) = (-t, 0, t)$;

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cujo núcleo seja gerado por $(1, 1, 1)$ e a imagem seja o hiperplano $x + y + z = 0$;

(e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0) = (1, 1)$ e cujo núcleo seja o eixo y;

(f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 0) = T(0, 0, 1) = T(1, 0, -1) = (1, 1, 1)$;

(g) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo seja gerado por $(1, 1, 1)$ e a imagem seja o plano $x+y+z = 0$;

(h) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 1) = (1, 1, 1)$ e tenha como núcleo o plano $x + z = 0$;

(i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 1) = (1, 1, 1)$ e tenha como imagem o plano $x + z = 0$;

(j) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cujo núcleo seja $\langle(1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\rangle$ e a imagem o plano dado por $(x(s, t), y(s, t), z(s, t), w(s, t)) = (-s, t, s, s + t)$;

(k) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{Nuc} T = \langle(0, 1, 0)\rangle$ e $\operatorname{Im} T = \langle(1, 1, -1), (1, 0, 1)\rangle$. T é injetiva?

Extra 8. Mostre que a composição de duas TLs:

(a) é uma TL;

(b) injetivas é uma TL injetiva.

Extra 9. Seja $T : V \to W$ linear. Prove que:

(a) $T(0) = 0$;

(b) $\operatorname{Nuc}(T)$ é subespaço vetorial de V;

(c) $\operatorname{Im}(T)$ é subespaço vetorial de W.

(d) se T é injetiva, T leva conjunto LI em conjunto LI.

(e) se T possui inversa, T leva base em base.

Extra 10. (Shilov p. 113 #3) Determine se são lineares as seguintes operações no espaço $\mathcal{P}$ de todos os polinômios em x:

(a) multiplicação por x;

(b) multiplicação por x^2;

(c) derivada em relação a x.

Extra 11. Determine se $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1}$, definido por $T(p)(x) = xp(x)$ (multiplica o polinômio por x, aumentando seu grau). é linear e injetiva. Por exemplo se $p(x) = x^2 + 1$, $T(p)(x) = x^3 + x$.

Extra 12. Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço dos polinômios de grau $\leq n$. Determine se é linear:

(a) $L : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ definida por $L(p) = (p(0) + p(1))/2$.

(b) $L : \mathcal{P}_5 \to \mathcal{P}_5$ definida por $(L(p))(x) = p(x) + 2$;

Extra 13. Sejam $T, S : \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ definida por $T(f)(x) = 1 + f(x)$ e $S(f)(x) = f(x + 1)$

(a) T e S são lineares?

(b) Determine, para as que são lineares, o núcleo e a imagem.

Extra 14. Sabemos que se $a, b \in \mathbb{R}$ então $ab = 0$ implica que $a = 0$ ou $b = 0$. Vamos ver que para TLs isto não é verdade.

(a) Considere projeções P_x no eixo x e P_y no eixo y em $\mathbb{R}^2$. Prove que embora nenhuma delas seja nula, $P_x P_y = P_y P_x = \mathbf{0}$;

(b) Considere D_{xx} o operador segunda derivada e D_{xxx} o operador terceira derivada. Prove que em $\mathcal{P}_4$ (polinômios de grau máximo igual a 4) $D_{xx}D_{xxx} = \mathbf{0}$ embora nem nem D_{xx} nem D_{xxx} sejam nulos.

Obs: em álgebra quando acontece de $ST = 0$ com S e T não-nulos dizemos que existe um divisor de 0.

Capítulo 5

Matrizes

Até este momento, matrizes apareceram principalmente como um artifício para resolução de sistemas lineares: ao invés de se trocar linhas de um sistema, trocam-se linhas da matriz que o representa, etc. Neste capítulo as matrizes como objetos matemáticos independentes. Neste capítulo apresentamos, para espaços vetoriais de dimensão finita, a associação entre:

- TLs a matrizes e
- matrizes a TLs.

Nesse sentido, toda TL é dada por uma matriz e o estudo de TLs pode ser reduzido ao estudo de matrizes. A cada operação definida (no capítulo anterior) entre TLs corresponde uma operação entre matrizes:

- multiplicação de TL por escalar $\rightarrow$ produto escalar-matriz;
- soma de TLs $\rightarrow$ soma de matrizes;
- composição de TLs $\rightarrow$ produto matriz-matriz.

Desta associação, utilizando definições correspondentes com TLs, podemos ainda definir para **matrizes**:

- núcleo, nulidade, posto e imagem;
- inversa.

Principais resultados:
(a) como determinar núcleo e imagem de matrizes;
(b) interpretações do produto matriz-matriz;
(c) como calcular a inversa de uma matriz;
(d) matrizes de TLs geométricas;
(e) representação matricial de TLs e mudança de base.

5.1 Definições e Operações Básicas

Nesta seção definimos matrizes, sua correspondência com TLs, e operações de soma e produto por escalar. Mostramos que o conjunto de matrizes é um espaço vetorial com operações de soma e multiplicação por escalar.

[0]Versão 21.jul.2008 16h

Definição 61 (matriz) *Uma* ***matriz*** $m \times n$ *(m linhas e n colunas) sobre um conjunto de escalares (aqui neste texto $\mathbb{R}$) é um arranjo de mn elementos a_{ij} ($i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$) num retângulo:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Escrevemos também que $A = (a_{ij})$, onde o número de linhas e colunas fica subentendido pelo contexto.

Observação 37 *Para lembrar da convenção que matriz $m \times n$ significa m linhas e n colunas observe que quando queremos localizar uma letra numa página (arranjo retangular) falamos que ela está na linha m, coluna n: é natural dizer a linha primeiro.*

Definição 62 (matriz transposta) *A* ***transposta*** *de uma matriz $A = (a_{ij})$ é a matriz $B = (b_{ij}) = A^T$ dada por*

$$b_{ij} = a_{ji}, \text{ para todo } i, j.$$

Se A é $m \times n$ então A^T é $n \times m$ e

$$B = A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Note que $(A^T)^T = A$.

Definição 63 (espaço das matrizes) *Denotamos por $\mathcal{M}_{m\times n}$ o espaço (mais adiante, no Lema 24 da página 101, provamos que é um espaço vetorial) de matrizes com m linhas e n colunas.*

Podemos ver uma matriz como um conjunto de vetores dispostos em colunas ou linhas. Assim, dado $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, pensando em colunas (são n colunas),

$$A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix},$$

onde cada coluna é o vetor $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^m$. Pensando em linhas (são m linhas),

$$A = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_m \rightarrow \end{bmatrix},$$

onde cada linha é o vetor $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n$. Esta visão das matrizes é **muito** importante, entre outras razões (aguarde próximos capítulos), pois as operações de soma e produto são mais fáceis (e naturais) de serem definidas utilizando este ponto de vista.

Vamos começar revisitando a definição do produto matriz-vetor (já tínhamos visto duas interpretações distintas na página 42).

Definição 64 (produto matriz-vetor) *Seja* $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *e* $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. *Definimos* $A\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$, *o produto da matriz* A *pelo vetor* $\mathbf{w}$, *por*

$$A\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{v}_i.$$

Portanto o produto matriz-vetor é a combinação linear das colunas da matriz com coeficientes dados pelas coordenadas do vetor.

Lema 21 (linearidade do produto matriz-vetor) *Dados uma matriz* A, *vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *e escalar* k,

- $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$;
- $A(k\mathbf{u}) = kA\mathbf{u}$.

Prova: Basta escrever as coordenadas dos vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e aplicar a definição do produto matriz-vetor como combinação linear das colunas da matriz. Deixamos detalhes para o leitor. ■

Lema 22 (interpretação do produto matriz-vetor) *Seja* $A = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_m \rightarrow \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *e* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. *Então*

$$A\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{w} \end{bmatrix}.$$

Portanto cada entrada do produto matriz-vetor é o produto escalar (reveja Definição 26 na página 41) de $\mathbf{w}$ *com cada linha da matriz.*

Prova: Verificação deixada para o leitor. Basta explicitar em termos de coeficientes (a_{ij}) da matriz e do vetor $\mathbf{w} = (w_i)$. Ver Exemplo 168. ■

O produto matriz-vetor induz uma bijeção entre matrizes ($\mathcal{M}_{m\times n}$) e TLs ($\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$) conforme veremos no Lema 23.

Definição 65 (TL associada a uma matriz) *Dada* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, *definimos* $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ *por* $T_A(\mathbf{w}) = A\mathbf{w}$ *(produto matriz-vetor).* T_A *é linear pelo Lema 21.*

Observação 38 *Falamos, num abuso de linguagem, "dada a matriz* A, *considere a transformação linear* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*", utilizando o mesmo símbolo para a matriz e para a TL. O correto seria dizer "dada a matriz* A, *considere a transformação linear* T_A*". Abusamos também falando no "domínio e imagem de* A*", quando o correto seria "domínio e imagem de* T_A*".*

Exemplo 168 *Considere* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. *Determine* $T_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Utilizando a definição do produto matriz-vetor,

$$B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ 4x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ 5y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z \\ 6z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{bmatrix}.$$

É mais fácil (e é o que deve ser feito na prática) usar o Lema 22 e fazer produto escalar com linhas: $B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,2,3) \cdot (x,y,z) \\ (4,5,6) \cdot (x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{bmatrix}$.

De uma forma ou de outra, concluímos que $T_B(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z)$.

Observe que acabamos de demonstrar o Lema 22 para a matriz B.

Lema 23 (bijeção entre matrizes e TLs) *A função da Definição 65 que associa a cada matriz* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *a transformação linear* $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ *é uma bijeção.*

Prova: Vamos provar a injetividade. Suponha que $T_A = T_B$. Logo, dados vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$, $T_A(\mathbf{e}_i) = A\mathbf{e}_i = B\mathbf{e}_i = T_B(\mathbf{e}_i)$ para todo i. Agora, é claro que $A\mathbf{e}_i$ é a i-ésima coluna de A pois na combinação linear dos vetores colunas de A vai aparecer somente a i-ésima coluna. Do mesmo modo, $B\mathbf{e}_i$ é a i-ésima coluna de B. Concluímos que cada coluna de A é igual a cada coluna de B, isto é, $A = B$, provando a injetividade.

Para a sobrejetividade, considere $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Defina $\mathbf{v}_i = S(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Defina $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$. Agora, é claro que $A\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$. Logo $T_A(\mathbf{e}_i) = A\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i = S(\mathbf{e}_i)$. Como S e T_A são lineares e assumem os mesmo valores em todos os vetores da base, pelo Lema 11 da página 82, $S = T_A$. ■

Exemplo 169 *Determine a matriz associada a* $T(x, y, z, w) = (x - y + 2z, x + y, z + w)$.

Calcule $T(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 0)$, $T(0, 1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$, $T(0, 0, 1, 0) = (2, 0, 1)$, $T(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1)$. *Colocando estes vetores como colunas da matriz* A, *obtemos que*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos definir as operações abaixo utilizando as definições correspondentes (ver Definição 2 e Definição 4 na página 3) em $\mathbb{R}^n$: note que o sinal de soma dentro da matriz tem significado distinto do sinal de soma fora da matriz: trata-se de soma de vetores, num caso, e de soma de matrizes, no outro.

Definição 66 (soma de matrizes e multiplicação por escalar) *Sejam k um escalar e $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ cujas colunas são compostas por vetores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ e $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$, isto é,*

$$A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Define-se

$$A + B = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \text{ e } kA = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (k\mathbf{a}_1) & \cdots & (k\mathbf{a}_n) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Observação 39 *Poderíamos ter feito a definição usual equivalente, componente a componente,*

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ e } (kA)_{ij} = ka_{ij}.$$

Lema 24 (espaço vetorial das matrizes) *O conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}$ munido com as operações definidas acima é espaço vetorial.*

Prova: Uma matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}$ pode ser vista como um vetor em $\mathbb{R}^{m\times n}$ com entradas (a_{ij}). Vista deste modo, com operações definidas componente a componente, $\mathcal{M}_{m\times n}$ é igual a $\mathbb{R}^{m\times n}$. Como já sabemos que $\mathbb{R}^{m\times n}$ é um espaço vetorial, $\mathcal{M}_{m\times n}$ é um espaço vetorial. ■

5.2 Núcleo e Imagem

Define-se núcleo (ou kernel), imagem, posto e nulidade de uma matriz A através da transformação linear correspondente T_A da Definição 65.

Dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$, como determinar uma base para o núcleo e para a imagem de A?

(a) para o núcleo temos que resolver o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, o que é feito escalonando a matriz A.

(b) para a imagem, o conjunto $T_A(\mathbf{e}_j) = A\mathbf{e}_j = \mathbf{v}_j$, para $j = 1, \ldots, n$ (colunas de A), gera a imagem. Concluímos que as colunas de A geram $\mathrm{Im}(A)$. Uma base da imagem é obtida tomando-se um subconjunto das colunas de A. Para fazer isto aplicamos o Lema 6 da página 66, escalonando (não precisa ser totalmente escalonada) a matriz $A^T = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{v}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{v}_n \rightarrow \end{bmatrix}$.

Em resumo, para calcular o <u>núcleo escalonamos totalmente</u> a matriz A e resolvemos o sistema homogêneo, para calcular a <u>imagem escalonamos</u> (não é necessário escalonar totalmente) a matriz A^T.

Exemplo 170 *Determine uma base e dimensão do núcleo e da imagem de*
$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Para calcular o núcleo temos que resolver o sistema homogêneo $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. *Para isto, escalonando totalmente* A, *obtemos* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *São três variáveis livres. Com isso sabemos que o núcleo tem dimensão* 3. *Tomando* r, s, t *como parâmetros, obtemos que o núcleo é* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-s-t, s, -t, r, t)$. *Colocando* $r = 1$ *e* $s = t = 0$ *obtemos* $(0, 0, 0, 1, 0)$ *no núcleo. Colocando* $s = 1$ *e* $r = t = 0$ *obtemos* $(-1, 1, 0, 0, 0)$ *no núcleo. Colocando* $t = 1$ *e* $r = s = 0$ *obtemos* $(-1, 0, -1, 0, 1)$ *no núcleo. Portanto, uma base para o* $\mathrm{Nuc}(T)$ *é* $\{(0, 0, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0, 0), (-1, 0, -1, 0, 1)\}$.

Pelo TNI já sabemos que a dimensão da imagem é 5 *(número de colunas) menos a dimensão do núcleo* 3. *Logo a dimensão da imagem é* 2. *Para calcular uma base (e a dimensão também, caso tivéssemos começado por aqui) temos que escalonar* $A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Escalonando obtemos, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$. *Portanto, uma base para o* $\mathrm{Im}(T)$ *é* $\{(2, -1, 1, 0), (0, 3/2, -3/2, 1)\}$.

Exemplo 171 *Determine uma base e dimensão do núcleo e da imagem de*
$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Para calcular o núcleo temos que resolver o sistema homogêneo $B\mathbf{v} = \mathbf{0}$. *Para isto, escalonando totalmente* B, *obtemos* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. *São duas variáveis livres. Com isso sabemos que o núcleo tem dimensão* 2. *Tomando* s, t *como parâmetros, obtemos que o núcleo é* $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s, t, s, t)$. *Colocando* $s = 1$ *e* $t = 0$ *obtemos* $(1, 0, 1, 0)$ *no núcleo. Colocando* $t = 1$ *e* $s = 0$ *obtemos* $(0, 1, 0, 1)$ *no núcleo. Portanto, uma base para o* $\mathrm{Nuc}(T)$ *é* $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$.

Pelo TNI já sabemos que a dimensão da imagem é 4 *(número de colunas) menos a dimensão do núcleo* 2. *Logo a dimensão da imagem é* 2. *Para calcular uma base (e a dimensão também, caso tivéssemos começado por aqui) temos que escalonar* $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Escalonando obtemos, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. *Portanto, uma base para a* $\mathrm{Im}(T)$ *é* $\{(1, -1, 0), (0, -1, -1)\}$.

A relação entre linhas e colunas com núcleo e imagem motiva a próxima definição.

Definição 67 (espaço-linha e espaço-coluna) *O* ***espaço-coluna*** *de* A *é o espaço gerado pelas colunas de* A, *isto é, é igual* $\mathrm{Im}(A)$. *O* ***espaço-linha*** *de* A *é o espaço gerado pelas linhas de* A, *isto é,* $\mathrm{Im}(A^T)$.

Lema 25 (dimensão do espaço linha e coluna) *O dimensão do espaço-linha é igual a dimensão do espaço-coluna.*

Prova: Considere A com m linhas e n colunas. A dimensão do espaço-coluna é igual a $\dim(\mathrm{Im}(A))$. A dimensão do espaço-linha é o número k de linhas não-nulas após escalonar A. Como o sistema possui n variáveis e foi reduzido a k equações, concluímos que são $n-k$ variáveis livres, isto é, o $\mathrm{Nuc}(A)$ possui dimensão $n-k$. Pelo TNI, $\dim(\mathrm{Im}(A)) = n - \dim(\mathrm{Nuc}(A)) = n-(n-k) = k$. Ou seja, dimensão do espaço-coluna $= \dim(\mathrm{Im}(A)) = k =$ dimensão espaço-linha. ■

Como conseqüência deste lema, quando se resolve um sistema automaticamente obtemos o posto da matriz, a dimensão de sua imagem, que é igual ao número de linhas não-nulas da matriz escalonada.

5.3 Produto e Inversa

A operação de produto entre duas matrizes é conhecida dos alunos. Vamos introduzi-la de forma bastante distinta para depois re-interpretá-la de diversos modos, tal qual fizemos com o produto matriz-vetor na Definição 64 e no Lema 22 deste Capítulo.

Definição 68 (produto de matrizes) *Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times p}$ e $B \in \mathcal{M}_{p\times n}$. Considere T_A, T_B as TLs correspondentes. Por definição $T_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $T_A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$. Como a composição de TLs é uma TL, $S = T_A \circ T_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é TL. Pelo Lema 23, existe $C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que $S = T_C$. Definimos $AB = C \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Teremos então que $T_{AB} = T_A \circ T_B$.*

De forma mais curta, abusando a linguagem, $C = A \circ B$ (composição das TLs correspondentes a A e B).

Observação 40

- *As restrições nas dimensões das matrizes A e B para que faça sentido AB decorrem, de forma natural, da definição por composição de TLs: o contradomínio de A deve ser igual ao domínio de B;*
- *A não-comutatividade do produto de matrizes decorre da não-comutatividade da composição de funções;*
- *O produto de matrizes herda todas as propriedades da composição de TLs: distributividade, associatividade, etc.*
- *Porque não se define o produto de matrizes componente a componente? A resposta é que, embora se possa fazer isto, por não corresponder a nada especial em termos da TL correspondente, é uma definição estéril (sem conseqüências).*

A definição acima é elegante mas não explicita como calcular o produto matriz-matriz. Este é o conteúdo do próximo lema, que reduz o produto matriz-matriz a produtos matriz-vetor.

Lema 26 (produto matriz-matriz) *Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times p}$ e $B = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p\times n}$, com $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^p$. Então,*

$$AB = A \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A\mathbf{v}_1 & \ldots & A\mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Prova: Vamos determina quem são as colunas de AB. Para isto, basta aplicar AB em um vetor da base canônica $\mathbf{e}_j$. Note que $T_B(\mathbf{e}_j) = B\mathbf{e}_j = \mathbf{v}_j$ (j-ésima coluna de B). Pela Definição 68, $T_{AB}(\mathbf{e}_j) = T_A(T_B(\mathbf{e}_j)) = T_A(\mathbf{v}_j) = A\mathbf{v}_j$. Logo a j-ésima coluna de AB é $A\mathbf{v}_j$. ■

Observação 41 *Podemos definir as operações de soma e produto por escalar do mesmo modo que fizemos com o produto matriz-matriz: utilizando a bijeção entre matrizes e TLs. A soma de duas matrizes A, B seria definida com a matriz C tal que $T_C = T_A + T_B$ (a soma aqui é de TLs!).*
O produto do escalar k pela matriz A seria definida com a matriz C tal que $T_C = kT_A$ (o produto aqui é com uma TL!).
Desta forma teríamos que: $T_{A+B} = T_A + T_B$, $T_{kA} = kA$, $T_{AB} = T_A \circ T_B$.

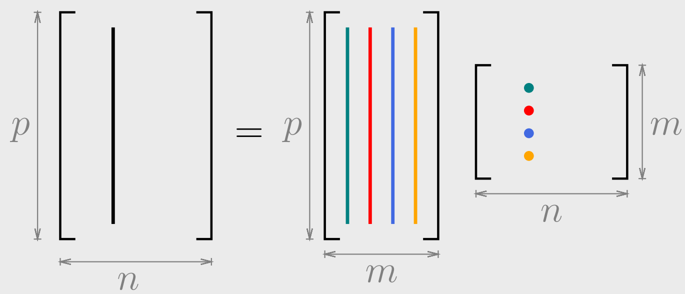
Vimos que (Definição 64 e Lema 22 deste capítulo) o produto matriz-vetor pode ser visto como:

(a) produto escalar com linhas da matriz, ou

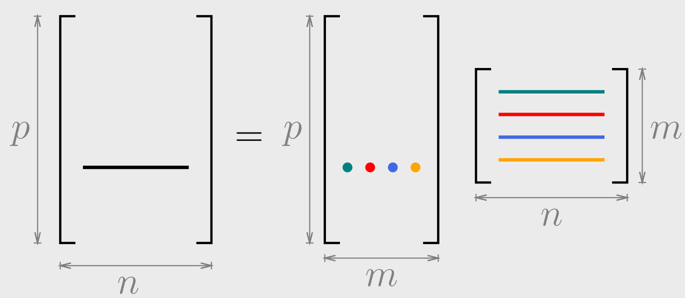
(b) combinação linear das colunas da matriz.

Vamos ver três interpretações para o produto matriz-matriz.

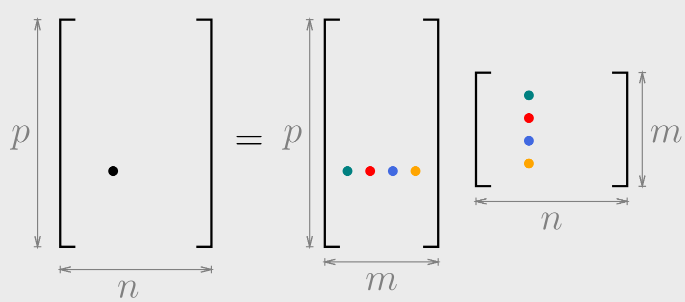
Lema 27 (interpretações do produto matriz-matriz) *Sejam A e B matrizes (de dimensões apropriadas para que esteja definido AB). Então:*
(a) colunas de AB são combinações lineares das colunas de A:



(b) linhas de AB são combinações lineares das linhas de B:



(c) entradas de AB são produtos escalares de linhas de A por colunas de B:



Prova: (a) segue do Lema 26 que colunas de AB são produto matriz-vetor de A com colunas de B. Como produto matriz-vetor é CL de colunas de A, segue o resultado. (b) segue de (a) se aplicarmos a transposição de matrizes dos dois lados; (c) segue do Lema 64 e da interpretação do produto matriz-vetor do Lema 22. ∎

Lema 28 (propriedades das operações com matrizes) *Dadas matrizes A, B, C e escalar k, sempre que o produto faça sentido, valerá as seguintes propriedades:*

$(kA)B = A(kB) = k(AB)$ *(associativa),*
$(AB)C = A(BC) = ABC$ *(associativa),*
$A(B + C) = AB + AC$ *(distributiva),*
$(A + B)C = AC + BC$ *(distributiva),*
$AB \neq BA$ *(não-comutativo)*
$(AB)^T = B^T A^T$,
$AB = 0 \quad \not\Rightarrow \quad A = 0 \text{ ou } B = 0$

Prova: Por ser enfadonha será omitida. Pode ser feito por aplicações apropriadas do Lema 21 e Lema 26 ou abrindo todas as matrizes em coordenadas. Outra opção é utilizar propriedades correspondentes de TLs do Lema 16 da página 88. ∎

Exemplo 172 *Para mostrar que o produto de matrizes não é comutativo de forma geral observe que*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Este exemplo também mostra que o produto ser zero não implica que um dos fatores é zero, ao contrário do que ocorre com número reais, onde $ab = 0$ implica que $a = 0$ ou $b = 0$.

Definição 69 (matriz identidade) *Definimos como matriz identidade I a matriz que corresponde a TL identidade $I \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ definida por $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Em termos de matriz, para toda matriz quadrada A, $AI = IA = A$. Portanto a matriz identidade é o elemento neutro para o produto de matrizes.*

Explicitamente, I será uma matriz diagonal com n 1's na diagonal, ou com os vetores da base canônica em cada coluna, isto é,

$$I = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 70 (matriz inversa e singular) *Diz-se que uma matriz A é* **invertível** *se existe B tal que $AB = BA = I$. Neste caso, denota-se $B = A^{-1}$.*

Caso A não seja invertível dizemos que A é ***singular***.

Observação 42 *Se A é quadrada, basta verificar que $AB = I$ ou que $BA = I$.*
A outra identidade segue.
Isto é **falso** *se a hipótese de A ser quadrada for relaxada.*

O próximo Lema relaciona o núcleo de uma matriz com a existência de inversa.

Lema 29 (núcleo e inversa de matriz) *A matriz quadrada A possui inversa se, e somente se, $Nuc(A) = \mathbf{0}$.*

Prova: Considere T_A a transformação linear associada a matriz A. Aplique o Teorema 5 da página 91. ∎

Como calcular a inversa de uma matriz qualquer?

Teorema 6 (algoritmo para calcular matriz inversa) *Seja A uma matriz quadrada.*

(a) Monte matriz estendida $[A|I]$;

(b) Escalone totalmente até obter a matriz identidade no lado esquerdo.

Caso isto seja possível, a inversa aparecerá do lado direito: $[I|A^{-1}]$.

Prova: Pela observação acima basta determinar $B = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ tal que $AB = I$.

Como $I = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$, queremos que

$$AB = A \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A\mathbf{v}_1 & \dots & A\mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Para isto temos que resolver n sistemas do tipo $A\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ para $i = 1, \dots, n$. Na Seção 2.7.2 na página 46, vimos como resolver simultaneamente sistemas cujo lado esquerdo é o mesmo. Monte a matriz ampliada $\left[\begin{array}{c|c} & \uparrow \quad \uparrow \\ A & \mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n \\ & \downarrow \quad \downarrow \end{array}\right] = [A|I]$ e a escalone-a totalmente, obtendo a matriz identidade à esquerda e a solução dos sistema no lado direito. Desta forma, após o escalonamento total, obteremos

$$\left[\begin{array}{c|c} & \uparrow \quad \uparrow \\ A & \mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n \\ & \downarrow \quad \downarrow \end{array}\right] = [A|I] \sim \left[\begin{array}{c|c} & \uparrow \quad \uparrow \\ I & \mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n \\ & \downarrow \quad \downarrow \end{array}\right] = [I|B] = [I|A^{-1}].$$

∎

Exemplo 173 *Considere* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Escalonando totalmente $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$, *obtemos* $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right]$. *Logo,* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.

Finalizamos esta Seção com definições úteis para a Seção Autovalores e Autovetores (matriz simétrica) e para Seção Produto Interno (matriz ortogonal).

Definição 71 (matriz simétrica) *Dizemos que A é* ***simétrica*** *se $(A^T) = A$.*

Note que a matriz tem que ser, necessariamente, quadrada para ser simétrica.

Exemplo 174 *São simétricas:* $\begin{bmatrix} k_1 & a & b \\ a & k_2 & c \\ b & c & k_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$.

Definição 72 (matriz ortogonal) *Dizemos que Q é* ***ortogonal*** *se $Q^TQ = I$ (identidade).*

Exemplo 175 *São ortogonais:* $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$.

5.4 Matriz em Blocos

Já haviamos visto uma matriz por colunas ou linhas. Podemos generalizar para blocos de tamanho qualquer. Apresentamos a divisão em 4 blocos mas podemos dividir num número arbitrário de blocos. É muito importante em linguagens de programação moderna (Fortran 2000 e Python por exemplo) e em programas de computação científica (Scilab, Matlab por exemplo) interpretar o produto e soma de matrizes por blocos. Um exemplo é considere a matriz A abaixo dividido em 4 blocos: $\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$. Definindo A_{ij} cada um destes blocos, $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$.

O resultado fundamental é apresentado no próximo lema, que mostra que podemos operar com os blocos como se fossem números, com o único cuidade de manter a ordem nos produtos pois o produto de matrizes não é comutativo.

Lema 30 (soma e produto de matrizes por blocos) *Sejam A e B matrizes divididas em blocos com* $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$ *e* $B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$.

Seja $k \in \mathbb{R}$, $kA = \left[\begin{array}{c|c} kA_{11} & kA_{12} \\ \hline kA_{21} & kA_{22} \end{array}\right]$.

Caso o tamanho dos blocos sejam compatíveis para que as somas que aparecem na fórmula sejam possíveis, $A + B = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ \hline A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{array}\right]$.

Caso o tamanho dos blocos sejam compatíveis para que os produtos que aparecem na fórmula sejam possíveis, $AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$.

Prova: Consulte a literatura. ■

Exemplo 176 *Suponha $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}$ tal que* $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ *com $B, C \in \mathcal{M}_{2\times 2}$. Note que o 0 aqui significa uma matriz com todas as entradas nulas de tamanho apropriado. Então* $A^2 = AA = \begin{bmatrix} B^2 & 0 \\ 0 & C^2 \end{bmatrix}$. *Suponha que B e C são invertíveis. Então* $A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$ *pois* $AA^{-1} = \begin{bmatrix} BB^{-1} & 0 \\ 0 & CC^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$.

Exemplo 177 *Suponha A, B, C quadradas,* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$. *Calcule M^2 e $2M$.*

Então $2M = \begin{bmatrix} 2A & 2B \\ 0 & 2C \end{bmatrix}$ *e* $M^2 = \begin{bmatrix} A^2 & AB + BD \\ 0 & C^2 \end{bmatrix}$.

Exemplo 178 *Suponha A, B quadradas, I matriz identidade com a dimensão correta em cada caso (qual deve ser? note que usamos mesmo símbolo com significado diferente, abuso comum de linguagem). Seja* $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$. *Calcule $M + N, MN, NM$.*

Então $M + N = \begin{bmatrix} A + I & 0 \\ 0 & B + I \end{bmatrix}$ *e* $MN = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = NM$.

5.5 Transformações Geométricas

Uma aplicação importante de matrizes é computação gráfica. Elas são utilizadas para se fazer transformações em imagens tais como ampliações e reduções, reflexão e rotação, projeção. Em todos os exemplos vamos utilizar o resultado que garante que basta saber o valor de uma TL em vetores da base para se conhecer em todos os vetores (Lema 11 da página 82).

Exemplo 179 (matriz de amplicação ou redução) *Determine a matriz que amplia todos os vetores do plano por um fator k.*

$A(1,0) = k(1,0) = (k,0)$, $A(0,1) = k(0,1) = (0,k)$. Logo, $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = kI$. Para ilustração do caso $k = 2$ veja Figura 7.3 na página 165.

Exemplo 180 (matriz de reflexão no eixo-x) *Determine a matriz que reflete os vetores do plano em torno do eixo-x.*

$A(1,0) = (1,0)$, $A(0,1) = (0,-1)$. Logo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Para ilustração veja Figura 7.1 na página 164.

Exemplo 181 (matriz de reflexão no eixo-y) *Determine a matriz que reflete os vetores do plano em torno do eixo-y.*

$A(1,0) = (-1,0)$, $A(0,1) = (0,1)$. Logo, $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 182 (matriz de reflexão na reta $y = -x$) *Determine a matriz que reflete os vetores do plano em torno da reta $y = -x$.*

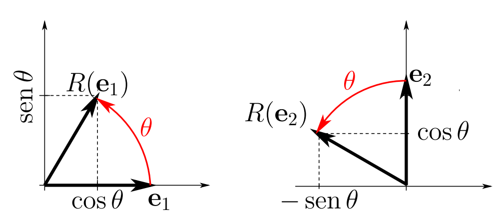
Com auxílio de um desenho, verifique que $A(1,0) = (0,-1)$, $A(0,1) = (-1,0)$. Logo, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 183 (matriz de reflexão no plano $z = 0$) *Determine a matriz que reflete os vetores do espaço em torno do plano $z = 0$.*

Como os vetores que estão no plano $z = 0$ tem como imagem eles mesmo, $A(1,0,0) = (1,0,0)$, $A(0,1,0) = (0,1,0)$. O vetor $(0,0,1)$ após reflexão se transformará em $-(0,0,1)$. Logo, $A(0,0,1) = (0,0,-1)$. Logo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 184 (matriz de rotação) *Determine a matriz R que roda os vetores do plano por um ângulo θ (no sentido trigonométrico, isto é, anti-horário).*

Observe na figura abaixo a imagem de $R(\mathbf{e}_1)$ e $R(\mathbf{e}_2)$.



Logo, $R(\mathbf{e}_1) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $R(\mathbf{e}_2) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$. Logo, $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Para ilustração de uma rotação de 23° veja Figura 7.2 na página 164.

Exemplo 185 (matriz de projeção no plano $z = 0$) *Determine a matriz que projeta os vetores do espaço no plano $z = 0$.*

Como os vetores que estão no plano $z = 0$ tem como imagem eles mesmo, $A(1,0,0) = (1,0,0)$, $A(0,1,0) = (0,1,0)$. O vetor $(0,0,1)$ quando projetado valerá $(0,0,0)$. Logo, $A(0,0,1) = (0,0,0)$. Logo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Para ilustração veja Figura 7.9 na página 169.

Exemplo 186 (matriz de projeção no plano $y = 0$) *Determine a matriz que projeta os vetores do espaço no plano $y = 0$.*

Como os vetores que estão no plano $y = 0$ tem como imagem eles mesmo, $A(1,0,0) = (1,0,0)$, $A(0,0,1) = (0,0,1)$. O vetor $(0,1,0)$ quando projetado valerá $(0,0,0)$. Logo, $A(0,1,0) = (0,0,0)$. Logo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5.6 Mudança de Base

Para se entender corretamente esta seção deve-se estudar no Capítulo de Espaços Vetoriais o conceito de coordenadas (veja Definição 48 na página 67) de um vetor numa base. Recordemos que as coordenadas são escritas como uma matriz com uma única coluna.

Já vimos como associar a TLs de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ uma matriz. Mais precisamente, o Lema 23 mostrou que existe uma bijeção entre $\mathcal{M}_{m\times n}$ (matrizes) e $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Vamos agora associar matrizes a TLs entre dois espaços vetoriais quaisquer de dimensão finita.

Definição 73 (matriz associada a TL) *Seja $T \in \mathcal{L}(U; V)$ e bases $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de U e γ de V. Denotamos por $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}$ a matriz de que representa T. Ela é definida por*

$$[T]_{\gamma\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ [T(\mathbf{u}_1)]_\gamma & \cdots & [T(\mathbf{u}_n)]_\gamma \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Desta forma, cada coluna da matriz $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}$ é formada pelas coordenadas do vetor $T(\mathbf{u}_i)$ na base γ.

Em que sentido a matriz $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}$ representa T?

A resposta está no próximo teorema, cujo resultado apresentamos no diagrama abaixo. O significado do diagrama (e do teorema) é que tanto faz, partindo de $\mathbf{u} \in U$, aplicar diretamente T e calcular suas coordenadas na base γ, ou calcular suas coordenadas na base β e aplicar a matriz $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\,\cdot\,]_\beta}"'] & V \arrow[d, "{[\,\cdot\,]_\gamma}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "{[T]_{\gamma\leftarrow\beta}}"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Teorema 7 (relação entre matriz e TL) *Seja $T \in \mathcal{L}(U;V)$ e bases β de U e γ de V. Então, para todo $\mathbf{u} \in U$,*
$$[T(\mathbf{u})]_\gamma = [T]_{\gamma\leftarrow\beta}[\mathbf{u}]_\beta.$$

Prova: Seja $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Então, pela linearidade do produto matriz-vetor (Lema 21), $[T(\mathbf{u})]_\gamma = [T]_{\gamma\leftarrow\beta}[\mathbf{u}]_\beta$ para todo $\mathbf{u} \in U$ se, e somente se, $[T(\mathbf{u}_j)]_\gamma = [T]_{\gamma\leftarrow\beta}[\mathbf{u}_j]_\beta$ para $j = 1, \ldots, n$.

Como $[\mathbf{u}_j]_\beta = \mathbf{e}_j$, $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}[\mathbf{u}_j]_\beta = [T]_{\gamma\leftarrow\beta}\mathbf{e}_j$, que é igual a j-ésima coluna de $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}$, que por definição é $[T(\mathbf{u}_j)]_\gamma$. Portanto, $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}[\mathbf{u}_j]_\beta = [T(\mathbf{u}_j)]_\gamma$. ■

Exemplo 187 *Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linear tal que $T(1,0) = (1,2,3)$ e $T(2,1) = (0,0,2)$. Considere as bases $\beta = \{(1,0),\ (2,1)\}$, $\gamma = \{(1,2,3),\ (0,0,2),\ (0,1,0)\}$, $\varepsilon_2 = \{(1,0),\ (0,1)\}$ e $\varepsilon_3 = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$. Determine $[T]_{\gamma\leftarrow\beta} =$ e $[T]_{\varepsilon_3\leftarrow\varepsilon_2}$.*

Como a base $\beta = \{(1,0),\ (2,1)\}$, precisamos calcular $[T(1,0)]_\gamma = [(1,2,3)]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e

$[T(2,1)]_\gamma = [(0,0,2)]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Logo,* $[T]_{\gamma\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ [T(1,0)]_\gamma & [T(2,1)]_\gamma \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Como a base $\varepsilon_2 = \{(1,0),\ (0,1)\}$, precisamos calcular $[T(1,0)]_{\varepsilon_3}$ e $[T(0,1)]_{\varepsilon_3}$. Embora não tenha sido fornecido $T(0,1)$ diretamente, note que $(0,1) = (2,1) - 2(1,0)$. logo, $T(0,1) = T(2,1) - 2T(1,0) = (0,0,2) - 2(1,2,3) = (-2,-4,-4)$. Portanto, $[T(1,0)]_{\varepsilon_3} =$ $[(1,2,3)]_{\varepsilon_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *e* $[T(0,1)]_{\varepsilon_3} = [(-2,-4,-4)]_{\varepsilon_3} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$. *Logo,* $[T]_{\varepsilon_3\leftarrow\varepsilon_2} =$
$\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ [T(1,0)]_{\varepsilon_3} & [T(0,1)]_{\varepsilon_3} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

Exemplo 188 *Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $T\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, ε base canônica de $\mathbb{R}^2$. Determine $[T]_{\varepsilon\leftarrow\varepsilon}$.*

Como $[T\mathbf{e}_1]_\varepsilon = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *e* $[T\mathbf{e}_2]_\varepsilon = [2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $[T]_{\varepsilon\leftarrow\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Exemplo 189 *Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $T\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$,*
$\beta = \{v_1, v_2\} \quad \text{com} \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1$. *Determine $[T]_{\beta\leftarrow\beta}$.*

Precisamos calcular $[T(\mathbf{v}_1)]_\beta$ e $[T(\mathbf{v}_2)]_\beta$.

Vemos que $[T(\mathbf{v}_1)]_\beta = [T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)]_\beta = [T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_2)]_\beta = [(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + (2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)]_\beta =$ $[3(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)]_\beta = [3\mathbf{v}_1]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Por outro lado, $[T(\mathbf{v}_2)]_\beta = [T(\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1)]_\beta = [T(\mathbf{e}_2) - 2T(\mathbf{e}_1)]_\beta =$
$[(2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) - 2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)]_\beta = [\mathbf{0}]_\beta = [0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Logo, $[T]_{\beta\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Notação 2 *Quando uma TL vai de um EV nele mesmo, $T : U \to U$, podemos escolher a mesma base β para o domínio e o contra-domínio. Podemos denotar $[T]_{\beta\leftarrow\beta}$ por $[T]_\beta$.*

Exemplo 190 *Seja* $\gamma = \{1, x, x^2\}$, *e* $D : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ *definido por* $D(f) = f'$ *(derivada). Determine* $[D]_\gamma$.

$$D(1) = 0 \text{ e } [0]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ D(x) = 1 \text{ e } [1]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ D(x^2) = 2x \text{ e } [2x]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $[D]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 191 *Seja* $\beta = \{\operatorname{sen} x, e^{2x}, \cos x\}$, $V = \langle \beta \rangle \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *e* $D : V \to V$ *definido por* $D(f) = f'$ *(derivada). Determine* $[D]_\beta$.

$$D(\operatorname{sen} x) = \cos x \text{ e } [\cos x]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ D(\cos x) = -\operatorname{sen} x \text{ e } [-\operatorname{sen} x]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$D(e^{2x}) = 2e^{2x}$ e $[2e^{2x}]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Logo* $[D]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Definição 74 (matriz de mudança de base) *Considere bases* β *e* γ *de* U *e a matriz identidade* I. *Como*

$$[I]_{\gamma \leftarrow \beta} [\mathbf{u}]_\beta = [I(\mathbf{u})]\gamma = [\mathbf{u}]\gamma,$$

a matriz $[I]_{\gamma \leftarrow \beta}$ *transforma as coordenadas de* $\mathbf{u}$ *na base* β *para coordenadas na base* γ. *Pela definição, se* $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$,

$$[I]_{\gamma \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ [I(\mathbf{u}_1)]_\gamma & \cdots & [I(\mathbf{u}_n)]_\gamma \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ [\mathbf{u}_1]_\gamma & \cdots & [\mathbf{u}_n]_\gamma \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Exemplo 192 *Considere as bases de* $\mathbb{R}^2$: *canônica* ε e $\beta = \{(1, 2), (3, 4)\}$.

É imediato que

$$[I]_{\varepsilon \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ [(1, 2)]_\varepsilon & [(3, 4)]_\varepsilon \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Se quisermos $[I]_{\beta \leftarrow \varepsilon}$, *pelo Corolário 6 mais adiante, basta inverter a matriz acima.*

Observação 43 *Do exemplo anterior observamos que cálculo da matriz mudança de base da uma base* β *qualquer para canônica* ε *é muito fácil. A matriz de mudança inversa pode ser obtida invertendo esta matriz. Esta é uma importante conseqüência do próximo lema.*

Lema 31 (relaçao entre produto de matrizes e composição de TLs) *Dados $T \in \mathcal{L}(U;V)$ e $S \in \mathcal{L}(V;W)$, e bases β, γ, δ de U, V, W, conforme indicado no diagrama abaixo,*

$$[S]_{\delta\leftarrow\gamma}[T]_{\gamma\leftarrow\beta} = [S\circ T]_{\delta\leftarrow\beta}.$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend left, "S\circ T"] \arrow[d, "{[\,\cdot\,]_\beta}"] & V \arrow[r, "S"] \arrow[d, "{[\,\cdot\,]_\gamma}"] & W \arrow[d, "{[\,\cdot\,]_\delta}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "{[T]_{\gamma\leftarrow\beta}}"'] \arrow[rr, bend right, "{[S\circ T]_{\delta\leftarrow\beta}}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "{[S]_{\delta\leftarrow\gamma}}"'] & \mathbb{R}^p
\end{tikzcd}$$

Prova: Omitimos. ■

Corolário 6 (inversa da mudança de base) *Considere bases β e γ de U e a matriz identidade I. Então a matriz mudança de base $[I]_{\gamma\leftarrow\beta}$ é igual a $[I]^{-1}_{\beta\leftarrow\gamma}$ (inversa).*

Qual a relação entre matrizes que representam a mesma TL? Vamos simplificar e considerar o caso em que $T \in \mathcal{L}(U;U)$ (mesmo espaço). Considere bases β e γ de U. Qual a relação entre as matrizes $[T]_{\gamma\leftarrow\gamma}$ e $[T]_{\beta\leftarrow\beta}$?

Definição 75 (matrizes semelhantes) *Dizemos que duas matrizes A e B são semelhantes quando existe uma matriz invertível (quadrada) P tal que $PAP^{-1} = B$.*

Lema 32 (matrizes da mesma TL) *Considere $T \in \mathcal{L}(U;U)$ e bases β e γ de U. Então $[T]_{\gamma\leftarrow\gamma}$ e $[T]_{\beta\leftarrow\beta}$ são semelhantes com $P = [I]_{\beta\leftarrow\gamma}$ (matriz de mudança de base).*

Prova: Como $ITI = T$, aplicando o Lema 31 duas vezes, $[I]_{\beta\leftarrow\gamma}[T]_{\gamma\leftarrow\gamma}[I]_{\gamma\leftarrow\beta} = [T]_{\beta\leftarrow\beta}$.
Tomando $P = [I]_{\beta\leftarrow\gamma}$ e aplicando o Corolário 6, $P^{-1} = [I]_{\gamma\leftarrow\beta}$. ■

O que ocorre de forma geral é que fazendo uma escolha adequada da base, a matriz que representa a TL pode ser muito mais simples, como por exemplo diagonal. Como descobrir qual base fará isso? Este é o assunto do Capítulo Autovalores e Autovetores.

Para resumir o conteúdo desta Seção, observamos que as coordenadas de um vetor estão para o vetor assim com a matriz que representa uma TL está para a TL:

$$\frac{\text{coordenadas}}{\text{vetor}} = \frac{\text{matriz}}{\text{transformação linear}}.$$

5.7 Exercícios de Matrizes

5.7.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1. Qual(is) das seguintes propriedades do produto de matrizes são válidas:

[0]28.jul.2008 11h

(a) associatividade?
(b) comutatividade?
(c) distributividade?

Exercício 2. Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ então $(A+B)(A+B) =$ ____($A^2+2AB+B^2$, $A^2+AB+BA+B^2$)

Exercício 3. Seja A uma matriz e T_A a transformação linear induzida por A. O posto de A é igual a $\dim$ (___)($Nuc(T_A), Im(T_A)$).

Exercício 4. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é invertível então
(a) $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) =$ __; (b) $\dim(\mathrm{Im}(A)) =$ __;

Exercício 5. Considere $\varepsilon = \{(1,0),(0,1)\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^2$, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e a matriz que a representa nesta base $[T]_\varepsilon$.

(a) se $T(x,y) = (3x+7y,\ 5x-4y)$, então $[T]_\varepsilon = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$;

(b) se $T(x,y) = (y,\ -x)$, então $[T]_\varepsilon = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$;

(c) se $[T]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, então $T(x,y) = ($____, ____$)$;

(d) se $[T]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$, então $T(x,y) = ($____, ____$)$.

Exercício 6. O produto matriz-vetor pode ser visto como:
(a) combinação linear das ________(*linhas, colunas*) da matriz;
(b) produto escalar com as ________(*linhas, colunas*) da matriz.

Exercício 7. Sejam A e B matrizes (de dimensões apropriadas para que esteja definido AB). Então:
(a) colunas de AB são combinações lineares das ________(*linhas, colunas*) da matriz __(A, B).
(b) linhas de AB são combinações lineares ________(*linhas, colunas*) da matriz __(A, B).
(c) entradas de AB são produto escalar de ________ (*linhas, colunas*) de A por ________ (*linhas, colunas*) B.

Exercício 8. Considere uma matriz A com m linhas e n colunas. Determine se é verdadeiro ou falso:
(a) se $m > n$ então as colunas são LIs;
(b) se $m < n$ então o núcleo de A contém uma reta;

5.7.2 Problemas

Núcleo e Imagem e Inversa em $\mathbb{R}^n$

Problema 1. Para cada uma das matrizes abaixo, determine uma base e dimensão do núcleo e da imagem.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 2. Inverta as matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Problema 3. Encontre a representação matricial e inverta (se for possível) a TL: $T(x, y, z) = (x + z, x - z, y)$;

Problema 4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

(a) Calcule A^{-1}. (inversa)

(b) Determine $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ tais que: $A\mathbf{u} = \mathbf{e}_1, A\mathbf{v} = \mathbf{e}_2, A\mathbf{w} = \mathbf{e}_3$.

Problema 5. Determine a matriz inversa das matrizes formada por: blocos de zeros, matriz identidade e A (que não precisa ser invertível).

(a) $\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}$;

Problema 6. Seja $S = \begin{bmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{bmatrix}$ uma matriz de blocos. Calcule S^2.

Geometria e TLs

Problema 7. Este exercício é para ser feito com argumentos geométricos. Todas as transformações estão definidas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Seja P uma projeção ortogonal na reta r e R uma reflexão em torno da mesma reta r. Determine:

(a) $\mathrm{Im}(P) =$__$(\mathbf{0}, r, \mathbb{R}^2)$; (b) $\mathrm{Nuc}(R) =$__$(\mathbf{0}, r, \mathbb{R}^2)$; (c) $PP =$__$(P, R, I, 0)$;

(d) $RR =$__$(P, R, I, 0)$; (e) $RP =$__$(P, R, I, 0)$; (f) $PR =$__$(P, R, I, 0)$;

(g) de forma geral P^n e R^n com $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Problema 8. Calcule uma base para o núcleo e a imagem de uma projeção ortogonal no plano xz (gerado pelos eixos x e z) em $\mathbb{R}^3$.

Mudança de bases

Problema 9. Considere as bases de $\mathbb{R}^2$: $\alpha = \{(6, 11), (2, 4)\}$ $\varepsilon = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

(a) Calcule a matriz mudança de base $[I]_{\varepsilon \leftarrow \alpha}$.

(b) Explique como determinar $[I]_{\alpha \leftarrow \varepsilon}$ usando (a). (Não faça as contas.)

(c) Verifique que $[I]_{\alpha \leftarrow \varepsilon} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -11/2 & 3 \end{bmatrix}$

Problema 10. Seja $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1), (1, -1, 0)\}$.

(a) Calcule $[I]_{\varepsilon \leftarrow \beta}$ e $[I]_{\beta \leftarrow \varepsilon}$.

(b) Se $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$, calcule $[\mathbf{v}]_\beta$

(c) se $[\mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ determine $[\mathbf{w}]_\varepsilon$.

(d) se $T(x, y, z) = (x - z, -z, y + 2z)$, determine $[T]_\beta$.
Dica: $[T]_\beta = [I]_{\beta \leftarrow \varepsilon} [T]_\varepsilon [I]_{\varepsilon \leftarrow \beta}$

Problema 11. Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada na base canônica por $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Ache $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não-nulos tais que $T\mathbf{u} = 2\mathbf{u}$ e $T\mathbf{v} = -\mathbf{v}$;

(b) prove que $\beta = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é base de $\mathbb{R}^2$;

(c) determine $[T]_{\beta\leftarrow\beta}$. Note que nesta base a matriz que representa é mais simples (diagonal).

Problema 12. Considere três bases distintas $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ de um espaço vetorial de dimensão finita.

(a) determine $[I]_{\beta_1\leftarrow\beta_1}$;

(b) defina $A = [I]_{\beta_1\leftarrow\beta_2}$, $B = [I]_{\beta_2\leftarrow\beta_3}$, $C = [I]_{\beta_3\leftarrow\beta_1}$. Determine ABC.

Problema 13. Considere $V = \mathcal{P}_1$, o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 1 e as bases $\alpha = \{1 - x, 2x\}$ $\beta = \{1 + x, x\}$. Determine $[I]_{\alpha\leftarrow\beta}$.

Problema 14. Considere $W = \langle e^x, xe^x, x^2e^x\rangle$. Determine a matriz que representa $D : W \to W$ com $Df = f'$ nesta base.

Problema 15. Seja $\beta_1 = \{1, x\}$ base de $\mathcal{P}_1$ e $\beta_2 = \{1, x, x^2\}$ base de $\mathcal{P}_2$. Considere $S : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, definida por $S(p)(x) = xp(x)$. Assim, por exemplo se $p(x) = x + 1$, $S(p)(x) = x^2 + x$. Determine $[S]_{\beta_2\leftarrow\beta_1}$.

5.7.3 Desafios

Desafio 1. Suponha que B é a inversa de A^2. Mostre que A é invertível e determine A^{-1} em termos de A e B.

Desafio 2. Considere $T : V \to V$ linear e A uma matriz quadrada fixa. Se $[T]_\beta = A$ para qualquer base β de V então $T = \lambda I$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ (a trasnformação é um múltiplo da identidade).

Desafio 3. Seja J_n uma matriz quadrada $n \times n$ em que todas as entradas são iguais a 1. Mostre que $(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}J_n$.

Desafio 4. Prove que se A é invertível então $A + B$ é invertível se, e somente se, $I + BA^{-1}$ é invertível.

Desafio 5. Fixe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e defina $T, S : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathcal{M}_{n\times n}$ por $T(A) = AB - BA$ e $S(A) = BA$ para todo $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

(a) mostre que $\mathrm{Nuc}(T)$ é não-trivial. Conclua que T não é invertível;

(b) Mostre que $\mathrm{Nuc}(S) = \{0\}$ se, e somente se, B possui inversa.

Desafio 6. Para números reais vale a chamada lei do corte: se $ab = ac$ e $a \neq 0$ então $b = c$. Para matrizes isto não é válido.

(a) tome $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e determine $B, C \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ tal que $AB = AC$ e $B \neq C$;

(b) supondo que A é invertível, mostre que $AB = AC$ implica $B = C$.

Desafio 7. Seja $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma rotação em torno da origem com ângulo θ satisfazendo $0 \leq \theta < 2\pi$.

(a) se $\theta \neq 0$ existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \neq 0, R_\theta\mathbf{v} = \mathbf{v}$?

(b) se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \neq 0$, determine condições em θ para que $\mathbf{v}$ e $R_\theta\mathbf{v}$ sejam linearmente independentes.

Desafio 8. (Shilov p.114 #11) Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule A^n para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Desafio 9. (Shilov p.114 #5) Em $\mathbb{R}^3$ considere A uma rotação de 90° em torno do eixo-x e B uma rotação de 90° em torno do eixo-y e C uma rotação de 90° em torno do eixo-z. Mostre que:

(a) $A^4 = B^4 = C^4 = I$; (b) $AB \neq BA$; (c) $A^2B^2 = B^2A^2$.

5.7.4 Extras

Núcleo e Imagem e Inversa em $\mathbb{R}^n$

Extra 1. Para cada uma das matrizes abaixo, determine uma base e dimensão do núcleo e da imagem.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Extra 2. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & h & 7 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. Determine TODOS os valores de $h \in \mathbb{R}$ tais que o posto de A: (a) seja 1; (b) seja 2.

Extra 3. Inverta as matrizes: (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Extra 4. Encontre a representação matricial na base canônica e inverta (se for possível): $T(x, y, x) = (z, y + z, x + y + z)$.

Geometria e TLs

Extra 5. Determine a TL que representa uma reflexão em $\mathbb{R}^2$ em relação a reta $x + y = 0$.

Extra 6. Em cada item dê um exemplo de uma $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que seja uma:

(a) projeção sobre o plano $y = z$; (b) rotação de 45^0 em torno do eixo z.

Extra 7. Este exercício é para ser feito com <u>argumentos geométricos</u>. Todas as transformações estão definidas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Sejam:

– R uma reflexão em torno da reta r,
– P uma projeção ortogonal na mesma reta r, e
– Q uma projeção ortogonal na reta s perpendicular a reta r.

Determine:

(a) $PQ =$__$(\pm P, \pm Q, \pm R, \pm I, 0)$; (b) $QP =$__$(\pm P, \pm Q, \pm R, \pm I, 0)$;
(c) $QR =$__$(\pm P, \pm Q, \pm R, \pm I, 0)$; (d) $RQ =$__$(\pm P, \pm Q, \pm R, \pm I, 0)$.

Matrizes

Extra 8. Encontre uma P (não precisa calcular P^{-1}) tal que: $P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Dica: reveja o Problema 11.

Extra 9. Verifique se é subespaço vetorial o subconjunto das matrizes quadradas:

(a) triangulares superiores;
(b) diagonais;
(c) simétricas;
(d) determine bases para os os subconjuntos acima que sejam subespaços quando a matrize é 2×2 e 3×3.

Extra 10. Dê exemplos de matrizes em $\mathcal{M}_{2\times 2}$ tais que:

(a) $A^2 = -I$; (b) $B^2 = 0$ com $B \neq 0$;
(c) $C^2 = C$ com $C \neq I$; (d) $C^2 = I$ com $C \neq I$;

Extra 11.

(a) Encontre uma base de $\mathcal{M}_{2\times 3}$. Qual a dimensão deste espaço?

(b) De forma geral, determine base e dimensão de $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Extra 12. Considere W_1, W_2 subespaços das matrizes quadradas 4×4. Seja W_1 o subespaço das matrizes triangulares superiores e W_2 as matrizes triangulares inferiores. Prove que $W_1 \cap W_2$ é o subespaço das matrizes diagonais.

Extra 13. Considere V o espaço das matrizes diagonais 2×2 e as bases $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Determine $[I]_{\alpha\leftarrow\beta}$.

Extra 14. Considere $T : \mathcal{M}_{m\times n} \to \mathcal{M}_{n\times m}$ definida por $T(A) = A^T$.

(a) Determine $\mathrm{Nuc}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

(b) Determine se T é injetiva e se T é sobrejetiva.

Extra 15. Suponha que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ satisfaz $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ com $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e $i = 1, \ldots, n$. Defina $P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ e Σ uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal são $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Mostre que $AP = P\Sigma$.

Extra 16. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ Resolva a equaçao matricial (i.e. determine a matriz X) $AX + 2I = B$.

Extra 17.

Definição 76 (matriz nilpotente) *Dizemos que uma matriz quadrada N é **nilpotente** de ordem k se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N^k = 0$ e $N^{k-1} \neq 0$.*

(a) mostre $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é nilpotente;

(b) mostre que $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é nilpotente. Qual valor de k?

(c) Seja D o operador de derivação em $\mathcal{P}_n$ (polinômios de grau menor ou igual n). Mostre que D é nilpotente. Qual o valor de k?

(d) Mostre que $(I - N)^{-1} = I + N + N^2 + N^3 + \cdots + N^{k-1}$.

Mudança de bases

Extra 18. Considere as bases de $\mathbb{R}^3$: $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e $\beta = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ com $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$. Determine a matriz mudança de base $[I]_{\alpha\leftarrow\beta}$.

Extra 19. Considere as bases de $\mathbb{R}^3$: $\alpha = \{(1,0,-1),\ (1,2,3),\ (1,1,1)\}$, $\beta = \{(3,2,1),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$ $\varepsilon = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ (base canônica).

(a) determine as matrizes mudança de base $A = [I]_{\varepsilon\leftarrow\alpha}$ e $B = [I]_{\varepsilon\leftarrow\beta}$;

(b) escreva equações matriciais que determinem, como função de A, B, A^{-1}, B^{-1} (não calcule A^{-1}, B^{-1}, as matrizes mudança de base $[I]_{\alpha\leftarrow\varepsilon}$, $[I]_{\beta\leftarrow\varepsilon}$, $[I]_{\alpha\leftarrow\beta}$, $[I]_{\beta\leftarrow\alpha}$.

Extra 20. Seja $\alpha = \{(1,1,1), (-1,1,1), (0,-1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Determine uma base β tal que $[I]_{\alpha\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Extra 21. Considere as bases do $\mathbb{R}^2$: $\beta_1 = \{(-1,1), (1,1)\}$ e $\beta_2 = \{(0,2), (1,0)\}$. Se $[v]_{\beta_1} = (2,3)$ determine $[v]_{\beta_2}$.

Extra 22. Considere as bases de $\mathbb{R}^2$: $\alpha = \{(1,0),(0,2)\}$ e $\beta = \{(1,1),(2,1)\}$. Calcule a matriz mudança de base $[I]_{\beta \leftarrow \alpha}$.

Extra 23. Considere as bases do $\mathcal{P}_2$: $\alpha = \{1, x, x^2\}$ e $\beta = \{1+x, 1-x, x^2+1\}$. Determine $[I]_{\alpha \leftarrow \beta}$.

Extra 24. Seja D o operador derivada, isto é, $Df = f'$ definido em $W_i = \langle \beta_i \rangle$. Determine a matriz $[D]_{\beta_i}$ que representa $D : W_i \to W_i$ na base β_i:

(a) $\beta_1 = \{\cos x, \operatorname{sen} x\}$; (b) $\beta_2 = \{e^x, e^{2x}\}$; (c) $\beta_3 = \{1, x, e^x, xe^x\}$;

Extra 25. Seja D^2 o operador derivada segunda, isto é, $D^2 f = f''$ definido em $W_i = \langle \beta_i \rangle$. Determine a matriz $[D^2]_{\beta_i}$ que representa $D^2 : W_i \to W_i$ na base β_i:

(a) $\beta_1 = \{1, x, x^2\}$; (b) $\beta_2 = \{\operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(2x), \operatorname{sen}(3x)\}$.

Extra 26. Considere $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, definido por $T(p)(x) = p(x+1)$. Seja $\varepsilon = \{1, x, x^2\}$. Calcule $[T]_\varepsilon$.

Capítulo 6

Determinante

Vamos responder as seguintes perguntas sobre o determinante:

(a) O que é?

(b) Quais são suas propriedades?

(c) Como se calcula (Qual é a fórmula ou algoritmo para o cálculo)?

(d) Qual a utilidade?

Note que saber **o que é** não é o mesmo que saber **como** se calcula.

Vamos começar a responder a pergunta

O que é o determinante?

O determinante é uma função que associa a cada matriz quadrada A um número real denotado por $\det(A)$. Desta forma, $\det : \{\text{matrizes quadradas}\} \to \mathbb{R}$.

Para motivar começamos em dimensão 2, relacionando o determinante com área (com sinal) e, em dimensão 3, relacionando-o com volume (com sinal). Isto implicará em propriedades básicas do determinante. No caso geral invertemos o procedimento, definindo o determinante através de propriedades. Somente depois disso apresentaremos um algoritmo para o cálculo (e não uma fórmula).

Qual a utilidade do determinante?

(a) caracterizar matrizes não-invertíveis (isto é, as matrizes singulares) – fundamental para o Capítulo de Autovalores e Autovetores;
(b) relacionar áreas/volumes de regiões do plano/espaço após aplicação de uma função – fundamental em mudança de variáveis de integral de várias variáveis (o determinante jacobiano);
(c) explicitar solução de sistema linear (regra de Cramer) e fórmula da matriz inversa.

Neste Capítulo será muito importante a visão de uma matriz estruturada por colunas (ver página 98).

Algumas provas, ou partes de provas, foram omitidas (mais precisamente omitimos prova da existência e unicidade do determinante e que $\det(A) = \det(A^T)$). Uma excelente referência para estas demonstrações, acessível aos alunos neste nível, é o Jänich.

[0]Versão 22.jul.2008 19h

6.1 Motivação Geométrica

6.1.1 $\mathbb{R}^2$

Para motivar o assunto vamos apresentar uma definição (provisória) de determinante para matrizes 2×2 que é geométrica. Vamos interpretá-la e deduzir propriedades básicas.

Definição 77 (determinante de matriz 2×2) *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, *com* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. *Associamos a esta matriz o paralelogramo* P *com vértices na extremidade dos vetores* $\mathbf{0}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}$, *conforme indicado na Figura 6.1. Definimos o determinante de* A *como a área (com sinal) do paralelogramo* P.

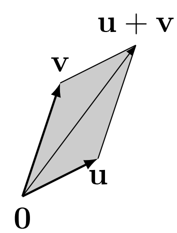


Figura 6.1: Paralelogramo Gerado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

Exemplo 193 *Considere* $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, *com* $a, b > 0$. *Calcule* $\det A$.

Pela definição, $\det A$ *é a área do retângulo com lados de tamanho* a *e* b. *Portanto,* $\det A = ab$. *Isto ilustra o caso geral: o determinante de uma matriz diagonal é igual ao produto dos elementos da diagonal.*

Exemplo 194 *Considere* $A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$, *com* $a, b > 0$. *Calcule* $\det A$.

Um desenho simples (faça) mostra que a área deste paralelogramo é igual a área do retângulo de lados a *e* b. *Logo,* $\det A = ab$. *Isto ilustra o caso geral: o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal.*

Exemplo 195 (colunas são múltiplos) *Considere* $A = \begin{bmatrix} a & ka \\ b & kb \end{bmatrix}$. *Calcule* $\det A$.

Como um vetor é múltiplo do outro, o paralelogramo fica degenerado num segmento de reta. Portanto $\det A = 0$.

Exemplo 196 (linhas são múltiplos) *Considere* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}$. *Calcule* $\det A$.

Seja $\mathbf{u} = (a, ka)$. *Se* $a = 0$ *então* $\det A = 0$ *(paralelogramo com uma aresta degenerada). Senão tome* $\lambda = b/a$. *É claro que* $\lambda\mathbf{u} = (b, kb)$, *o outro vetor. Como um é múltiplo do outro,* $\det A = 0$.

Observação 44 (área com sinal) *Vamos recordar que área com sinal aparece num primeiro curso de cálculo, quando a integral de uma função é associada a área (com sinal) entre a curva e o eixo-x: área acima do eixo é considerada positiva e abaixo é considerada negativa. Se a integral fosse simplesmente a área, $\int_a^b x^2\,dx$ e $\int_a^b -x^2\,dx$ seriam ambas estritamente positivas e portanto $\int_a^b x^2\,dx + \int_a^b -x^2\,dx \neq \int_a^b (x^2 - x^2)\,dx = \int_a^b 0\,dx = 0$. Com isto a integral não seria linear com relação a soma (integral da soma de duas funções é igual a soma das integrais).*

O que significa $\det(A) = 0$ em $\mathbb{R}^2$?

A resposta está no próximo lema.

Lema 33 (significado de determinante nulo em $\mathbb{R}^2$) *O* $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = 0$ *se, e somente se,* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são colineares (e portanto LDs).*

Prova: Segue das seguintes equivalências:

– determinante é nulo;

– a área do paralelogramo é nula;

– paralelogramo é degenerado num segmento de reta;

– $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são colineares. ■

Exemplo 197 $\det \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} = 0$ *pois 1ª* $coluna = -3 \times 2^{a}\ coluna$.

Exemplo 198 $\det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 0$ *pois 3ª* $coluna =$ *1ª* $coluna$.

No próximo lema vamos deduzir algumas propriedades diretamente da definição de determinante como área. Um fato surpreendente (que veremos na próxima Seção) é que podemos (e assim vamos fazer) inverter a ordem e utilizar estas propriedades para definir o determinante no caso geral em $\mathbb{R}^n$. Por isso a prova do lema é somente uma ilustração, pois não utilizaremos este lema na seqüência.

Lema 34 (propriedades do determinante de matriz 2×2) *Dados* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$*:*

(a) $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = 0$ *(se duas colunas são iguais então o determinante é zero);*

(b1) $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ k\mathbf{u} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ *(se multiplicarmos uma coluna por k o determinante será multiplicado por k);*

(b2) $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u}+\mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ *(determinante da soma de dois vetores é igual a soma dos determinantes);*

(b) $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ k\mathbf{u}+\mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ *e*

$\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & k\mathbf{v}+\mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ *(determinante é linear na primeira ou na segunda coluna);*

(c) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \det I = 1$ *(determinante da matriz identidade é 1).*

Prova: (a) se duas colunas são iguais o paralelogramo é degenerado e portanto a área é igual a zero.

(c) o paralelogramo com arestas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ é um quadrado unitário, que possui área 1.

Para os ítens (b1) e (b2) vamos apresentar um argumento convincente, através de duas figuras que não representam todos os casos possíveis.

(b1) conforme indicamos na Figura 6.2, se multiplicamos o vetor $\mathbf{u}$ por 2 duplicamos a área, por 3 triplicamos a área e assim por diante. O mesmo ocorre com frações, como por exemplo multiplicando $\mathbf{u}$ por $3,5$.

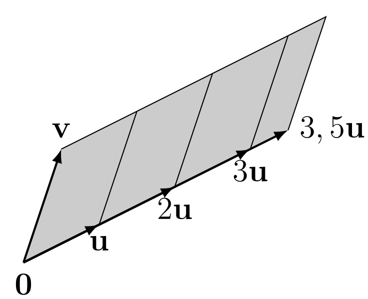


Figura 6.2: Produto por Escalar e Mudança de Área

(b2) observe a Figura 6.3. Queremos provar que a soma das áreas dos dois paralelogramos menores é igual a área do maior. Observe que os três possuem a aresta da base $\mathbf{w}$ em comum. Como a área é base vezes altura, basta comparar as alturas. As alturas são as projeções de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ na direção perpendicular a $\mathbf{w}$. Por definição de soma de vetores, a projeção de $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ é igual a projeção de $\mathbf{u}$ mais a projeção de $\mathbf{v}$. logo a altura do paralelogramo maior é igual a soma das alturas dos menores. Concluímos o resultado.

(b) segue de (b1) e (b2). ∎

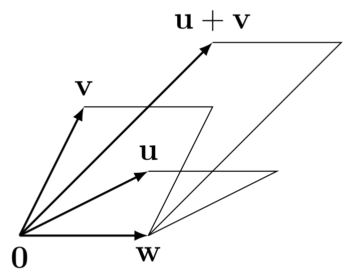


Figura 6.3: Soma de Vetores e Mudança de Área

Observação 45 *A linearidade da propriedade (b) acima não significa que* $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. *Por exemplo,* $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 \neq \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1+1 = 2.$

Podemos chegar ao resultado correto usando linearidade da seguinte forma: $\det(2I) = \det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ 2\mathbf{e}_1 & 2\mathbf{e}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \text{(linearidade na primeira coluna) } 2\det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & 2\mathbf{e}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \text{(linearidade na segunda coluna) } 2\cdot 2\det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = 4.$

Exemplo 199 *Utilize a linearidade na primeira coluna para calcular* $\det\left[\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ 6 & 3 \end{array}\right]$.

Como $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 \\ 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\det\left[\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ 6 & 3 \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c} 2+0 & 0 \\ 0+6 & 3 \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{array}\right] + \det\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 6 & 3 \end{array}\right] = 6 + 0 = 6.$ *O primeiro determinante é* 6 *por ser matriz diagonal, o segundo é zero pois uma coluna é múltipla da outra.*

6.1.2 $\mathbb{R}^3$

Para motivar o assunto, vamos apresentar uma definição (provisória) de determinante para matrizes 3×3 que é geométrica. Vamos interpretá-la e deduzir propriedades básicas.

Definição 78 (determinante de matriz 3×3) *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, *com* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. *Associamos a esta matriz o paralelepípedo* P *gerado por* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, *conforme indicado na Figura 6.4. Definimos o determinante de* A *como o volume (com sinal) do paralelepípedo* P.

Exemplo 200 *Considere* $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, *com* $a, b, c > 0$. *Calcule* $\det A$.

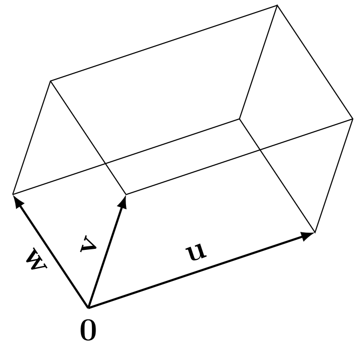


Figura 6.4: Paralelepípedo Gerado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$

Pela definição, $\det A$ *é a área da caixa retangular com lados de tamanho* a, b, c. *Portanto,* $\det A = abc$. *Isto ilustra o caso geral: o determinante de uma matriz diagonal é igual ao produto dos elementos da diagonal.*

O que significa $\det(A) = 0$ em $\mathbb{R}^3$?

A resposta está no próximo lema.

Lema 35 (significado de determinante nulo em $\mathbb{R}^3$) *O* $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = 0$ *se, e somente se, o conjunto* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *é LD.*

Prova: Segue das seguintes equivalências:
– determinante é nulo;
– o volume do paralelepípedo é nulo;
– paralelepípedo é degenerado, isto é, sua altura é 0;
– os três vetores são coplanares;
– um vetor pertence ao plano gerado pelos outros dois;
– o conjunto de vetores é LD. ∎

Exemplo 201 $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \end{bmatrix} = 0$ *pois 3ª coluna = 1ª coluna.*

Exemplo 202 $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0$ *pois 3ª coluna = 1ª coluna + 2ª coluna.*

Exemplo 203 *Considere* $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & 3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$. *Calcule* $\det A$.

Como $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$ *é múltiplo dos outros dois, isto é, pertence ao plano* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, *o paralelepípedo é degenerado, possuindo volume igual a* 0. *Logo,* $\det A = 0$.

Lema 36 (propriedades do determinante de matriz 3×3) *Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$:*

(a) $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{u} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = 0$ *(se duas colunas são iguais então o determinante é zero);*

(b) $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ k\mathbf{u}+\mathbf{z} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{z} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ *ou*

$\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & k\mathbf{v}+\mathbf{z} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{z} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ *ou*

$\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & k\mathbf{w}+\mathbf{z} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{z} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ *(determinante é linear na primeira, segunda ou terceira coluna);*

(c) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \det I = 1$ *(determinante da matriz identidade é 1).*

Prova: Segue diretamente da definição do determinante como volume do paralelepípedo (a) e (c). Para (b) precisamos seguir os passos da prova do Lema 34 com a dificuldade de visualizar figuras correspondentes tridimensionais. Basicamente, se multiplicamos uma aresta por k o volume do paralelepípedo é multiplicado por k. Deixamos para o leitor as figuras e verificação para soma de vetores. ■

6.2 Definição e Propriedades Básicas

Nossa definição de determinante é baseada num fato surpreendente expresso no próximo teorema: existe uma **única** função com propriedades similares as satisfeitas pela função área e volume que apresentamos na Seção anterior.

Teorema 8 (caracterização algébrica do determinante) *Considere o conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}$ das matrizes quadradas $n \times n$. Existe uma **única função** $\det : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

(a) se duas colunas são iguais o valor é zero;
(b) é linear em cada coluna;
(c) na matriz identidade o valor é 1.

Prova: Vamos provar somente a existência (deduzir uma fórmula) para o caso da matriz 2×2 $\left[\begin{array}{c|c} a & c \\ b & d \end{array}\right]$. Quanto a unicidade e a generalização para uma matriz qualquer, deixamos para o leitor interessado consultar a literatura. Observe a beleza desta demonstração, onde estas três propriedades obrigam o surgimento da fórmula (já conhecida) de determinante de matriz 2×2.

Como $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, linearidade na primeira coluna (propriedade (b)) implica que $\det \left[\begin{array}{c|c} a & c \\ b & d \end{array}\right] = a \det \left[\begin{array}{c|c} 1 & c \\ 0 & d \end{array}\right] + b \det \left[\begin{array}{c|c} 0 & c \\ 1 & d \end{array}\right]$.

Como $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, linearidade na segunda coluna (propriedade (b)) implica que:

(i) $\det \left[\begin{array}{c|c} 1 & c \\ 0 & d \end{array}\right] = c\det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] + d\det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$;

(ii) $\det \left[\begin{array}{c|c} 0 & c \\ 1 & d \end{array}\right] = c\det \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] + d\det \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$.

Portanto, obtemos:

$$\det \left[\begin{array}{c|c} a & c \\ b & d \end{array}\right] = ac\det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] + ad\det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] + bc\det \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] + bd\det \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right].$$

Como as colunas são iguais (propriedade (a)), $\det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right] = 0$. Pela propriedade (c), $\det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = 1$.

Vamos provar que $\det \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] = -1$, obtendo que $\det \left[\begin{array}{c|c} a & c \\ b & d \end{array}\right] = ac \cdot 0 + ad \cdot 1 + bc \cdot (-1) + bd \cdot 0 = ad - bc$. Para isto, pela propriedade (a), $\det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right] = 0$. Pela propriedade (b) utilizada duas vezes, $\det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right] = 0 = \det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] + \det \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] + \det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] + \det \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right] + \det \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$. Como os dois termos do meio desta expansão são nulos pela propriedade (a), obtemos que $0 = \det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] + \det \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$. Pela propriedade (c), deduzimos que $\det \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] = -1$.

■

Definição 79 (determinante de matriz) *O* ***determinante*** *é a função dada pelo teorema acima.*

Observação 46 *Embora completa, a definição acima não apresenta (diretamente) uma fórmula para calcular o determinante. Deixo para reflexão do leitor o que disse Klaus Jänich (veja bibliografia):*

> *"Se você ainda acha que a informação mais importante acerca de um objeto matemático é uma* **fórmula** *para* **calcular o seu valor***, certamente você compartilha o pensamento da maioria das pessoas medianamente educadas, mas com conhecimentos apenas superficiais de matemática."*

O próximo lema mostra que podemos substituir a propriedade (a) por outra para caracterizar o determinante.

Lema 37 (propriedades equivalentes) *Se a função* $\det : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ *é linear em cada coluna (propriedade (b) do Teorema 8) então são equivalentes:*

(a) se duas colunas são iguais o determinante é zero;

(a') se trocarmos duas colunas o determinante troca de sinal.

Prova: Vamos provar no caso 2×2. O caso geral é provado de forma similar com mais colunas.

Pela linearidade (propriedade (b)),

$$\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u}+\mathbf{v} & \mathbf{u}+\mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} == \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u}+\mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{u}+\mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Suponha que (a) é verdade. Então

$$\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u}+\mathbf{v} & \mathbf{u}+\mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = 0.$$

Logo, pela identidade acima, $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = 0$, isto é, $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$. Portanto (a) implica em (a').

Suponha que (a') é verdade. Então (imagine que trocamos $\mathbf{u}$ com $\mathbf{u}$)

$$a = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = -a.$$

Como $a = -a$ implica que $a = 0$, $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = 0$. Portanto (a') implica em (a). ∎

Observação 47 *Como o determinante possui a propriedade (a') de troca (alternância) de sinais e pela propriedade (b) ela é linear em cada coluna, dizemos que o* ***determinante é uma função multilinear alternada****. Pelo Teorema 8, o determinante é a única função multilinear alternada que vale* 1 *na matriz identidade.*

Observação 48 (analogias com integral) *Propriedades (a) e (a') são similares a da integral:*
(a) $\int_u^u f(x)\,dx = 0$ *(duas colunas iguais);*
(a') $\int_u^v f(x)\,dx = -\int_v^u f(x)\,dx$ *(troca de duas colunas);*

A propriedade do determinante da matriz transposta (para recordar o que é matriz transposta, ver Definição 62 da página 98) transfere todas as propriedades do determinante para linhas da matriz. Isto é utilizado para relacionar operações elementares nas linhas de uma matriz com o determinante, que gera um algoritmo eficiente (no sentido preciso da Observação 50 da página 133) para o cálculo do determinante.

Teorema 9 (determinante da transposta) $\det(A^T) = \det(A)$.

Prova: Esta prova será omitida. Consulte a literatura. ∎

Corolário 7 *Todas as propriedades do determinante para colunas podem ser enunciadas como propriedades das linhas. Portanto, o determinante:*

(a) é linear por linhas;

(b) troca de sinal quando se trocam as linhas;

(c) é nulo quando duas linhas são iguais.

Prova: Segue facilmente do Teorema anterior e propriedades correspondentes (por colunas) do determinante. ∎

Corolário 8 (operações elementares e determinante) *O efeito de cada operação elementar abaixo sobre o determinante de uma matriz é:*

(a) trocar ordem de duas linhas: determinante troca de sinal;

(b) multiplicar uma linha por um escalar não-nulo: determinante é multiplicado pela constante;

(c) substituir linha por sua soma com múltiplo de outra: determinante não se altera.

Prova: Os ítens (a) e (b) seguem diretamente do último Corolário. Quanto ao item (c), pelo Teorema 9, basta mostrar propriedade correspondente por coluna. Considere $A = \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u} & \cdots & \mathbf{v} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}$. Substituindo uma coluna pela soma com múltiplo de outra obtemos $B = \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u}+k\mathbf{v} & \cdots & \mathbf{v} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}$. Portanto, por linearidade,

$$\det B = \det \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u}+k\mathbf{v} & \cdots & \mathbf{v} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u} & \cdots & \mathbf{v} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix} + k \det \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{v} & \cdots & \mathbf{v} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}.$$

Como duas colunas são iguais no último determinante, ele é nulo (independente do valor de k) e portanto $\det B = \det \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u} & \cdots & \mathbf{v} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix} = \det A$. ∎

Lema 38 (matrizes LDs possuem determinante nulo) *Seja A matriz quadrada. Se as colunas (ou linhas) de A formam um conjunto linearmente dependente então* $\det A = 0$.

Prova: Vamos provar para o caso das colunas formarem um conjunto LD. Segue para as linhas pelo Teorema 9 (determinante da transposta).

Suponha que as colunas formam um conjunto LD. Então uma delas é combinação linear das outras. Substituindo esta coluna pela combinação das demais e utilizando a linearidade do determinante, obteremos soma de determinantes de matrizes com colunas repetidas. Como cada um destes determinantes é zero (colunas repetidas), concluiremos que o determinante é zero. ∎

Quando a matriz é diagonal ou triangular (superior ou inferior), é muito fácil calcular o determinante. Vamos provar fórmula do determinante de matriz diagonal para aquecer, pois logo em seguida provaremos o caso geral de matriz triangular.

Lema 39 (determinante de matriz diagonal) *Se uma matriz é diagonal então seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal.*

Prova: Pela linearidade, retire cada elemento da diagonal até ficar com matriz identidade, cujo determinante é 1. ∎

Lema 40 (determinante de matriz triangular) *Se uma matriz é triangular (superior ou inferior) então seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal.*

Prova: Vamos supor que a matriz é triangular superior (argumento análogo vale para triangular inferior). Considere dois casos:

(a) tem pelo menos um zero na diagonal. Suponha que $a_{kk} = 0$. Considere M a matriz formada pelas k primeiras colunas desta matriz. Como M está escalonada com no máximo $k-1$ linhas não-nulas, a dimensão do espaço-linha de M é no máximo $k-1$. Pelo Lema 25 da página 103, a dimensão do espaço-coluna de M é igual a dimensão do espaço-linha, e portanto é no máximo $k-1$. Como são k vetores coluna de M gerando espaço de dimensão máxima $k-1$, as colunas de M, e por conseqüência as primeiras k colunas da matriz, são LDs. Pelo Lema 38 o determinante é zero.

(b) todos elementos da diagonal são não-nulos. Coloque-os em evidência para obter 1 na diagonal. O valor do determinante será o produto destes elementos vezes o determinante da matriz com 1 na diagonal. Substitua linha por múltiplo de outra linha até transformá-la em diagonal. Pelo Corolário 8 isto não altera o seu determinante. Obteremos a matriz identidade, cujo determinante é 1. ∎

Exemplo 204 *Considere* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. *Calcule* $\det A$.

Como a matriz é triangular, $\det A = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120$.

6.3 Como Calcular

Vamos determinar formas práticas para calcular o determinante. No caso 2×2 e 3×3 em geral (quando não são triangulares) vale a pena aplicar a fórmula dada pela chamada regra se Sarrus, que é vista no ensino médio. Para o caso geral apresentamos um algoritmo, bastante eficiente, para o cálculo do determinante de uma matriz geral.

As fórmulas para matriz 2×2, vista na demonstração do Teorema 8, e 3×3, que pode ser deduzida (exercício) seguindo a mesma técnica da 2×2, são vistas no ensino médio. Podemos recordá-las através da Regra de Sarrus, representadas na Figura 6.5.

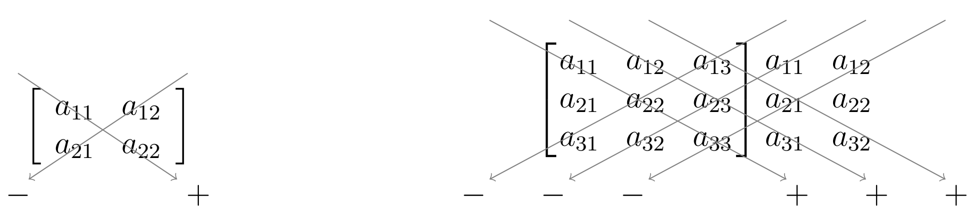


Figura 6.5: Regra de Sarrus 2×2 e 3×3

Observação 49 (regra se Sarrus) *A regra de Sarrus NÃO generaliza para dimensão maior que 3: Não existe procedimento semelhante a este para matrizes* 4×4.

Para uma matriz de ordem maior que 3 utilizamos o seguinte algoritmo, baseado na eliminação de Gauss. Ele funciona pelo Corolário 8, que relaciona operações elementares e determinante e pelo Lema 40 (determinante de matriz triangular).

Algoritmo 1 (cálculo eficiente do determinante) *Para calcular o determinante de uma matriz:*

- *Faça eliminação de Gauss, reduzindo matriz a forma diagonal superior;*
- *Leve em conta a cada operação elementar o efeito sobre o determinante:*
  - *troca de linhas* $\Longrightarrow$ *determinante troca de sinal;*
  - *multiplicar linha por constante* $\Longrightarrow$ *determinante é multiplicado pela constante;*
  - *substituir linha por combinação linear dela com outra linha* $\Longrightarrow$ *determinante não se altera.*
- *Calcule determinante da matriz resultante pelo produto dos elementos da diagonal;*

Exemplo 205 *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

Troque l_1 *com* l_3*:* $\det A = -\det \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Coloque 3 *em evidência em* l_1*:* $\det A = -3\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Faça $l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1$*:* $\det A = -3\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Faça $l_3 \leftarrow l_3 + 4l_2/3$*:* $\det A = -3\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 + 8/3 = 32/3 \end{bmatrix}$.

Agora a matriz é triangular: calcule produto dos elementos da diagonal:
$\det A = -3(1)(-3)(32/3) = 96$.

Se você folhear livros de Álgebra Linear encontrará pelo menos

Três modos de calcular o determinante:

(a) fórmula de Laplace (também conhecido como expansão por cofatores);
(b) fórmula de Leibniz (como produtório de elementos de cada linha ou coluna com sinal indicando paridade das permutações);
(c) redução da matriz através de operações elementares (conforme foi apresentado).

Poderíamos apresentar as três formas mas isto tomaria tempo e foco que julgamos excessivos para o assunto. Embora as formas (a) e (b) sejam importantes do ponto de vista teórico (por exemplo para provar que $\det A = \det A^T$), optamos por omiti-la num curso introdutório desta natureza. A forma do item (c) é a mais eficiente do ponto de vista computacional e está ligada diretamente com as propriedades básicas do determinante. A desvantagem de (c) é que não é uma fórmula, e sim um algoritmo baseado no Corolário 8.

Observação 50 (comparando métodos de cálculo do determinante) *O método de cálculo usando a fórmula de Laplace ou Leibniz necessita, para uma matriz de ordem n, cerca de $n!$ operações, enquanto o método eficiente que apresentamos, utilizando operações elementares, necessita de cerca de $2n^3/3$ operações (fonte Leon p. 71). Para comparação do número de operações necessárias para se calcular o determinante observe a tabela abaixo:*

n	*Laplace*	*redução por op. Elementares*
2	3	4
3	14	15
4	63	37
5	324	74
6	2 *mil*	130
7	14 *mil*	209
10	1 *milhão*	624
20	6×10^{18}	5 *mil*

Para $n \geq 4$ o método que apresentamos já é mais eficiente. Para n grande é a diferença entre poder ser calculado ou não. Por exemplo, um computador que faça 1 milhão de operações por segundo levaria 32 mil anos para calcular o determinante de uma matriz 20×20 pelo método de Laplace e frações de segundo pelo método aqui apresentado.

6.4 Mais Propriedades

Teorema 10 (caracterização de matrizes não-invertíveis) *Se A é matriz quadrada então A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.*

Equivalentemente, A é singular (não possui inversa) se, e somente se, $\det A = 0$.

Prova: Suponha que A é singular (não possui inversa) $n \times n$. Então o posto (dimensão do espaço coluna) é menor que n, o que implica que as colunas são LDs (não geram o espaço todo). Pelo Lema 38, $\det A = 0$.

Suponha que $\det A = 0$. Aplique o algoritmo de cálculo do determinante, reduzindo-a a forma triangular U. Agora $\det A = 0$ se, e somente se, $\det U = 0$. Logo um dos elementos da diagonal de U é zero. Seguindo o argumento da prova do determinante da triangular, as colunas de U são LDs, o que implica que as linhas de U são LDs. Logo as linhas de A são LDs, o que implica que A é singular. ■

Corolário 9 (significado geométrico de determinante nulo em $\mathbb{R}^n$) *Se A é matriz quadrada então $\det A = 0$ se, e somente se, as colunas (ou linhas) de A formam um conjunto linearmente dependente.*

Prova: O caso linhas (ou colunas) LDs foi feito no Lema 38.

Suponha agora que o determinante é zero. Pelo Teorema 10, A é singular (não é invertível). Logo $\mathrm{Nuc}(T) \neq \mathbf{0}$. Com isto existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Os componentes do vetor $\mathbf{v}$, pela definição do produto matriz-vetor, vão determinar uma combinação linear não-trivial das colunas de A cujo resultado é o vetor zero. Logo as colunas de A formam um conjunto LD. ■

Observação 51 *Juntando Teorema 10, Corolário 9 e Lema 29 da página 106, obtemos: Se A é matriz quadrada, são equivalentes:*
(a) o sistema homogêneo $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ possui solução diferente de zero;
(b) $\mathrm{Nuc}(A)$ é não-trivial;
(c) A não possui inversa;
(d) $\det(A) = 0$;
(e) uma coluna (ou linha) é combinação linear das outras.

Estas idéias são fundamentais no Capítulo de Autovalores e Autovetores, onde determinamos valores para λ tais que o sistema $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ possua solução não-trivial. Estudamos isto reescrevendo o sistema introduzindo a matriz identidade I. Assim temos que resolver $A\mathbf{v} = \lambda I\mathbf{v}$ ou $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Como queremos soluções não-triviais, queremos que o núcleo de $A - \lambda I$ seja não invertível (singular), que pelo Teorema 10 implica que $\det(A - \lambda I) = 0$.

Exemplo 206 *Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Determine valores para λ tais que o sistema $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ possua solução não-trivial.*

Calculando $\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$. Resolvendo esta equação do segundo grau em λ obtemos que $\lambda = 3$ ou $\lambda = -1$.

Exemplo 207 *Considere a matriz diagonal $A = \begin{bmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & c & \\ & & & d \end{bmatrix}$. Determine valores para λ tais que o sistema $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ possua solução não-trivial.*

Precisamos que $\det(A - \lambda I) = 0$. Como a matriz (também) diagonal $A - \lambda I = \begin{bmatrix} a-\lambda & & & \\ & b-\lambda & & \\ & & c-\lambda & \\ & & & d-\lambda \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)(d-\lambda) = 0$. Os valores de λ que tornaram zero esta expressão são: a, b, c, d. Um erro comum cometido pelos alunos é expandir a expressão $(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)(d-\lambda) = 0$, ao invés de obter raízes diretamente, e tentar calcular raízes de $\lambda^4 - \lambda^3(a+b+c+d) + \lambda^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) + abcd - abcl - abld - alcd - lbcd = 0$.

A propriedade do produto caracteriza o determinante da matriz inversa e proporciona a interpretação do determinante como mudança de área/volume.

Teorema 11 (determinante do produto) *Sejam A, B matrizes quadradas da mesma ordem. Então $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.*

Prova: Se $\det(A) \neq 0$, defina $f : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ por $f(B) = \det(AB)/\det(A)$. Vamos checar que f possui as propriedades da definição (Teorema 8) do determinante:

(a) se duas colunas de B são iguais então, como produto matriz-matriz pode ser visto como aplicar A em cada coluna de B (ver Lema 26 da página 104), AB possui duas colunas iguais. Logo $\det(AB) = 0$ pela propriedade (a) do determinante. Portanto $f(B) = 0$.

(b) se $B = \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u} + k\mathbf{v} & \cdots & \mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}$, então

$$\det(AB) = \det \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & A(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) & \cdots & A\mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}$$

(por linearidade de A) $= \det \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & A\mathbf{u} + kA\mathbf{v} & \cdots & A\mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}$ (por propriedade (b) do determinante) $= \det \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & A\mathbf{u} & \cdots & A\mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix} + k \det \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & A\mathbf{v} & \cdots & A\mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}$. Logo,

$$f(B) = f\left(\begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u} + k\mathbf{v} & \cdots & \mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix} \right) =$$

$$= f\left(\begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u} & \cdots & \mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix} \right) + kf\left(\begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{v} & \cdots & \mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix} \right).$$

Portanto f é linear por colunas.

(c) $f(I) = \det(AI)/\det(A) = \det(A)/\det(A) = 1$.

Pelo Teorema 8 (unicidade do determinante), $f(B) = \det(B)$. Dai segue o resultado.

Se $\det A = 0$, com A $n \times n$, então, pelo Corolário 9, as colunas de A são LDs. Logo o posto coluna (dimensão do espaço gerado pelas colunas) de A é menor que n. Pela interpretação do produto matriz-matriz (ver Lema 27 item (a) da página 105) as colunas de AB são combinações lineares das colunas de A. Logo o espaço gerado pelas colunas de AB está contido no espaço gerado pelas colunas de A. Portanto posto coluna de AB é menor que n. Portanto colunas de AB são LDs, que, pelo Corolário 9, implica que $\det(AB) = 0$. Logo, neste caso também $\det(AB) = 0 = 0\det(B) = \det(A)\det(B)$. ■

Exemplo 208 *Suponha que A é invertível. Qual relação entre $\det(A)$ e $\det(A^{-1})$?*

Como $AA^{-1} = I$, pela propriedade do determinante do produto

$$\det(I) = 1 = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

Conclusão: $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Exemplo 209 *Considere A e B duas matrizes semelhantes (ver definição na página 113). Qual a relação entre $\det(A)$ e $\det(B)$?*

Como são semelhantes, existe P invertível tal que $B = PAP^{-1}$. Pela propriedade do produto, $\det(B) = \det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(P^{-1})\det(A) = 1 \cdot \det(A) = \det(A)$. *Logo* $\det(A) = \det(B)$ *quando A e B são semelhantes.*

A aplicação sucessiva do próximo lema permite reduzir a ordem do determinante a cada aplicação. Para entender esta parte reveja operações em matrizes divididas em blocos na página 108.

Lema 41 (determinante de matriz bloco-triangular) *Suponha que* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ *ou* $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$*, com* A *e* D *matrizes quadradas. Então* $\det(M) = \det(A)\det(D)$.

Prova: Vamos inicialmente provar que se $M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$, $\det M = \det D$. A técnica é igual a prova do Teorema 11 (determinante do produto). Defina $f : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ por $f(D) = \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$. Se duas colunas de D são iguais então as duas colunas correspondentes de M são iguais (todos elementos de M acima de D são nulos). Logo $\det M = f(D) = 0$. Se calcularmos $f\left(\begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u}+k\mathbf{v} & \cdots & \mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}\right)$, como elementos acima de D são nulos, usamos linearidade do determinante de M para concluir que é igual a $f\left(\begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u} & \cdots & \mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}\right) + kf\left(\begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{v} & \cdots & \mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}\right)$. Finalmente $f(I) = \det(I) = 1$ (a parte de cima já era identidade). Pelo Teorema 8 (unicidade do determinante), $f(D) = \det(D)$. De forma análoga podemos provar que $\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det A$.

Vamos supor, para o caso geral, que $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ pois o caso $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & D \end{bmatrix}$ é análogo.

Se $\det A = 0$ então, pelo Corolário 9, uma coluna de A é combinação linear das outras. Como a matriz M possui somente zeros abaixo de A, uma coluna de M é CL das outras. Novamente pelo Corolário 9, $\det M = 0$. Se $\det D = 0$ então, de forma análoga, uma linha de M é CL das outras e $\det M = 0$.

Supondo que $\det A$ e $\det D$ são não-nulos, podemos escrever

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Agora, utilizando a propriedade do Teorema 11 (determinante do produto), basta calcular o determinante de cada uma destas três matrizes. Pelos resultados acima, o primeiro determinante é $\det A$ e o último é $\det D$. O do meio, por ser matriz diagonal com 1's na diagonal, vale 1. Concluímos o resultado. ∎

Observação 52 *Considere* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$*, com* A, B, C *e* D *matrizes quadradas. De forma geral,* $\det(M) \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$. *Você consegue gerar um exemplo?*

Observação 53 *Por esta propriedade pode-se parar o algoritmo do determinante quando restar um bloco* 2×2 *e aplicar a propriedade do determinante de matriz bloco-triangular.*

Exemplo 210 *Calcule os valores de λ tais que o determinante da matriz abaixo se anula:*

$$M = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3+\lambda \end{bmatrix}.$$

Observe que ela é bloco-triangular (mas não é triangular!). Definindo $M_1 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $M_3 = 3+\lambda$, $M = \begin{bmatrix} M_1 & * & * \\ 0 & M_2 & * \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix}$. *Logo,*

$$\det(M) = \det(M_1)\det(M_2)\det(M_3) = -(\lambda-1)^2(\lambda^2-1)(3+\lambda) = 0.$$

As raízes são $1, -1, -3$.

Observação 54 *Um erro comum que os alunos cometem (ver exemplo anterior e Exemplo 207 da página 134) é multiplicar todos os termos ao invés de utilizar a estrutura fatorada que decorre naturalmente do determinante de matriz diagonal ou triangular ou bloco-triangular. Caso calculássemos diretamente, multiplicando todos os termos, obteríamos que* $\det M = -\lambda^5 - \lambda^4 + 6\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$. *Como você encontraria as raízes deste polinômio? Voltaremos a este assunto no Capítulo de Autovalores e Autovetores.*

6.5 Aplicações

Na primeira aplicação definimos determinante de transformações lineares. A segunda aplicação é importante no Cálculo Integral de várias variáveis, quando aparece o chamado jacobiano na fórmula de mudança de variáveis de integração.

6.5.1 Transformações Lineares

Como definir o determinante de uma transformação linear $T : V \to V$?
Dadas bases γ, β de V, de forma geral $A = [T]_\beta \neq B = [T]_\gamma$. No entanto estas matrizes são relacionadas por $P = [I]_{\gamma\leftarrow\beta}$, pois $[T]_\gamma = [I]_{\gamma\leftarrow\beta}[T]_\beta[I]_{\beta\leftarrow\gamma}$. Como $[I]_{\beta\leftarrow\gamma} = [I]_{\gamma\leftarrow\beta}^{-1}$, $B = PAP^{-1}$. Pela propriedade do produto, $\det(B) = \det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(P^{-1})\det(A) = \det(A)$. Logo podemos definir $\det(T)$ por $\det(A) = \det[T]_\beta$, o determinante da matriz que a representa numa base qualquer.

Definição 80 (determinante de transformação linear) *Dada transformação linear $T : V \to V$ e γ uma base qualquer de V, $[T]_\gamma$ a matriz que a represente na base γ, definimos $\det(T)$ por $\det([T]_\gamma)$.*

Lema 42 (caracterização de TL invertível) *Se T uma transformação linear de V em V (espaços de dimensão finita) então T é invertível se, e somente se, $\det(T) \neq 0$.*

Prova: Fixe uma base para V e aplique o Teorema 10. ∎

6.5.2 Mudança de Área

Lema 43 (mudança de área de um quadrado) *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $Q \subset \mathbb{R}^2$ um quadrado com lados paralelos aos eixos x e y:*
(a) $T(Q)$ é um paralelogramo;
(b) $\text{área}(T(Q)) = \text{área}(Q)|\det T|$.

Prova: Suponha inicialmente que o quadrado Q seja unitário. Observe a Figura 6.6. Qualquer ponto do interior do quadrado é combinação linear de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ com coeficientes entre 0 e 1. Pela linearidade de T, a imagem será exatamente das combinações lineares de $T(\mathbf{e}_1)$ e $T(\mathbf{e}_2)$ com coeficientes entre 0 e 1, ou seja, um paralelogramo com arestas $T(\mathbf{e}_1)$ e $T(\mathbf{e}_2)$.

A área (com sinal) do paralelogramo, pelo que já vimos, é igual ao determinante da matriz $\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = [T]_\varepsilon \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$. Como a segunda matriz é a identidade, cujo determinante é 1, pela regra do determinante do produto, a área é $\det[T]_\varepsilon$, que é igual, por definição a $\det T$. Logo a área (sem sinal) do paralelogramo é $|\det T|$.

No caso geral, as arestas do quadrado são $k\mathbf{e}_1$ e $k\mathbf{e}_2$. Logo as arestas do paralelogramo são $T(k\mathbf{e}_1) = kT(\mathbf{e}_1)$ e $T(k\mathbf{e}_2) = kT(\mathbf{e}_2)$. A área (com sinal) do paralelogramo é igual a $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ kT(\mathbf{e}_1) & kT(\mathbf{e}_2) \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k^2 \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k^2 \det[T]_\varepsilon = k^2 \det T$. Como a área de Q é k^2, $\text{área}(T(Q)) = k^2|\det T| = \text{área}(Q)|\det T|$. ∎

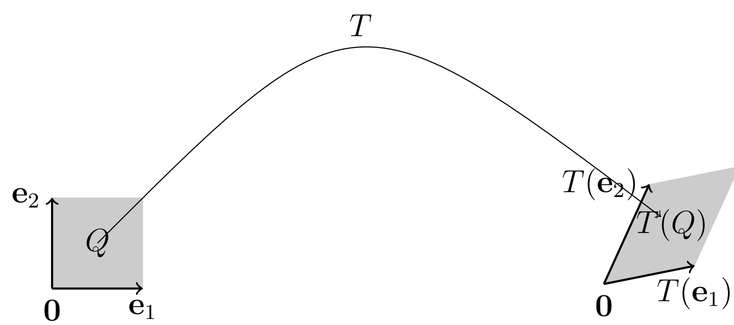


Figura 6.6: Imagem de uma Quadrado Q pela TL T

O próximo teorema estabelece a relação entre determinante e modificação de área de uma região do plano após a aplicação de uma transformação linear.

Teorema 12 (modificação de área por TL) *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto limitado (área finita) qualquer. Então $\text{área}(T(\Omega)) = \text{área}(\Omega)|\det T|$.*

Prova: Vamos supor que $\det T \neq 0$ e portanto T é uma bijeção, pois caso contrário o resultado seria verdadeiro pois ambos os lados seriam iguais a zero.

Divida Ω em quadrados Q_i disjuntos paralelos aos eixos x e y de modo que sua união aproxime a região Ω (vide Figura 6.7). Pelo Lema anterior, $\text{área}(T(Q_i)) = \text{área}(Q_i)|\det(T)|$. Como os quadrados Q_i são disjuntos e T é bijeção, $T(Q_i)$ são paralelogramos disjuntos.

Para finalizar com rigor precisaríamos passar o limite, fazendo tender a zero, o tamanho dos quadrados. Sem o devido rigor, desprezando as frações de quadrados, somando os quadrados e colocando $\det T$ em evidência, $\text{área}(T(\Omega)) \approx \sum_i \text{área}(T(Q_i)) = |\det T| \sum_i \text{área}(Q_i) \approx |\det T| \text{área}(\Omega)$. ■

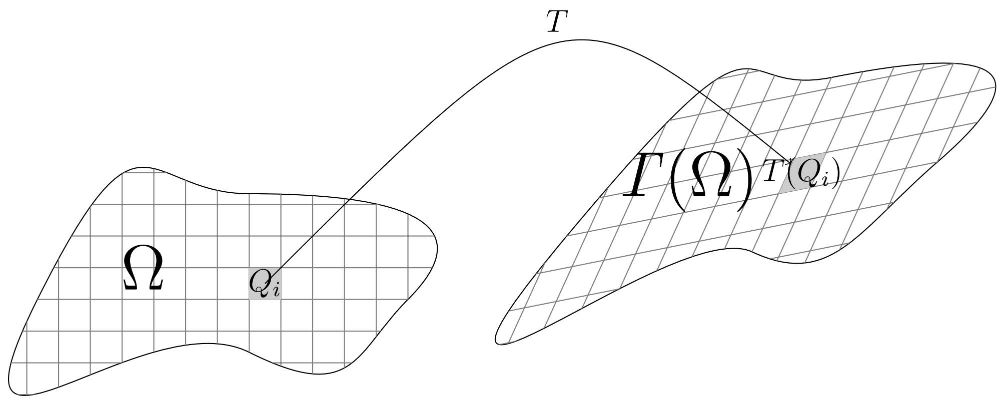


Figura 6.7: Região Ω e sua Imagem $T(\Omega)$

Observação 55 *Uma aplicação deste Teorema é em cálculo de várias variáveis. Uma função qualquer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pode ser aproximada localmente por uma transformação linear. Por este resultado, a distorção local de área será dado pelo determinante desta transformação linear, o chamado jacobiano de f.*

Observação 56 *Este mesmo resultado poder ser generalizado para três dimensões: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto qualquer. O volume de $T(\Omega)$ é igual ao volume de Ω vezes $|\det(T)|$.*

Utilizando esta idéia podemos reinterpretar a propriedade do determinante do produto da seguinte forma. Dado $C = AB$, composição das TLs A e B, a distorção de área (ou volume) de C é igual ao produto da distorção de A e distorção de B.

6.6 ⋆Sinal do Determinante em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$[0]

Para esta Seção reveja num livro qualquer (de Física ou de Geometria Analítica ou de Cálculo) a regra da mão direita.

Dado um paralelogramo com arestas $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ no plano cartesiano com eixos na posição canônica (eixo-x na horizontal, orientado da esquerda para a direita e eixo-y orientado de baixo para cima), quando o $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ é positivo e quando é negativo?

A resposta pode ser dada aplicando a regra de mão direita, partindo de $\mathbf{u}$ para $\mathbf{v}$, e determinando para onde o polegar aponta. Se for saindo do papel, o determinante é positivo, se for entrando é negativo.

[0]A leitura desta seção é opcional.

Para ilustrar considere a seqüência da Figura 6.8. Mantendo fixo o vetor $\mathbf{u}$ e variando $\mathbf{v}$, sempre com o mesmo tamanho, mas formando ângulos distintos com $\mathbf{u}$, obtemos paralelogramos com áreas variando. Observe que quando $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vão ficando mais próximos de serem colineares a área vai tendendo para zero. Ilustramos os dois casos, onde $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são colineares mas com mesmo sentido ou com sentido oposto, quando a área do paralelogramo formado é zero. Devido a escolhas feitas, quando o paralelogramo está acima do vetor $\mathbf{u}$ a área é positiva, quando está abaixo é negativa. O ciclo representado na figura, iniciando no alto e girando no sentido anti-horário, em termos de sinal da área, é: positivo — 0 — negativo — 0 – positivo $\cdots$. Utilize a figura para verificar a regra da mão direita.

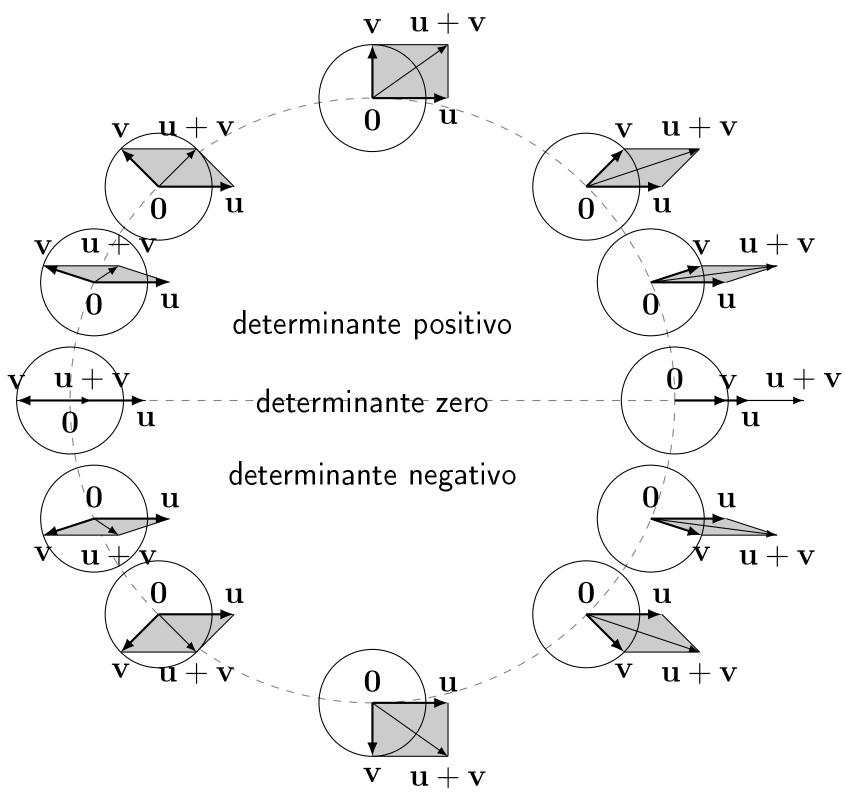


Figura 6.8: Variação da Área do Paralelogramo gerado por vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

Observação 57 (interpretação de sinal de área) *Por conseqüência, embora paralelogramo com arestas $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ seja igual a paralelogramo com arestas $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$, e portanto possuam a mesma área,* $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$. *Analogamente,* $\int_0^1 f(x)\,dx = -\int_1^0 f(x)\,dx$, *embora seja mesmo intervalo* $[0,1]$.

Em $\mathbb{R}^3$ quando o $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ é positivo e quando é negativo?

A resposta pode ser dada novamente aplicando a regra de mão direita. Dados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, eles geram um plano Π que divide o espaço em dois pedaços. Se $\mathbf{w} \in \Pi$ então o determinante é zero (porque?). Caso contrário, dependendo a qual pedaço o vetor $\mathbf{w}$ pertence, o determinante pode ser positivo ou negativo. Se $\mathbf{w}$ pertencer ao mesmo pedaço que o polegar após aplicação da regra da mão direita, o determinante será positivo, caso contrário, negativo.

6.7 ⋆Fórmula de Laplace[0]

Podemos repetir o que foi feito para matriz 2×2 na demonstração do Teorema 8 para matriz $n \times n$. No entanto, é mais simples apresentar uma fórmula recursiva para cálculo de determinante. Esta fórmula é conhecida como expansão por cofatores ou fórmula de Laplace.

Definição 81 (menor) *Dada A $n \times n$ defina A_{ij} (chamado de* ***menor*** *de A) a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida eliminando-se i-ésima linha e j-ésima coluna de A.*

Teorema 13 (fórmula de Laplace do determinante) *Definimos $\det(A)$ recursivamente:*
(a) $\det(A) = a_{11}$ se $n = 1$ (matriz 1×1 é um número!);
(b) $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ (expansão pela i-ésima linha).
Vale ainda que $\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ (expansão pela j-ésima coluna).

Prova: Para demonstração consulte a literatura. ■

Observação 58 (tabuleiro de damas) *Nós vemos esta fórmula do seguinte modo:*
(a) Para cada matriz A_{ij} associamos o sinal $+$ ou $-$ pela regra $(-1)^{i+j}$ (como se fosse um tabuleiro de damas, com os sinais alternando), indicada no seguinte diagrama:
$$\begin{bmatrix} + & - & \cdots \\ - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix};$$
(b) De forma recursiva calculamos o determinante expandindo através de uma linha ou coluna qualquer.

Exemplo 211 (matriz 2×2) *Determine a fórmula do determinante de matriz 2×2 fazendo a expansão pela primeira coluna e, depois, pela segunda linha. Observe que obtemos sempre a mesma fórmula.*

As matrizes A_{ij} serão somente um número, cujo determinante é o próprio número, e associamos os sinais $\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}$.

Fazendo a expansão pela primeira coluna:

$\det \begin{bmatrix} \boxed{a} & c \\ \boxed{b} & d \end{bmatrix} = +a\det\begin{bmatrix} \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} \\ \boxed{\cdot} & d \end{bmatrix} - b\det\begin{bmatrix} \boxed{\cdot} & c \\ \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} \end{bmatrix} = +a\det\begin{bmatrix} d \end{bmatrix} - b\det\begin{bmatrix} c \end{bmatrix} = ad - bc.$

Fazendo a expansão pela segunda linha:

$\det \begin{bmatrix} a & c \\ \boxed{b} & \boxed{d} \end{bmatrix} = -b\det\begin{bmatrix} \boxed{\cdot} & c \\ \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} \end{bmatrix} + d\det\begin{bmatrix} a & \boxed{\cdot} \\ \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} \end{bmatrix} = -b\det\begin{bmatrix} c \end{bmatrix} + d\det\begin{bmatrix} a \end{bmatrix} = -bc + ad.$

Deixamos para o leitor fazer expansão pela segunda coluna ou pela primeira linha para obter a mesma fórmula novamente.

Exemplo 212 *Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$. Determine A_{12}, A_{31}, A_{22}.*

[0] A leitura desta seção é opcional.

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} \\ 2 & \boxed{\cdot} & 8 \\ 3 & \boxed{\cdot} & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} \boxed{\cdot} & 4 & 7 \\ \boxed{\cdot} & 5 & 8 \\ \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{\cdot} & 7 \\ \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} \\ 3 & \boxed{\cdot} & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 213 *Calcule o determinante de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ *fazendo a expansão pela primeira coluna e expansão pela segunda linha.*

Expansão primeira coluna:

$$\det \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 7 \\ \boxed{2} & 5 & 8 \\ \boxed{3} & 6 & 9 \end{bmatrix} = +1 \det \begin{bmatrix} \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} \\ \boxed{\cdot} & 5 & 8 \\ \boxed{\cdot} & 6 & 9 \end{bmatrix} -2 \det \begin{bmatrix} \boxed{\cdot} & 4 & 7 \\ \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} \\ \boxed{\cdot} & 6 & 9 \end{bmatrix} +3 \det \begin{bmatrix} \boxed{\cdot} & 4 & 7 \\ \boxed{\cdot} & 5 & 8 \\ \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\det \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 7 \\ \boxed{2} & 5 & 8 \\ \boxed{3} & 6 & 9 \end{bmatrix} = +1 \det \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} -2 \det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} +3 \det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Expansão segunda linha:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{8} \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = -2 \det \begin{bmatrix} \boxed{\cdot} & 4 & 7 \\ \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} \\ \boxed{\cdot} & 6 & 9 \end{bmatrix} +5 \det \begin{bmatrix} 1 & \boxed{\cdot} & 7 \\ \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} \\ 3 & \boxed{\cdot} & 9 \end{bmatrix} -8 \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & \boxed{\cdot} \\ \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} \\ 3 & 6 & \boxed{\cdot} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{8} \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = -2 \det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} +5 \det \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} -8 \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 214 *Seja* $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. *Calcule* $\det A$.

Como podemos escolher por onde fazer a expansão, é vantajoso fazê-la por onde tiver o maior número de zeros. A melhor escolha neste caso é pela segunda coluna, onde concluimos que $\det A = -2 \det A_{32}$ *(confira o sinal negativo na frente utilizando o tabuleiro de damas de sinais). Portanto,* $\det A = -2 \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -2(-3-2) = 10.$

Exemplo 215 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Calcule* $\det A$.

Neste caso utilizaremos a terceira linha. Portanto $\det A = \det A_{31}$ *(sinal do tabuleiro de damas é positivo). Portanto,* $\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = (3-2) = 1.$

Exemplo 216 *Considere* $A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & -7 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. *Calcule* $\det A$.

As melhores escolhas são a quarta coluna ou a quarta linha pois ambas possuem um únic elemento não-nulo. Expandindo pela quarta coluna (sinal − pela regra do tabuleiro), $\det A = -(-1) \det \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

A melhor escolha é a terceira linha, que possui um único elemento não-nulo. O sinal na frente do 3 *será negativo pela regra do tabuleiro e* $\det A = -(-1)(-3) \det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

Agora a melhor escolha é a segunda linha, que pela regra do tabuleiro resultará num sinal menos na frente. Agora $\det A = -(-1)(-3)(-2) \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = 6(5 - 3 \cdot 6) = 6(5 - 18) = 6(-13) = -78$.

Prova: [Lema 9] A prova será feita por indução na dimensão da matriz. Para $n = 1$ é imediato. Suponha que seja verdade para matrizes $(n-1) \times (n-1)$. Pela fórmula de Laplace, $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \det(A_{1j})$ (expansão pela primeira linha). Usando hipótese de indução, (matrizes A_{1j} são $(n-1) \times (n-1)$), $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \det(A_{1j}^T)$, que nada mais é do que expansão pela primeira coluna do determinante de A^T. Logo, $\det(A) = \det(A^T)$. ■

6.8 ⋆Regra de Cramer e Matriz Inversa[0]

Vamos deduzir uma fórmula explícita da matriz inversa e de solução de sistemas, conhecida como regra de Cramer, partindo de propriedes do determinante.

Cabe alertar que a fórmula é computacionalmente ineficiente por envolver o cálculo de n determinantes. Não deve ser utilizada a não ser por necessidade teórica, como por exemplo para calcular derivada da função que associa a cada matriz sua inversa.

Em aplicações, utiliza-se a eliminação de Gauss ou outros métodos mais sofisticados para se resolver um sistema. Devido ao pouco uso desta, trata-se de uma Seção de enriquecimento cultural.

[0]A leitura desta seção é opcional.

Lema 44 (Regra de Cramer) *Considere o sistema $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$, com*

$$A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v_1} & \dots & \mathbf{v_{i-1}} & \mathbf{v}_i & \mathbf{v_{i+1}} & \dots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Caso tenha solução única, os componentes x_i da solução $\mathbf{v}$ serão dados por:

$$x_i = (\det A)^{-1} \det \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v_1} & \dots & \mathbf{v_{i-1}} & \mathbf{b} & \mathbf{v_{i+1}} & \dots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix},$$

onde a matriz acima à direota é A com a i-ésima coluna substituida pelo vetor $\mathbf{b}$.

Prova: Da definição do produto matriz-vetor como combinação linear de colunas, escrevemos o sistema como $x_1\mathbf{v_1} + \cdots + x_n\mathbf{v_n} = \mathbf{b}$.

Vamos primeiro determinar x_1 para depois fazer o caso geral em cima do mesmo princípio. Determinamos x_1 passando $\mathbf{b}$ para outro lado e obtendo $1\cdot(x_1\mathbf{v_1} - \mathbf{b}) + x_2\mathbf{v_2} + \cdots + x_n\mathbf{v_n} = 0$.

Concluimos que são LDs (note que o primeiro coeficiente é não-nulo igual a 1) os vetores $(x_1\mathbf{v_1} - \mathbf{b}), \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$. Pelo Lema 38, $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ x_1\mathbf{v_1} - \mathbf{b} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = 0$. A linearidade do determinante implica que

$$x_1 \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{b} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = 0.$$

Logo,

$$x_1 \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = x_1 \det A = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{b} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix},$$

de onde segue o resultado.

De forma geral, determinamos x_i passando $\mathbf{b}$ para o outro lado:

$$x_1\mathbf{v_1} + \cdots + 1 \cdot (x_i\mathbf{v_i} - \mathbf{b}) + \cdots + x_n\mathbf{v_n} = 0.$$

Concluimos (novamente) que são LDs os vetores $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_{i-1}}, (x_i\mathbf{v_i} - \mathbf{b}), \mathbf{v_{i+1}}, \dots, \mathbf{v_n}$.

Aplicando o determinante e usando sua linearidade, fazendo raciocínio análogo ao que fizemos para obter x_1, chegamos a fórmula para x_i. ■

Utilizando a regra de Cramer podemos obter uma fórmula explicita para a matriz inversa.

Corolário 10 (Fórmula da Inversa) *Considere a matriz A com menores A_{ji}. Então $A^{-1} = (c_{ij})$ com $c_{ij} = (\det A)^{-1}(-1)^{i+j}\det(A_{ji})$ (note que não é A_{ij}!).*

Prova: Defina $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. A regra de cramer associa a cada $\mathbf{b}$ a solução $\mathbf{x}$ do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Como $A^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}$, calculamos A^{-1} (coluna a coluna) aplicando regra de Cramer em $\mathbf{b} = \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$.

Tomando $\mathbf{b} = \mathbf{e}_j$ obtemos a j-ésima coluna de A^{-1} resolvendo $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$. Como c_{ij} é a i-ésima linha de $A^{-1}\mathbf{e_j}$, $c_{ij} = x_i$, onde x_i é o i-ésimo elemento da regra de Cramer com $\mathbf{b} = \mathbf{e_j}$.

Aplicando a regra de Cramer concluimos que

$$c_{ij} = (\det A)^{-1} \det \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v_1} & \ldots & \mathbf{v_{i-1}} & \mathbf{e}_j & \mathbf{v_{i+1}} & \ldots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Por expansão por cofatores, o determinante acima será reduzido a determinante de matriz A sem j-ésima linha e i-ésima coluna ($\det A_{ji}$) com sinal dado pela regra do tabuleiro. ■

Uma conseqüência importante é a existência de inversa de uma matriz.

Corolário 11 (da fórmula da inversa) *Se $\det A \neq 0$ então A possui inversa.*

6.9 Exercícios de Determinantes

6.9.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1. Determine se é Verdadeira ou Falsa:

(a) se as colunas de A são LDs então $\det(A) = 0$;

(b) se $\det(A) = 0$ então duas linhas ou colunas são iguais ou então uma linha ou coluna tem somente zeros;

(c) se B é obtida de A trocando duas linhas de A entre si, $\det(B) = \det(A)$.

Exercício 2. B é quadrada com $\det(B) = -2$.

(a) $\det(B^T) = $ ___; (b) $\det(B^{-1}) = $ ___; (c) $\det(B^5) = $ ___.

Exercício 3. A, B, C são matrizes quadradas.

(a) $\det(A + B)$ _______($=, \neq$, *pode ser* $=$ *ou* $\neq$) $\det(A) + \det(B)$;

(b) $\det(AB)$ _______($=, \neq$, *pode ser* $=$ *ou* $\neq$) $\det(A)\det(B)$;

(c) Se $\det(A) = -3$, $\det(B) = 2$ e $\det(C) = 5$, então $\det(ABC) = $ _____.

Exercício 4.

(a) $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$ ___; (b) $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$ ___;

Exercício 5. $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ com $\det(A) = 7$.

(a) $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2\mathbf{v} & \mathbf{w} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = $ ___; (b) $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & 3\mathbf{v} - \mathbf{w} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = $ ___;

(c) $\det \begin{bmatrix} \leftarrow & \mathbf{w} & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{v} + \mathbf{u} - \mathbf{w} & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{u} & \rightarrow \end{bmatrix} = $ ___; (d) $\det \begin{bmatrix} \leftarrow 2\mathbf{u} \rightarrow \\ \leftarrow 2\mathbf{v} \rightarrow \\ \leftarrow 2\mathbf{w} \rightarrow \end{bmatrix} = $ ___.

Exercício 6. Se $\det(A) = 4$, o sistema:

[0] Versão 28.julho.2008 06h

(a) $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ possui ____________________(*nenhuma solução, uma única solução, infinitas soluções, nenhuma ou infinitas soluções*);

(b) $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ possui ____________________(*nenhuma solução, uma única solução, infinitas soluções, nenhuma ou infinitas soluções*);

Se $\det(B) = 0$, o sistema:

(c) $B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ possui ____________________(*nenhuma solução, uma única solução, infinitas soluções, nenhuma ou infinitas soluções*);

(d) $B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ possui ____________________(*nenhuma solução, uma única solução, infinitas soluções, nenhuma ou infinitas soluções*).

Exercício 7. Se $\det(B) = 0$:

(a) e $B = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, então $\mathbf{u}$ é __________ (*múltiplo de, perpendicular a*) $\mathbf{v}$;

(b) e $B = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, então $\mathbf{u}$ é __________ (*múltiplo de* $\mathbf{v}$, *perpendicular a* $\mathbf{w}$, *múltiplo de* $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, *pertence ao plano gerado por* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$);

(c) colunas de B são _____(*LIs, LDs*); (d) linhas de B são _____(*LIs, LDs*).

Exercício 8. Seja $T : V \to V$ linear.

(a) $\operatorname{Nuc} T \neq 0$ se, e somente se $\det T$ ___ $(= 0, \neq 0)$;

(b) se $\det T = 5$ então $\dim(\operatorname{Nuc} T)$ ___ $(= 5, = 0, \neq 0)$;

(c) se existe T^{-1} então $\det(T)$ ___ $(= 1, = -1, = 0, \neq 0)$;

Exercício 9. Seja A 4×4.

(a) se posto$(A) = 4$ então $\det A$ ___ $(= 0, \neq 0, = 4)$;

(b) se posto$(A) = 2$ então $\det A =$ ___ $(= 0, \neq 0, = 2)$;

(c) se $\det(A) = 3$ então posto$(A) =$ ___ $(0, 1, 2, 3, 4)$;

(d) se $\det(A) = 0$ então posto(A) ___ $(= 0, = 1, = 2, = 3, = 4, > 0, > 2, < 4)$.

Exercício 10. Sejam A matriz quadrada, $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$: $\det(A - \lambda I)$ _____$(= 0, \neq 0)$.

6.9.2 Problemas

Problema 1.

(a) Calcule o determinante da matriz $\lambda I_{n\times n} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$.

(b) Seja A uma matrix $n \times n$. Se $\det(A)$ é conhecido, calcule $\det(\lambda A)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Note que, em geral, **não é** $\lambda \det(A)$.

(c) Interprete estes resultados em termos de volume. O que acontece com a área de um quadrado se dobramos o comprimento dos seus lados? O que acontece com o volume de um cubo se dobramos o comprimento das suas arestas? Mais geralmente, o que acontece com um sólido em $\mathbb{R}^n$ se ampliamos (ou reduzimos) suas dimensões lineares por um fator multiplicativo λ?

Problema 2. Aplicamos em uma matriz A 5×5 as seguintes operações elementares:

(i) trocamos l_5 com l_4;

(ii) $l_4 \leftarrow l_4 + 3l_2$;

(iii) multiplicamos l_4 por -4.

Obtemos a matriz $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A)$.

Problema 3. Calcule o determinante das matrizes abaixo

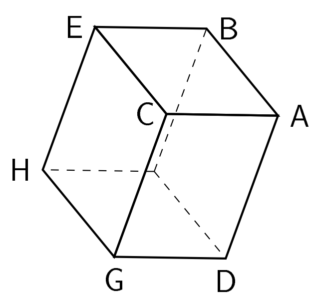
(a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

Problema 4. Para cada matriz A abaixo determine todos $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que a matriz $A - \lambda I$ não seja invertível:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Problema 5. A imagem do círculo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ pela transformação linear $(x, y) \mapsto (2x - y, 2x + y)$ é a elipse $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16\}$. Qual é a área compreendida por esta elipse?

Problema 6. Calcule o volume do paralelepípedo abaixo, cujos vértices são:
$A = (2, 3, 4)$, $B = (0, 8, 7)$, $C = (-1, 5, 9)$, $D = (2, -1, 10)$,
$E = (-3, 10, 12)$, $F = (0, 4, 13)$, $G = (-1, 1, 15)$, $H = (-3, 6, 18)$.



Problema 7. Se $T(x, y, z, w) = (z + y, x - 2y, z, w)$, calcule o $\det(T)$.

Problema 8.

(a) Seja $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & e \\ 0 & b & f & g \\ a & h & i & j \end{bmatrix}$. Troque linhas para matriz se tornar diagonal e prove que $\det(M) = abcd$.

(b) Determine uma fórmula geral para o determinante da matriz $n \times n$ cujos únicos elementos não-nulos são $a_{ij} = 1$ com $i + j = n + 1$: $\begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$.

Dica: Calcule para 2×2 e 3×3 inicialmente e item (a).

Problema 9. Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ então $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Qual o erro na "prova" que $\det(A^{-1})$ é sempre 1: $\det(A^{-1}) =$

$$= \det\left(\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{ad-bc}\det\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}(ad-bc) = 1.$$

Problema 10. Use matriz em blocos para calcular o determinante das matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6.9.3 Desafios

Desafio 1.

Definição 82 (produto vetorial) *Dados* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *definimos*

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,$$

o ***produto vetorial*** *entre* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$, *componente a componente, por*

$$w_i = \det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{e}_i \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Prove que:

(a) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$;

(b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ (antisimétrica);

(c) $(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \lambda\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (linear);

(d) $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ (orientação e normalização);

(e) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é perpendicular a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Desafio 2. O exercício anterior pode ser generalizado para se definir o produto vetorial entre $n-1$ vetores em $\mathbb{R}^n$.

Definição 83 (produto vetorial) *Dados* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ *definimos*

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1 \times \cdots \times \mathbf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n,$$

o ***produto vetorial*** *entre* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$, *componente a componente, por*

$$w_i = \det \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_{n-1} & \mathbf{e}_i \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Mostre que:

(a) este produto possuirá as mesmas propriedades que o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$ (antisimétrica, linear, orientação e normalização);

(b) $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_1 \times \cdots \mathbf{u}_{n-1}$ é perpendicular a cada $\mathbf{u}_i$ para $i = 1, \ldots, n-1$.

Desafio 3. (a) Mostre que a equação da reta em $\mathbb{R}^2$ que passa por $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ é dada por $\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0$;

(b) Mostre que a equação do plano em $\mathbb{R}^3$ que passa por $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$ é dado por $\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$.

Desafio 4. (a) Mostre que a área do triângulo com vértices em $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ e $v_3 = (x_3, y_3)$ é dada por $1/2 \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) O determinante acima pode ser calculado montando a matriz $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{bmatrix}$ e fazendo a soma do produto da diagonal com sinal positivo numa direção e negativo na outra. Este esquema permite obter fórmula de área de poligono qualquer (já que área é igual a soma das áreas dos triângulos) com vértices em $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ utilizando a matriz $\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & \cdots & y_n & y_1 \end{bmatrix}$. Determine-a.

Desafio 5. (Wronskiano) Dado um conjunto $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ de funções infinitamente diferenciáveis definimos o **wronskiano** $W(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)(x)$ como o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots & f_n''(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

(a) Prove que se $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ é LD então $W(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)(x) = 0$ para todo x;

(b) conclua de (a) que que se $W(x_0) \neq 0$ para algum x_0 então o conjunto de funções é LI;

(c) use (a) para provar que $\{1, x, e^x\}$ é LI;

(d) é claro que o conjunto de funções $\{x^2,\ x|x|\}$ é LI (porque?). Por outro lado, $W(x^2,\ x|x|)(x) = 0$ para todo x. Isto não implica por (b) que o conjunto é LD?

Obs: $(x|x|)' = 2|x|$.

Desafio 6. (determinante de Vandermonde 3×3) Prove que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a).$$

Desafio 7. Considere o seguinte problema: Dados pontos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ com $i = 0, \ldots, n$ determine polinômio $p(x)$ de grau n tal que $p(x_i) = y_i$.

(a) Monte um sistema linear para determinar os coeficientes a_i do polinômio $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$;

(b) Defina $M = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$ (conhecida como matriz de Vandermonde). Mostre que o sistema pode ser escrito como $M \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$;

(c) Mostre que $\det M = \prod_{k<n} (x_n - x_k)$.

Desafio 8. (variante de Vandermonde) (Shilov p. 30, no. 10) Prove que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k) \times \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Desafio 9. (Strang p. 210 no. 32) Prove que

$$\det \begin{bmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{bmatrix} = 1 + a + b + c + d.$$

Desafio 10. Prove que uma matriz com todas entradas racionais possui um determinante racional.

Desafio 11. Seja A uma matriz $n \times n$ com $|a_{ij}| \leq k$. Usando a idéia de determinante como volume, mostre que $|\det A| \leq (k\sqrt{n})^n$.

Desafio 12. Considere a matriz tridiagonal $n \times n$ $A_n = \begin{bmatrix} a & b & & \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & c & a \end{bmatrix}$. Defina $d_n = \det(A_n)$.

(a) Prove que $d_{n+1} = ad_n - bcd_{n-1}$.

(b) suponha que $a = 2$ e $b = c = -1$. Prove que $\det(A_n) = n + 1$.

Desafio 13. (Strang p. 216 no. 10) Calcule $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Desafio 14. (Shilov p.29 no. 9)

(a) $\det \begin{bmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{bmatrix}$; (b) $\det \begin{bmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{bmatrix}$.

Desafio 15. (Cálculo do posto de uma matriz utilizando determinante de submatrizes) Prove que para qualquer matriz quadrada o posto é k se, e somente se, k é o maior inteiro tal que existe uma submatriz $k \times k$ com determinante não-nulo.

Desafio 16.

(a) Qual (e onde colocar) o menor número possível de zeros que devemos colocar numa matriz 4×4 para garantir que o determinante é zero?

(b) E para uma matriz $n \times n$?

Desafio 17. Existem 16 matrizes 2 por 2 cujas entradas possuem somente 0's e 1's. Quantas delas são invertíveis?

6.9.4 Extras

Extra 1. Se A é uma matriz $n \times n$ com $\det(A) = -3$ então:

(a) $\det(A + A) =$ ___; (b) $\det(3A) =$ ___; (c) $\det(A^5/3) =$ ___;

Extra 2. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ a & b \end{bmatrix}$ com $\det(A) = 4$.

(a) a área do triângulo com vértices em $(0, 0), (2, a), (3, b)$ é _____;

(b) a área do triângulo com vértices em $(0, 0), (2, 3), (a, b)$ é _____;

(c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ a \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ b \end{bmatrix}$. Se $\lambda_1 \mathbf{u} = \lambda_2 \mathbf{v}$ para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ então $\lambda_1 =$ ___ e $\lambda_2 =$ ___.

Extra 3. B uma matriz quadrada.

(a) se uma linha é múltipla de outra então B ______ (*possui/não possui*) inversa;

(b) se nenhuma linha é múltipla de nenhuma outra então __________ ($\det(B) \neq 0$, $\det(B) = 0$, *nada podemos afirmar*).

Extra 4. Suponha que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear preserva área. Isto implica que T preserva comprimentos também?

Extra 5. Sabe-se que três arestas adjacentes ao vértice $(0, 0, 0)$ de um paralelepípedo no $\mathbb{R}^3$ são determinados pelos vértices $(-1, 2, 2)$, $(2, -1, 2)$ e $(2, 2, -1)$. Calcule o volume do paralelepípedo.

Extra 6. Seja $T(x, y, z) = (x + z, 2x + y + 3z, z - x)$. Considere o cubo

$$C = \{ae_1 + be_2 + ce_3;\ a, b, c \in [0, 3]\}.$$

Determine o volume do paralelepípedo

$$T(C) = \{aT(e_1) + bT(e_2) + cT(e_3);\ a, b, c \in [0, 3]\}.$$

Extra 7. Sejam a, b, c números reais positivos. Determine o volume do elipsóide $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \le 1\}$ encontrando um conjunto $B \subset \mathbb{R}^3$ e uma transformação linear T tal que $T(B) = E$.

Extra 8. Calcule o determinante das matrizes abaixo

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 11 & -7 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -7 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Extra 9. Para cada matriz A abaixo determine todos $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que a matriz $A - \lambda I$ não seja invertível:

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Extra 10. Diz-se que uma matriz quadrada P é uma **projeção** se $P^2 = P$. Mostre que $\det(P)$ é 0 ou 1.

Extra 11. Suponha que A e B são matrizes quadradas $n \times n$ com $AB = I$. Prove que $BA = I$.

Extra 12. Suponha $A^k = I$. Prove que

(a) se k é impar então $\det(A) = 1$; (b) se k é par então $\det(A) = 1$ ou -1.

Extra 13.

(a) Prove (usando determinante) que não existe A 3×3 (com entradas reais) tal que $A^2 = -I_{3\times3}$ (identidade);

(b) Tome $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e mostre que $B^2 = -I_{2\times2}$ (identidade). Esta matriz representa geometricamente uma rotação de 180^o. Portanto, num certo sentido, $B = \sqrt{-I}$.

Extra 14. Diz-se que uma matriz quadrada S é **anti-simétrica** se $S^T = -S$ (identidade). Mostre que :

(a) $\det(S) = 0$ se S é 3×3; (b) $\det(S) = 0$ se S é $n \times n$ com n impar.

Extra 15. Suponha N nilpotente (veja Definição 76 da página 118) , isto é, $N^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Mostre que N não é invertível.

Extra 16. Diz-se que uma matriz quadrada Q é **ortogonal** se $Q^T Q = I_{n\times n}$ (identidade). Mostre que $\det(Q)$ é 1 ou -1.

Extra 17. Deduza a fórmula do determinante da matriz 3×3 (mostrada na Figura 6.5 da página 131) seguindo a técnica da demonstração da fórmula 2×2 do Teorema 8 da página 127.

Extra 18. Considere $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, com A, B, C e D matrizes quadradas 2×2. Dê um exemplo que mostre que nem sempre $\det(M) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

Extra 19. Considere a matriz (em blocos) $M = \begin{bmatrix} X & I \\ A & 0 \end{bmatrix}$, com A, X quadradas e I a matriz identidade, todas de mesmo tamanho. Prove que $\det(M) = \det(A)$.

Extra 20. Seja A, B matrizes quadradas de mesma dimensão tais que $AB \neq BA$. Prove que $\det(AB) = \det(BA)$.

Extra 21. Suponha que $A = PDP^{-1}$ com $D = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{bmatrix}$ diagonal. Prove que $\det(A^k) = (n!)^k$.

Extra 22. Se A e B são invertíveis:
(a) $A + B$ é invertível? (b) AB é invertível? (c) $A^T B$ é invertível?

Extra 23. Se AB é invertível, então A é invertível?

Extra 24. Seja $M = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & a_2 & x \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_n & \dots & x & x \end{bmatrix}$. Prove que $\det(M) = (-1)^n(\prod_{i=1}^{n} a_i)$.

Extra 25. Suponha que $\det A = 0$. Prove que se B foi obtida de A por operações elementares então $\det A = 0$ se, e somente se, $\det B = 0$.

Extra 26. Considere $A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$, com $a, b > 0$, e o paralelogramo determinado pelas colunas desta matriz. Faça um desenho simples que mostra que a área deste paralelogramo é igual a área do retângulo de lados a e b. Conclua que $\det A = ab$.

Capítulo 7

Autovalores, Autovetores e Diagonalização

Neste capítulo apresentamos os conceitos de autovalores e autovetores de transformações lineares. As ferramentas para o cálculo (quando o espaço é de dimensão finita) são o determinante e solução de sistemas lineares. Utilizando-as podemos, em alguns casos, determinar base tal que a matriz que representa a TL seja diagonal.

Dedicamos uma seção somente para exemplos com TLs geométricas (projeções, rotações, reflexões e cisalhamento).

Aplicamos estas técnicas para:

- calcular a potências (A^k) e raíz quadrada ($\sqrt{A}$) de matriz;
- determinar estado limite de um sistema iterado, onde começamos num estado $\mathbf{v}_0$ e evoluimos por $\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n$.

Outras aplicações, que não são exploradas nestas notas, são:

- classificação de cônicas e quádricas; e
- determinação de pontos de máximo e mínimo local de funções de várias variáveis.

7.1 Autovalores e Autovetores

Nesta Seção vamos resolver o seguinte problema:

Dada transformação linear T, existe vetor $\mathbf{v}$ não-nulo tal que $\mathbf{v}$ e $T\mathbf{v}$ são paralelos? De forma equivalente: existe direção preservada por T? Como calculá-la?

Definição 84 (autovalor, autovetor e espectro) *Seja $T : V \to V$ transformação linear. Dizemos que $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ é* ***autovetor*** *associado ao* ***autovalor*** *λ se $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. O conjunto de autovalores de T é chamado de* ***espectro*** *de T.*

[0]Versão 28.jul.2008 10h

Observação 59

- *λ pode ser zero, mas $\mathbf{v}$ não. De fato a "direção" zero é sempre preservada por uma TL qualquer pois $T\mathbf{0} = \mathbf{0}$.*

- *se $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ podemos dizer que a direção $\mathbf{v}$ foi preservada pois $T\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, um múltiplo do próprio $\mathbf{v}$.*

- *o autovetor associado a um autovalor **não** é único. De fato, se $\mathbf{v}$ é autovetor qualquer e $k \neq 0$, $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$ também é autovetor pois $T(\mathbf{w}) = T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v}) = k\lambda\mathbf{v} = \lambda(k\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{w}$.*

Para ilustrar estes conceitos estude os exemplos de TLs da Seção "Exemplos Geométricos em 2D e 3D", das páginas 163–168. Observe nestes exemplos que:

- qualquer múltiplo de direção preservada também será preservada, o que mostra que os autovetores associados não são únicos;

- para TLs no plano podem existir infinitas direções, duas, uma ou nenhuma direção preservada;

- zero pode ser autovalor.

Dado um λ autovalor, queremos saber qual conjunto de vetores (denominado de autoespaço) $\mathbf{v} \in V$ satisfazem $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Queremos que $T\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = T\mathbf{v} - (\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Logo $(T - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Portanto $\mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(T - \lambda I)$.

Definição 85 (autoespaço) *O **autoespaço** associado a λ é o $\mathrm{Nuc}(T - \lambda I)$.*

Como calcular autovalores e autoespaços se V for de dimensão finita?

Dado autovalor λ, calculamos seu autoespaço $\mathrm{Nuc}(T - \lambda I)$ resolvendo um sistema linear. O problema é como encontrar um autovalor λ. Para isto será **fundamental** o determinante. Note que para que $\mathbf{v}$ seja autovetor tem que ser um elemento não nulo de $\mathrm{Nuc}(T - \lambda I)$. Portanto queremos que $\mathrm{Nuc}(T - \lambda I)$ seja não-trivial, o que será verdade, se, e somente se, $T - \lambda I$ não for invertível, que pelo Teorema 10 da página 133 (para V de dimensão finita), ocorrerá se, e somente se, $\det(T - \lambda I) = 0$.

Definição 86 (polinômio característico) *Dada transformação linear $T : V \to V$, V espaço de dimensão finita, definimos o **polinômio característico** de T por $p(\lambda) = \det(T - \lambda I)$.*

O próximo lema garante a coerência da definição ($p(\lambda)$ é um polinômio e é sempre o mesmo em qualquer base) e caracteriza-o com relação a dimensão do espaço.

Lema 45 (polinômio independe da base) *O polinômio característico $p(\lambda) = \det(T - \lambda I)$:*

(a) independe da base escolhida para o espaço V: $\det([T]_\beta - \lambda I) = \det([T]_\gamma - \lambda I)$;

(b) é um polinômio em λ de grau igual à dimensão do espaço.

Prova: (a) pela teoria da página 137 do Capítulo de Determinante, o determinante de uma TL independe de base.

(b) será omitida. ∎

O próximo teorema é um resultado notável, apresentado em livros de funções complexas, para onde remetemos o leitor para uma demonstração (veja Lars V. Ahlfors; "Complex Analysis"; McGraw-Hill; por exemplo). É atribuido ao grande matemático Gauss.

Teorema 14 (teorema fundamental da Álgebra) *Um polinômio de grau n tem exatamente n raízes (não necessariamente distintas) sobre o corpo dos complexos, isto é, existem números complexos, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (não necessariamente distintos), tais que*

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = a_n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n).$$

Esta fatoração é única (a menos da ordem).

Observação 60 *Embora pelo teorema fundamental da Álgebra um polinômio de grau 5 possua 5 raízes, um resultado surpreendente de Galois e Abel prova que* ***não*** *existe fórmula fechada para o cálculo destas raízes. Isto é conhecido em Matemática como o problema da "insolubilidade da quíntica" (impossibilidade de existência fórmula para raízes de equações de grau maior ou igual a 5). Por outro lado, a fórmula para o grau 3 ou 4, embora exista, é* ***muito*** *complicada, não sendo prática seu uso. Desta forma a única fórmula prática é a que aprendemos no ensino médio, a fórmula de cálculo de raízes de polinômio de grau 2 (conhecida como fórmula de Baskhara).*

Em resumo, para calcular autovalores e autoespaços para V de dimensão finita:

- determinamos os zeros de $\det(T - \lambda I) = 0$ para achar autovalores. Devemos preservar ao máximo uma expressão fatorada por ser muito difícil determinar raízes de polinômios de grau 3 em diante (veja Observação 54 da página 137);
- substituímos os autovalores na equação $(T - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ para determinar os autovetores v.

Exemplo 217 *Calcule os autovalores e autoespaços de $T(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.*

Vamos determinar os autovalores. Como $\det(T - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ -1 & (1-\lambda) \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = (\lambda - 0)(\lambda - 2)$, os autovalores são 0 e 2.

Calculando autoespaço para $\lambda = 0$: Resolvemos o sistema

$$(T - 0I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (1-0) & -1 \\ -1 & (1-0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $\left\{ \begin{array}{r} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array} \right.$. Portanto $x = y$, solução $(x, y) = t(1, 1)$ para $t \in \mathbb{R}$. Desta forma o autoespaço associado ao 0 é $\langle (1, 1) \rangle$. Um autovetor é $(1, 1)$ ou $(2, 2)$ ou $(1/2, 1/2)$ ou $(-1, -1)$ ou $(-100, -100)$ etc.

Calculando autoespaço para $\lambda = 2$*: Resolvemos o sistema*

$$(T - 2I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (1-2) & -1 \\ -1 & (1-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $\begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$. *Portanto* $x = -y$*, solução* $(x, y) = t(1, -1)$ *para* $t \in \mathbb{R}$*. Desta forma o autoespaço associado ao* 2 *é* $\langle (1, -1) \rangle$*. Um autovetor é* $(1, -1)$ *ou* $(2, -2)$ *ou* $(1/2, -1/2)$ *ou* $(-1, 1)$ *ou* $(-100, 100)$ *etc.*

Exemplo 218 *Calcule autovalores e autovetores de* $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Vamos determinar os autovalores: $\det(T - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} (3-\lambda) & -1 & 0 \\ 1 & (1-\lambda) & 0 \\ 1 & 0 & (-1-\lambda) \end{bmatrix}$.

Para calcular o determinante note que a matriz já é quase triangular inferior. Para zerar o -1 *(linha* 1 *coluna* 2*), faça* $l_1 \leftarrow l_1 + l_2/(1 - \lambda)$*. Obteremos* $\det(T - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} (3-\lambda) - 1/(1-\lambda) & 0 & 0 \\ 1 & (1-\lambda) & 0 \\ 1 & 0 & (-1-\lambda) \end{bmatrix}$*. Como a matriz é diagonal, obtemos que o determinante é* $(-1-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda) - 1)$*. Como* $(3-\lambda)(1-\lambda) - 1 = -\lambda^2 + 4\lambda - 4 = -(\lambda - 2)^2$, $\det(T - \lambda I) = -(-1-\lambda)(\lambda - 2)^2$*. Portanto os autovalores são* 2 *e* -1*.*

Calculando autoespaço para $\lambda = 2$*: Resolvemos o sistema*

$$(T - 2I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (3-2) & -1 & 0 \\ 1 & (1-2) & 0 \\ 1 & 0 & (-1-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$. *Portanto tomando* $z = t$*, solução* $(x, y, z) = t(3, 3, 1)$ *para* $t \in \mathbb{R}$*. Desta forma o autoespaço associado ao* 2 *é* $\langle (3, 3, 1) \rangle$*.*

Calculando autoespaço para $\lambda = -1$*: Resolvemos o sistema*

$$(T + I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (3+1) & -1 & 0 \\ 1 & (1+1) & 0 \\ 1 & 0 & (-1+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $\begin{cases} 4x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$. *Portanto* $x = y = 0$*, e* z *qualquer, solução* $(x, y, z) = t(0, 0, 1)$ *para* $t \in \mathbb{R}$*. Desta forma o autoespaço associado ao* -1 *é* $\langle (0, 0, 1) \rangle$*.*

Exemplo 219 (rotação no plano) *No Exemplo 184 da página 109 (Capítulo Matrizes) deduzimos que a matriz de rotação de vetores do plano por um ângulo* θ *(no sentido trigonométrico, isto é, anti-horário) é* $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Calculando seu polinômio característico obtemos $p(\lambda) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$ *(identidade trigonométrica* $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$*). Como* $\Delta = 4(\cos^2\theta - 1) =$

$-4\,\mathrm{sen}^2\,\theta$, $\Delta < 0$ *(raízes complexas) a não ser que* $\mathrm{sen}\,\theta = 0$, *ou seja, a não ser que* $\theta = 0°$ *ou* $180°$. *Portanto são três casos:*

(a) $\theta = 0°$. *Neste caso* $R = I$, *a matriz identidade. Qualquer direção não-nula é autovetor com autovalor* 1. *A matriz é (na realidade já está) diagonalizável.*

(b) $\theta = 180°$. *Neste caso* $R = -I$. *O autovalor é* -1 *com qualquer direção não-nula como autovetor. Novamente é (e já está) diagonalizável.*

(c) $\theta \notin \{0°, 180°\}$. *Neste caso os autovalores são complexos não-reais. Portanto* ***nenhuma*** *direção é preservada.*

Encerramos esta Seção com dois exemplos de autovalores e autovetores (chamados de autofunção) no espaço de dimensão infinita $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, o espaço das funções reais diferenciáveis: os operadores lineares de primeira e segunda derivada. Na teoria mais avançada de equações diferenciais esta idéia é muito importante.

Exemplo 220 *Considere* $T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *definida por* $Tf = f'$. *Qual autovetor (chamada também de autofunção) associado ao autovalor* 3*? Isto é, para qual função* f, $Tf = f' = 3f$*?*

$f(t) = \exp(3t)$ *pois* $f'(t) = 3\exp(3t)$, *isto é,* $Tf = f' = 3f$. *Note que* $g(t) = C\exp(3t)$ *também será autofunção para qualquer* $C \in \mathbb{R}$.

Exemplo 221 *Considere* $T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, *definida por* $Tf = f''$. *Qual autovetor (chamada também de autofunção) associado ao autovalor* -4*? Isto é, para qual função* f, $Tf = f'' = -4f$*?*

Uma possibilidade é $f(t) = \sin(2t)$ *pois* $f'(t) = 2\cos(2t) \implies f''(t) = -4\sin(2t)$, *isto é,* $f'' = -4f$. *Outra função é* $f(t) = \cos(2t)$ *pois* $f'(t) = -2\sin(2t) \implies f''(t) = -4\cos(2t)$, *isto é,* $Tf = f'' = -4f$. *Combinações lineares de* $\sin(2t)$ *e* $\cos(2t)$ *também serão autofunção, isto é,* $g(t) = C_1\,\mathrm{sen}(2t) + C_2\cos(2t)$ *com* $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ *também será autofunção.*

7.2 Diagonalização

A teoria de diagonalização, juntamente com o Teorema do núcleo-imagem, é um dos marcos do curso de Álgebra Linear. Sua importância é que, após mudança de bases, o comportamento de TLs ditas diagonalizáveis podem ser inteiramente compreendidas.

Definição 87 *Dizemos que* T *é* ***diagonalizável*** *se existe uma base* β *tal que* $[T]_\beta$ *é uma matriz diagonal. Dizemos que uma matriz* A *é diagonalizável se a TL associada a ela* T_A *é diagonalizável.*

Teorema 15 (TL é diagonalizável) *Considere* V *espaço de dimensão finita. Uma transformação linear* $T : V \to V$ *é diagonalizável se, e somente se,* V *possui uma base de autovetores de* T.

Prova: Suponha que T é diagonalizável. Logo existe base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ tal que $[T]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal. Como $[T]_\beta \mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k$ e $[\mathbf{v}_k]_\beta = \mathbf{e}_k$, $[T]_\beta[\mathbf{v}_k]_\beta = [T\mathbf{v}_k]_\beta = \lambda_k[\mathbf{v}_k]_\beta$, ou seja, $T\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{v}_k$. Concluímos que os $\mathbf{v}_k$'s são autovetores e formam uma base.

Suponha que $\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é base de autovetores. Para completar basta ler a primeira parte da demonstração de trás para frente. ■

Corolário 12 (forma $P^{-1}AP = D$) *Suponha que a matriz A seja diagonalizável. Então existe P invertível tal que $P^{-1}AP = D$ (ou de forma equivalente $A = PDP^{-1}$), com D diagonal formada pelos autovalores de A e P cujas colunas são autovetores correspondentes.*

Prova: Seja P uma matriz cujas colunas são os autovetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ de A e D diagonal cujas entradas são os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, na mesma seqüência. Pelas propriedades do produto matriz-matriz, as colunas de AP são $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$. Logo (verifique), a matriz com estas colunas é igual a PD. Portanto, $AP = PD$. Como os autovetores formam base, as colunas de P são LI. Pelo Corolário 9 da página 133, $\det P \neq 0$. Pelo Teorema 10 da mesma página, P é invertível. Logo $P^{-1}AP = D$ ou $D = PAP^{-1}$. ∎

Definição 88 (decomposição espectral) *Se A é diagonalizável chamamos de* ***decomposição espectral*** *de A a fatoração $A = PDP^{-1}$ com D matriz diagonal com autovalores de A.*

Lema 46 (autovetores são LIs) *Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes, ou seja, se $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ e $T\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$, $k = 1, \dots, p$, com λ_k's distintos, então $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ é LI.*

Prova: Suponha falsa a tese. Neste caso, seja $2 \leq r \leq p$ mínimo tal que $\mathbf{v}_r$ é CL dos anteriores: $\mathbf{v}_r = \sum_{k<r} \alpha_k \mathbf{v}_k$.

Temos então: $T\mathbf{v}_r = \lambda_r \mathbf{v}_r \quad \Rightarrow \quad T\left(\sum_{k<r} \alpha_k \mathbf{v}_k\right) = \lambda_r \sum_{k<r} \alpha_k \mathbf{v}_k \quad \Rightarrow \sum_{k<r} \lambda_k \alpha_k \mathbf{v}_k = \sum_{k<r} \lambda_r \alpha_k \mathbf{v}_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k<r} (\lambda_k - \lambda_r) \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ Mas isto implica que $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1}$ são LD, o que contraria a minimalidade de r. ∎

O próximo corolário coloca uma condição suficiente (mas não necessária) para que uma TL seja diagonalizável. A condição não é necessária pois uma TL com todos autovalores iguais (por exemplo a identidade, que possui somente o autovalor 1) pode ser diagonalizável.

Corolário 13 *Se o espaço V possui dimensão n e existem n autovalores distintos então T é diagonalizável.*

Prova: Se existem n autovalores distintos, pelo Lema auto:lemalis eles são LIs. Como espaço possui dimensão n, formam base. Logo V possui base de autovetores de T. ∎

Para diagonalizar uma TL em dimensão n:

- Calcule os autovalores (raízes do polinômio característico);
- Encontre bases para autoespaços (resolver sistemas homogêneos);
- Junte os autovetores de todas as bases: se forem suficientes (n vetores), esta base diagonaliza T; caso contrário, T não é diagonalizável.

Exemplo 222 *No Exemplo 217, o operador T é diagonalizável pois são dois autovalores distintos (0 e 1) e portanto dois autovetores LIs (pelo Lema 46). Tomando $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 2 \end{bmatrix}$. Observe que se trocarmos a ordem dos vetores obtemos uma matriz diagonal diferente. Assim se tomarmos $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 0 \end{bmatrix}$.*

Exemplo 223 (não-diagonalizável) *No Exemplo 218, o operador T não é diagonalizável pois cada auto-espaço possui somente um vetor LI. Dois vetores (um base de cada autoespaço) não forma base pois precisaríamos de três vetores LIs.*

Exemplo 224 *Encontre a decomposição espectral de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.*

Calculando $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(\lambda(3 - \lambda) + 2)$ (utilize determinante por bloco). Note que vamos manter a fatoração (veja Observação 54 da página 137) pois queremos depois calcular raízes. Assim $p(\lambda) = (2 - \lambda)(-\lambda^2 + 3\lambda + 2)$. Calculando raízes de p são 2 (do primeiro fator e do polinômio do segundo grau) e 1.

Agora resolvendo o sistema $(A - 2I)\mathbf{v} = 0$ obtemos como autovetores associados ao 2: $(2, 0, 1)$ e $(-1, 1, 0)$. Resolvendo $(A - I)\mathbf{v} = 0$ obtemos autovetor associado ao 1 $(1, -2, 0)$. Como são 3 autovetores LIs, T é diagonalizável. Seja $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Então $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$. Observe que se trocarmos a ordem dos vetores obtemos uma matriz diagonal diferente. Assim se tomarmos $Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$.

Exemplo 225 (cisalhamento não é diagonalizável) *Considere o cisalhamento $T(x, y) = (x + y, y)$ representado na Figura 7.7. A matriz associada a T é $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. O polinômio característico é $p(\lambda) = (1 - \lambda)^2$. Portanto o único autovalor é 1. Resolvendo $(A - I)\mathbf{v} = 0$ obtemos $y = 0$. Portanto a única direção preservada é $(1, 0)$. Como os autovetores não formam base, esta TL **não** é diagonalizável.*

Exemplo 226 (rotação no plano não é diagonalizável) *Como mostrado no Exemplo 219, uma rotação no plano que não seja I (ângulo $0°$) nem $-I$ (ângulo $180°$) não possui direção preservada. Logo não é diagonalizável.*

Para mais exemplos de TLs veja a Seção "Exemplos Geométricos em 2D e 3D", das páginas 163–168.

Para transformações geométricas podemos calcular os autovalores e autoespaços sem fazer contas, somente com a geometria. Além disso podemos determinar sua decomposição espectral.

Exemplo 227 (projeção em reta no plano) *Considere T uma projeção ortogonal na reta $r = \langle \mathbf{w} \rangle$. Determine autovalores e autovetores e sua decomposição espectral.*

Considere $\mathbf{v}$ *uma direção perpendicular à reta* r. *É claro que* $T\mathbf{v} = 0 = 0\mathbf{v}$ *e* $T\mathbf{w} = 1\mathbf{w}$. *Logo são autovalores* 0 *e* 1 *com autovetores associados* $\mathbf{w}$ *e* $\mathbf{v}$.

Defina $P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, *então*

$$AP = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ A\mathbf{v} & A\mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ 0 & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix}$. *Observe que se definirmos* $Q = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{w} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, *então* $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 228 (projeção em plano no espaço) *Considere* T *uma projeção ortogonal no plano* $\Pi = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. *Determine autovalores e autovetores e sua decomposição espectral.*

Considere $\mathbf{u}$ *uma direção perpendicular ao plano* Π. *É claro que* $T\mathbf{u} = 0 = 0\mathbf{u}$, $T\mathbf{v} = 1\mathbf{v}$ *e* $T\mathbf{w} = 1\mathbf{w}$. *Logo são autovalores:* 0 *com autovetor* $\mathbf{u}$ *e* 1 *com autovetores* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$.

Defina $P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, *então*

$$AP = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A\mathbf{u} & A\mathbf{v} & A\mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0 & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 229 (reflexão em plano no espaço) *Considere* T *uma reflexão ortogonal no plano* $\Pi = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. *Determine autovalores e autovetores e sua decomposição espectral.*

Considere $\mathbf{u}$ *uma direção perpendicular ao plano* Π. *É claro que* $T\mathbf{u} = -1\mathbf{u}$, $T\mathbf{v} = 1\mathbf{v}$ *e* $T\mathbf{w} = 1\mathbf{w}$. *Logo são autovalores:* -1 *com autovetor* $\mathbf{u}$ *e* 1 *com autovetores* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$.

Defina $P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, *então*

$$AP = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A\mathbf{u} & A\mathbf{v} & A\mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ -\mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 230 (rotação em torno de eixo no espaço) *Considere* T *uma rotação em torno do eixo* $r = \langle \mathbf{w} \rangle$ *por um ângulo qualquer diferente de* $0°$ *ou* $180°$. *Determine autovalores e autovetores e sua decomposição espectral.*

Considere $\Pi = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ *o plano perpendicular ao eixo* r. *É claro que a única direção preservada será* $\mathbf{w}$, *quando* $T\mathbf{w} = \mathbf{w}$. *Qualquer outra direção será modificada. Logo único autovalor (real) é* 1 1 *com autovetor* $\mathbf{w}$. *Portanto o operador* T *não é diagonalizável.*

Deixamos para o leitor alguns outros exemplos: projeção em reta no espaço, reflexão para uma reta no plano, reflexão em plano no espaço. Você pode repetir a análise dos exemplos anteriores para estes casos?

Finalizamos esta seção apresentando, sem demonstração, o Teorema Espectral para matrizes simétricas (ver Definição 71 da página 107). Ele é utilizado em diversas aplicações pois permite garantir, sem fazer conta alguma (por exemplo sem saber quem são os autovalores), que uma matriz é diagonalizável. É utilizado para:

- determinação de máximos e mínimos locais de função de várias variáveis através do estudo de sinais dos autovalores da chamada matriz Hessiana;
- classificação de cônicas e quádricas;
- estudo de mecânica de corpos rígidos.

Teorema 16 (espectral para matrizes simétricas) *Se* $A = A^T$ *(dizemos que a matriz* A *é simétrica) então* A *é diagonalizável.*

Exemplo 231 *São diagonalizáveis:* $\begin{bmatrix} k_1 & a & b \\ a & k_2 & c \\ b & c & k_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$.

7.3 Exemplos Geométricos em 2D e 3D

Exemplo 232 (reflexão) *Seja* T *uma reflexão em torno do eixo-*x, *dada por* $T(x, y) = (x, -y)$. *Observe na Figura 7.1 o efeito da reflexão. Quais direções são preservadas?*

A direção $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ *(no eixo*$-x$*) cuja imagem* $T\mathbf{e}_1 = (1, 0) = \mathbf{e}_1$ *e a direção* $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, *no eixo-*y, *cuja imagem* $T\mathbf{e}_2 = (0, -1) = -\mathbf{e}_2$.

São autovalores 1 *e* -1, *com autovetores respectivamente* $\mathbf{e}_1$ *e* $\mathbf{e}_2$. *Como possui dois autovetores LIs em* $\mathbb{R}^2$, *é diagonalizável.*

Exemplo 233 (rotação de $23°$ no plano) *Seja* T *uma rotação de* $23°$ *em torno da origem (para uma fórmula ver a página 184. Observe na Figura 7.2 o efeito da rotação. Quais direções são preservadas?*

Nenhuma *direção é preservada! Portanto neste caso* ***não*** *existe vetor não-nulo que seja preservado por* T.

Não possui autovalores (reais) e não é diagonalizável.

Exemplo 234 (ampliação uniforme) *Seja* T *definida por* $T(x, y) = (2x, 2y)$, *isto é,* $T = 2I$. *Esta transformação amplia os vetores na direção* x *e* y *pelo mesmo fator* 2. *Observe na Figura 7.3 o efeito de* T. *Quais direções são preservadas?*

Neste caso TODAS as direções são preservadas. O círculo unitário é levado por T *num círculo de raio* 2.

É autovalor 2, *com autovetor qualquer direção no plano. Por exemplo podemos tomar* $\mathbf{e}_1$ *e* $\mathbf{e}_2$. *Como possui dois autovetores LIs em* $\mathbb{R}^2$, *é diagonalizável.*

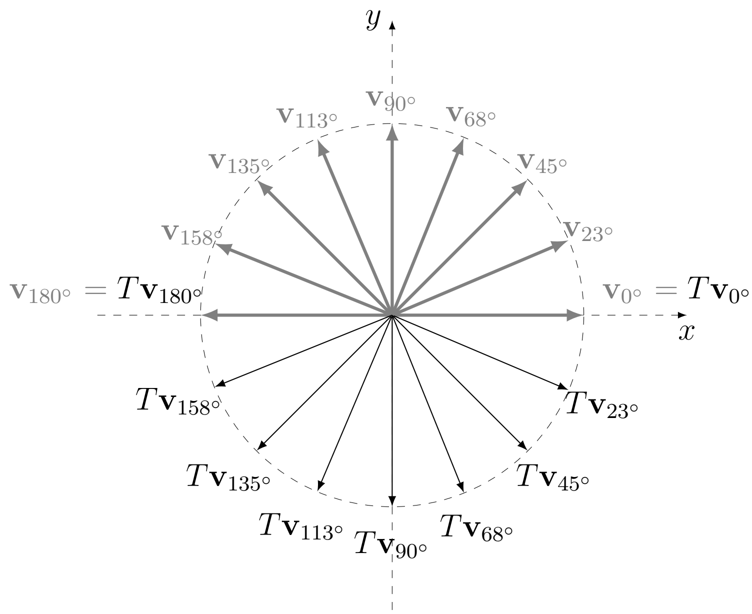


Figura 7.1: Reflexão no eixo-x: $T(x, y) = (x, -y)$

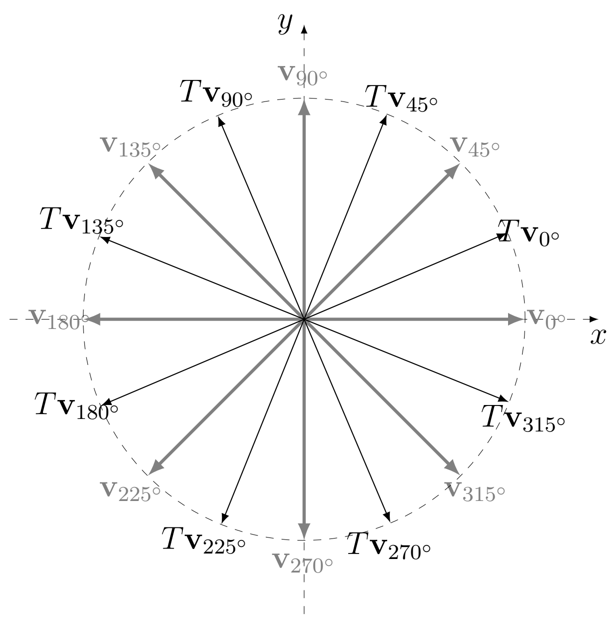


Figura 7.2: Rotação de 23°

Exemplo 235 (ampliação elipsoidal) *Seja T definida por $T(x, y) = (3/2x, 2y)$. Esta transformação amplia os vetores na direção x e y, mas com ampliação maior na direção y, fazendo com que a imagem de um círculo seja uma elipse. Observe na Figura 7.4 o efeito de T. Quais direções são preservadas?*

A direção $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ (no eixo$-x$) cuja imagem $T\mathbf{e}_1 = (3/2, 0) = 3/2\mathbf{e}_1$ e a direção $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, no eixo-y, cuja imagem $T\mathbf{e}_2 = (0, 2) = 2\mathbf{e}_2$. O círculo unitário é levado por T numa elipse.

São autovalores $3/2$ e 2, com autovetores respectivamente $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Como possui dois autovetores LIs em $\mathbb{R}^2$, é diagonalizável.

Exemplo 236 (ampliação elipsoidal com reflexão) *Seja T definida por*

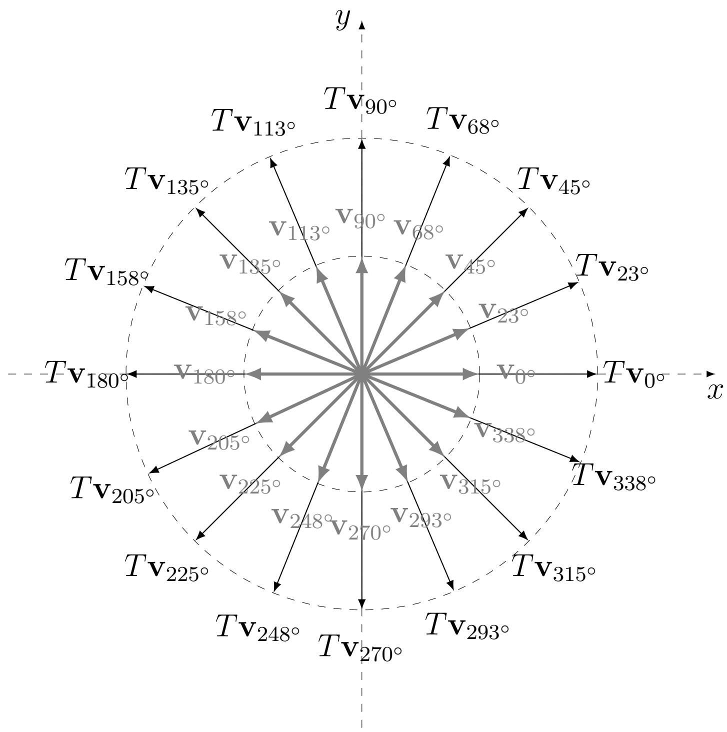


Figura 7.3: Ampliação Uniforme: $T(x, y) = (2x, 2y)$

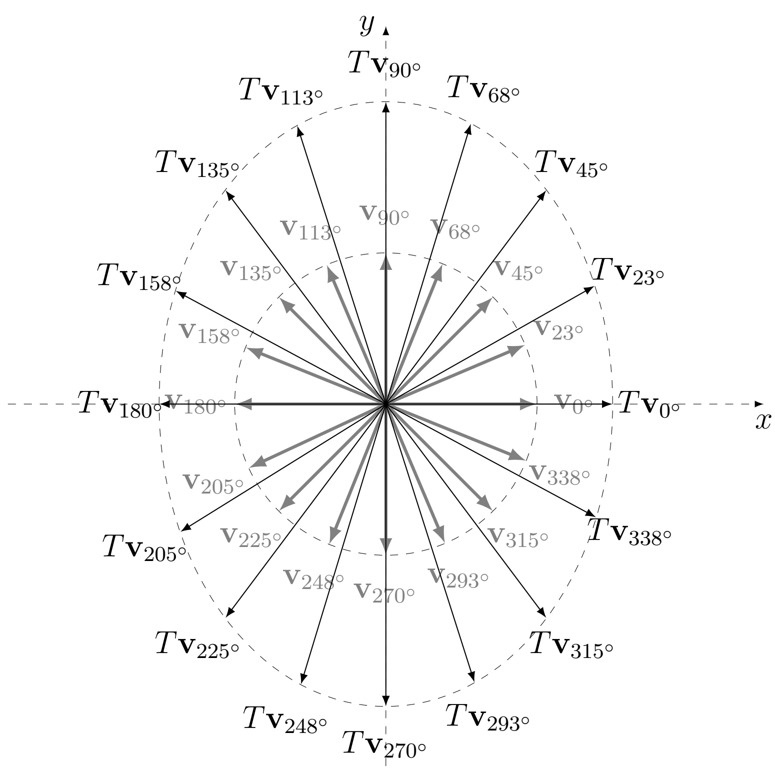


Figura 7.4: Ampliação Elipsoidal $T(x, y) = (3/2x, 2y)$

$T(x, y) = (3/2x, -2y)$. *Esta transformação amplia na direção* y *mas refletindo no eixo-*x *e amplia na direção* x. *Observe na Figura 7.5 o efeito de* T. *Quais direções são preservadas?*

A direção $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ *(no eixo−*x*) cuja imagem* $T\mathbf{e}_1 = (3/2, 0) = 3/2\mathbf{e}_1$ *e a direção* $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$*, no eixo-*y*, cuja imagem* $T\mathbf{e}_2 = (0, -2) = -2\mathbf{e}_2$. *O círculo unitário é levado por*

T numa elipse.

São autovalores $3/2$ e -2, com autovetores respectivamente $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Como possui dois autovetores LIs em $\mathbb{R}^2$, é diagonalizável.

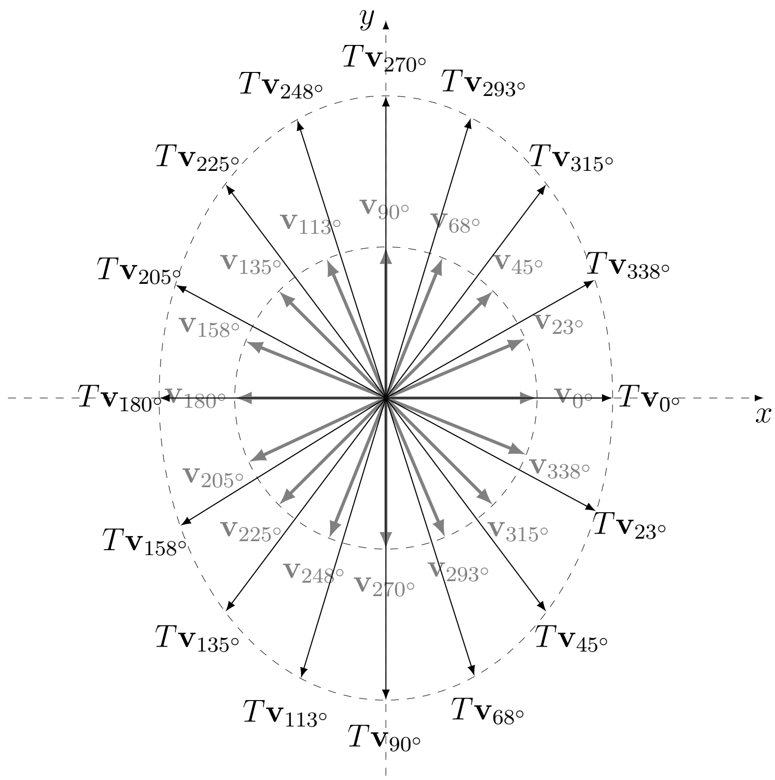


Figura 7.5: Ampliação Elipsoidal com reflexão $T(x, y) = (3/2x, -2y)$

Exemplo 237 (ampliação/redução elipsoidal) *Seja T definida por $T(x, y) = (x/2, 2y)$. Esta transformação amplia na direção y e reduz na direção x. Observe na Figura 7.6 o efeito de T. Quais direções são preservadas?*

A direção $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ (no eixo$-x$) cuja imagem $T\mathbf{e}_1 = (0, 1/2) = 1/2\mathbf{e}_1$ e a direção $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, no eixo-y, cuja imagem $T\mathbf{e}_2 = (0, 2) = 2\mathbf{e}_2$. O círculo unitário é levado por T numa elipse.

São autovalores $1/2$ e 2, com autovetores respectivamente $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Como possui dois autovetores LIs em $\mathbb{R}^2$, é diagonalizável.

Exemplo 238 (cisalhamento) *Seja T definida por $T(x, y) = (x + y, y)$. Observe na Figura 7.7 o efeito do cisalhamento, uma TL do tipo que fazemos com um baralho de cartas quando deslizamos as cartas uma por cima das outras. O efeito é deslocar os vetores mais para direita, para $y > 0$, mais para a esquerda, com $y < 0$, mantendo a componente y. Um exemplo são placas tectônicas da terra deslizando uma sobre a outra. Quais direções são preservadas?*

Somente a direção $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ (no eixo$-x$), cuja imagem $T\mathbf{e}_1 = (1, 0) = \mathbf{e}_1$, é preservada. Um quadrado é levado num paralelogramo.

*É autovalor 1, com autovetor $\mathbf{e}_1$. Como possui somente um autovetor em $\mathbb{R}^2$, **não** é diagonalizável.*

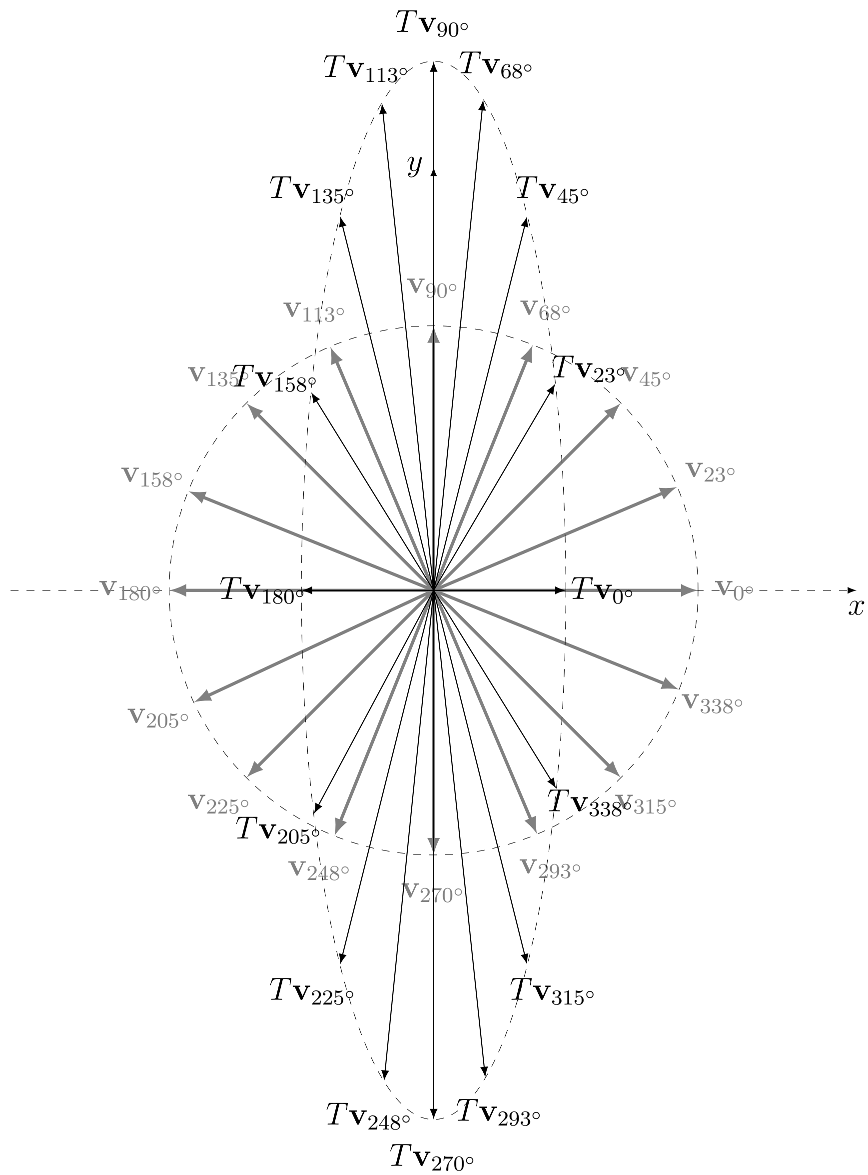


Figura 7.6: Ampliação/Redução Elipsoidal: $T(x, y) = (x/2, 2y)$

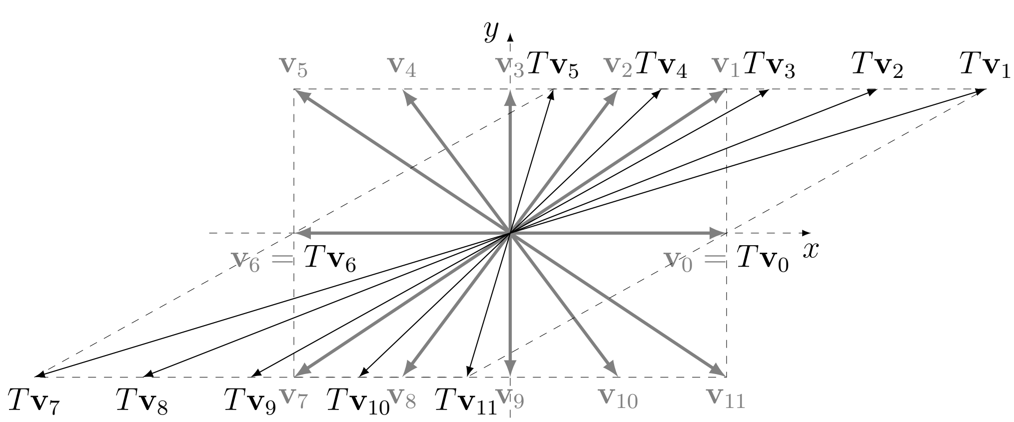


Figura 7.7: Cisalhamento: $T(x, y) = (x + y, y)$

Exemplo 239 (projeção no eixo-x) *Seja T definida por $T(x, y) = (x, 0)$. Esta transformação projeta os vetores no eixo-x. Observe na Figura 7.8 o efeito de T. Quais direções são preservadas?*

A direção $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ (no eixo$-x$) cuja imagem $T\mathbf{e}_1 = (0, 1) = 1\mathbf{e}_1$ e a direção $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, no eixo-y, cuja imagem $T\mathbf{e}_2 = (0, 0) = 0\mathbf{e}_2$. Uma elipse é levada por T numa segmento de reta.

São autovalores 1 e 0, com autovetores respectivamente $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Como possui dois autovetores LIs em $\mathbb{R}^2$, é diagonalizável.

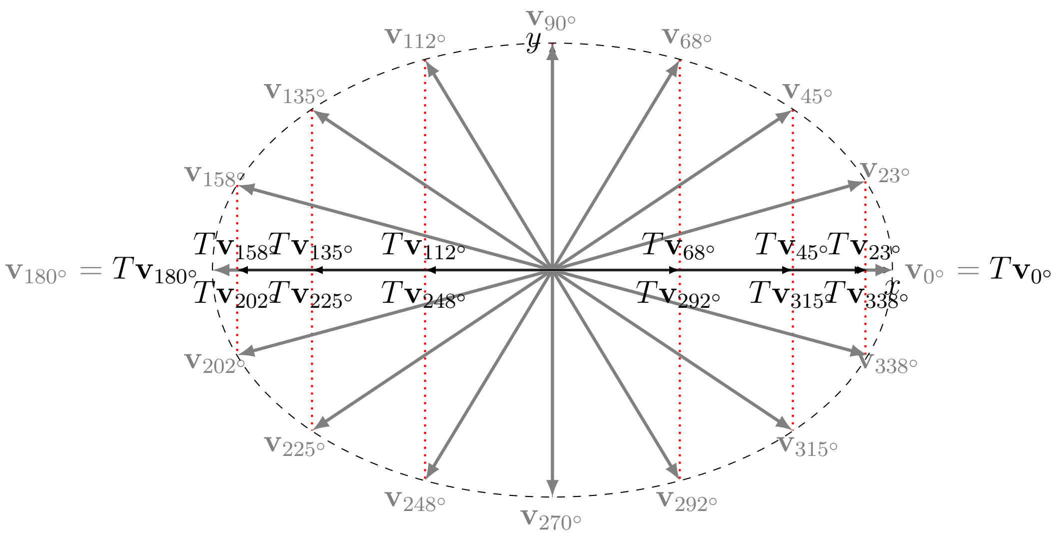


Figura 7.8: Projeção no eixo-x: $T(x, y) = (x, 0)$

Exemplo 240 (projeção no plano $z = 0$ no espaço) *Seja T uma projeção no plano $z = 0$, dada por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Observe a Figura 7.9. Quais direções são preservadas?*

A direção $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ (no eixo$-x$) cuja imagem $T\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0) = \mathbf{e}_1$, a direção $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, no eixo-y, cuja imagem $T\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0) = \mathbf{e}_2$. direção $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, no eixo-z, cuja imagem $T\mathbf{e}_3 = (0, 0, 0) = 0\mathbf{e}_3$.

São autovalores 1, com autovetores $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, e 0, com autovetor $\mathbf{e}_3$. Como possui três autovetores LIs em $\mathbb{R}^3$, é diagonalizável.

Deixamos para o leitor estudar em reflexão no plano $z = 0$ no espaço e na projeção no eixo z.

7.4 Aplicações

Como calcular potências de uma matriz e determinar o limite de A^k quando k vai para infinito?

Vamos começar determinando uma fórmula para D^k quando D é diagonal. Seja $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$. É fácil verificar que $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$ para qualquer k inteiro. Na

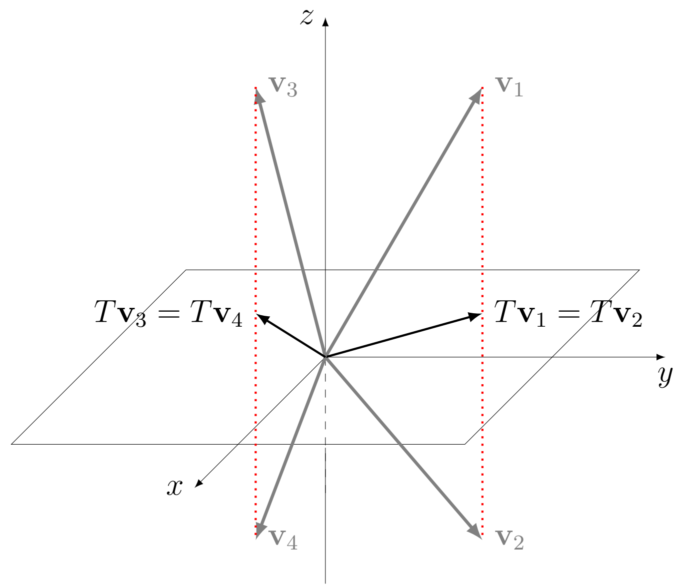


Figura 7.9: Projeção no plano $z = 0$: $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

realidade isto também funciona para D^{-1} (a inversa de D) tomando $k = -1$ e utilizando a convenção que $D^0 = I$ (o equivalente da convenção $x^0 = 1$ para números reais). Assim para calcular D^2 basta calcular o quadrado dos elementos da diagonal.

Agora vamos determinar uma fórmula para A^k quando A é diagonalizável. Se A é diagonalizável, pelo Corolário 12, $A = PDP^{-1}$. Assim, por exemplo,

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

Outro exemplo

$$A^3 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)DP^{-1} = PDDDP^{-1} = PD^3P^{-1}.$$

De forma geral, $A^k = PD^kP^{-1}$.

Exemplo 241 *Calcule* A^{10} *para* $A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda/2 - 1/2$. *As raízes (os autovalores) são* 1 *e* $-1/2$. *Resolvendo os sistemas associados, determinamos os autoespaços.*

O autoespaço associado ao $-1/2$ *é* $\langle(1, 1)\rangle$. *O autoespaço associado ao* 1 *é* $\langle(1, -1)\rangle$. *Portanto,* $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *com* $D = \begin{bmatrix} -1/2 & \\ & 1 \end{bmatrix}$. *Calculando a inversa de* P *determinamos que* $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. *Como* $D^{10} = \begin{bmatrix} 1/2^{10} & \\ & 1 \end{bmatrix}$, *calculando o produto* $PD^{10}P^{-1}$ *obtemos que* $A^{10} = \frac{1}{2^{11}}\begin{bmatrix} 2^{10}+1 & 1-2^{10} \\ 1-2^{10} & 2^{10}+1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 242 (limite de seqüência de matrizes) *Considere* $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -17/3 \end{bmatrix}$. *Calcule* $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda/3 + 1/3$. *As raízes (os autovalores) são* 1 *e* $1/3$. *Resolvendo os sistemas associados, determinamos os autoespaços.*

O autoespaço associado ao 1 *é* $\langle(2,-3)\rangle$. *O autoespaço associado ao* $1/3$ *é* $\langle(-3,5)\rangle$. *Portanto,* $P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ *com* $D = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1/3 \end{bmatrix}$. *Calculando a inversa de* P *determinamos que* $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

É claro que $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = \lim\limits_{k\to\infty}(PD^kP^{-1}) = P\left(\lim\limits_{k\to\infty} D^k\right)P^{-1}$.

Como $D^k = \begin{bmatrix} 1^k & \\ & (1/2)^k \end{bmatrix}$, *o primeiro elemento da diagonal é sempre* 1 *e o segundo converge para zero. Logo,* $\lim\limits_{k\to\infty} D^k = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}$. *Concluímos que o limite é* $P\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$, *obtendo que* $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -15 & -9 \end{bmatrix}$.

Exemplo 243 (estado limite) *Considere a matriz* $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Dado um vetor qualquer inicial* $\mathbf{v}_0$, *definimos* $\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_k$. *Queremos saber para qual vetor o sistema vai convergir (e se vai convergir). A convergência depende do vetor inicial?*

É claro que (por indução) $\mathbf{v}_k = A^k\mathbf{v}_0$. *Assim queremos calcular* $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$. *Vamos seguir os passos do exemplo anterior.*

Como a matriz é diagonal, os autovalores são $1/2$ *e* 1. *Resolvendo os sistemas associados, determinamos os autoespaços. O autoespaço associado ao* $1/2$ *é* $\langle(1,0,0),(1,1,1)\rangle$. *O autoespaço associado ao* 1 *é* $\langle(1,1,0)\rangle$. *Portanto,* $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *com*
$D = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$. *Calculando a inversa de* P *determinamos que*
$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Como $D^k = \begin{bmatrix} (1/2)^k & & \\ & (1/2)^k & \\ & & 1^k \end{bmatrix}$, *o terceiro elemento da diagonal é sempre* 1 *e o primeiro e o segundo convergem para zero. Logo,* $\lim\limits_{k\to\infty} D^k = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$. *Concluímos que o limite é* $P\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}P^{-1}$, *obtendo que* $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Assim se* $\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$,
$\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{v}_k = \lim\limits_{k\to\infty} A^k\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} b-c \\ b-c \\ 0 \end{bmatrix}$.

Como calcular raiz quadrada de matriz diagonalizável?

Se $A = PDP^{-1}$ com elementos da diagonal de D (autovalores) positivos, definimos $B = \sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}$, onde $\sqrt{D}$ significa tomar raiz (positiva) dos elementos da diagonal. Desta forma, $B^2 = (P\sqrt{D}P^{-1})(P\sqrt{D}P^{-1}) = P\sqrt{D}\sqrt{D}P^{-1} = P(\sqrt{D})^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$ pois é claro que $\left(\sqrt{D}\right)^2 = D$.

Exemplo 244 (raíz quadrada de matriz) *Calcule $\sqrt{A}$ para $A = \begin{bmatrix} -6 & -30 \\ 5 & 19 \end{bmatrix}$.*

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda + 36$. As raízes (os autovalores) são 4 e 9. Resolvendo os sistemas associados, determinamos os autoespaços.

O autoespaço associado ao 9 é $\langle(-2,1)\rangle$. O autoespaço associado ao 4 é $\langle(-3,1)\rangle$. Portanto, $P = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ com $D = \begin{bmatrix} 9 & \\ & 4 \end{bmatrix}$. Calculando a inversa de P determinamos que $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Como $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 3 & \\ & 2 \end{bmatrix}$, calculando o produto $P\sqrt{D}P^{-1} = \sqrt{A}$ obtemos que $B = \sqrt{A} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. Verifique diretamente que $B^2 = A$.

Note que poderíamos ter tomado, ao invés de $\sqrt{D}$ uma das opções: $\begin{bmatrix} -3 & \\ & 2 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 3 & \\ & -2 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} -3 & \\ & -2 \end{bmatrix}$, pois o quadrado de qualquer uma delas é igual a D. Nestes casos obteríamos matrizes $B_1 = \begin{bmatrix} 12 & 30 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} -12 & -30 \\ 5 & 13 \end{bmatrix} = -B_1$, $B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = -B_1$. Para qualquer uma delas, $B_i^2 = A$.

7.5 ⋆Multiplicidade Algébrica e Geométrica[0]

Definição 89 (multiplicidade algébrica) *Dado polinômio característico $p(\lambda)$ de T, pelo Teorema 14 podemos, agrupando termos repetidos, escrever que*

$$p(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{m_p},$$

*onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ são raízes distintas de $p(\lambda)$, e portanto autovalores distintos de T. Definimos a **multiplicidade algébrica** de λ_k por m_k, o "número de vezes" que λ_k é raíz de $p(\lambda)$.*

Definição 90 (multiplicidade geométrica) *Se λ é autovalor de T, sua **multiplicidade geométrica** é igual a $\dim(Nuc(T - \lambda I))$, a dimensão do auto-espaço associado.*

Teorema 17 (multiplicidade geométrica menor que algébrica) *A multiplicidade geométrica de um autovalor (dimensão do autoespaço) é menor ou igual a sua multiplicidade algébrica.*

Prova: Sejam λ_1 autovalor de $T : V \to V$ e μ_1 a dimensão do autoespaço H_1 associado a λ_1. Seja $\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de V tal que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{\mu_1}\}$ é base de H_1. Neste caso, temos que, utilizando notação de blocos, $[T]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 I & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ e assim

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} (\lambda_1 - \lambda)I & A_{12} \\ 0 & A_{22} - \lambda_1 I \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} (\lambda_1 - \lambda)I \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} A_{22} - \lambda_1 I \end{bmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)^{\mu_1} q(\lambda).$$

[0] A leitura desta seção é opcional.

Logo $(\lambda_1 - \lambda)^{\mu_1}$ é um fator de

$$p(\lambda) = a_m(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}.$$

Portanto $\mu_1 \leq m_1$. ∎

Corolário 14 (TL é diagonalizável) *Uma TL é diagonalizável se, e somente se, a multiplicidade geométrica (dimensão do autoespaço) de cada autovalor é igual a sua multiplicidade algébrica.*

Prova: Suponha T diagonalizável. Pelo Teorema 15 da página 159, T possui base de autovetores. Logo a soma das multiplicidades geométricas é n, a dimensão do espaço. Pelo Teorema 17, a multiplicidade geométrica é menor ou igual que a algébrica. Suponha por contradição que é estritamente menor. Neste caso, a soma das multiplicidades geométricas seria menor que n.

Suponha que a multiplicidade geométrica é igual a algébrica. Neste caso, a soma das dimensões dos autoespaços é igual a n. Pelo Teorema 15 da página 159, T é diagonalizável. ∎

7.6 Exercícios de Autovalores, Autovetores e Diagonalização

7.6.1 Exercícios de Fixação

Autovalores e Autovetores

Exercício 1. Suponha que $\mathbf{u}$ é autovetor associado ao autovalor 2 e $\mathbf{v}$ é autovetor associado ao autovalor 3.

(a) $\mathbf{y} = -\mathbf{u}$ é autovetor associado ao autovalor ___$(-2, 2)$;

(b) $\mathbf{z} = 2\mathbf{v}$ é autovetor associado ao autovalor ___$(3, 6)$.

(c) $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ ___(*é, não é*) autovetor associado ao autovalor 5;

Exercício 2. Considere o vetor $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. Determine se é Verdadeiro ou Falso:

(a) como $T(\mathbf{0}) = 0\mathbf{0}$, o número 0 é autovalor de T;

(b) como $T(\mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$, o vetor $\mathbf{0}$ é autovetor de T.

Exercício 3. Determine se é Verdadeiro ou Falso:

(a) toda TL possui um autovalor real;

(b) se uma TL possui núcleo diferente de $\mathbf{0}$ então possui um autovalor.

(c) se o espectro de uma TL é $\{2, 3, -1\}$ então é invertível.

Exercício 4. Se $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$, T possui no máximo _____ autovalores distintos.

Exercício 5. Se o único autovalor de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é 5 então:

(a) $\dim \mathrm{Nuc}(T - 3I)$ ___($>$ *ou* $= 0, 1, 2, 3$);

(b) $\dim \mathrm{Nuc}(T + 5I)$ ___($>$ *ou* $= 0, 1, 2, 3$);

(c) $\dim \mathrm{Nuc}(T - 5I)$ ___($>$ *ou* $= 0, 1, 2, 3$);

Exercício 6. Se a matriz quadrada B não possui inversa então 0 _____(*é, não é*) autovalor de B.

Exercício 7. Se $\dim \mathrm{Nuc}(T + 2I) = 1$ então é autovalor de T:

[0]Versão 28.jul.2008 19h

(a) 2? _____(*sim, não, talvez*); (b) -2? _____(*sim, não, talvez*).

Exercício 8. Considere em $\mathbb{R}^2$: R uma reflexão, P uma projeção e U uma rotação por ângulo θ $(0 < \theta < \pi)$. Determine quais possuem um autovalor igual a:

(a) 1: _____; (b) -1: _____; (c) 0: _____; (d) um complexo não-real:_____.

Exercício 9. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) é(são) autovalor(es) _____; (b) são autovetores _______________.

Exercício 10. Se $T : V \to V$ possui como polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(T - \lambda I) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 3),$$

(a) $\dim(V) =$ ___; (b) $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) =$ ___; (c) $\dim(\mathrm{Nuc}(T - 3I)) =$ ___.

Diagonalização

Exercício 11. Determine se Verdadeiro ou Falso. Se $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ possui:

(a) 6 autovalores distintos então ela é diagonalizável.

(b) 2 autovalores distintos então ela não é diagonalizável.

Exercício 12. Sabendo que todo autovetor de A é múltiplo de $(1, 1, 1)$, A ___(*é, não é, pode ser*) diagonalizável;

Exercício 13. Se $B = \begin{bmatrix} -1 & \pi & e \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ então

(a) seus autovalores são __________;

(b) B _______(*pode, não pode*) ser diagonalizada pois seus autovalores são __________ e portanto os autovetores _______(*formam, não formam*) uma base.

7.6.2 Problemas

Autovalores e Autovetores

Problema 1. Considere a TL $T(x, y) = (-3x + 4y,\ 2y - x)$. É autovetor de T:

(a) $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$? (b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$? (c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$? (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

Problema 2. Em cada item determine se $\mathbf{v}$ é autovetor de A. Em caso positivo, determine o autovalor:

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$; (b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

Problema 3. Sabe-se que $\lambda = 10$ é autovalor para $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$. Determine uma base para o autoespaço associado. Encontre três autovetores distintos.

Problema 4. Calcule os autovalores e autoespaços associados de:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Problema 5. Calcule os autovalores e autoespaços associados de:

(a) $T(x,y) = (3x - 2y,\ 3y)$; (b) $T(x,y,z) = (-x - 2y + 2z,\ y,\ z)$.

Problema 6. Determine h na matriz $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de modo que o autoespaço associado ao autovalor 5 seja bidimensional.

Problema 7. Suponha que λ é autovalor de A invertível e μ autovalor de B com mesmo autovetor $\mathbf{v}$. Determine autovalor associado ao autovetor $\mathbf{v}$ de:

(a) A^2; (b) A^{-1}; (c) AB; (d) $C = aA + bB$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 8. Em cada item dê um exemplo de TL que tenha:

(a) $(1, -2)$ e $(0, 1)$ como autovetores associados aos autovalores $-1/2$ e 2 respectivamente;

(b) $(1, -1, 1)$ e $(1, 0, 1)$ como autovetores associados ao autovalor 3 e $(0, 1, 1) \in \mathrm{Nuc}(T)$.

Problema 9. Explique em cada caso porque não existe uma TL:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja uma reta e tenha dois autovalores reais distintos não-nulos;

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que seja sobrejetiva com um autovalor igual a 0;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenha $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ e $(5, 7, 9)$ (note que o terceiro é soma dos dois primeiros) como autovetores associados aos autovalores 1, 2 e 3;

Problema 10. Para cada T definida determine os autovalores e a dimensão de $\mathrm{Nuc}(T)$, $\mathrm{Nuc}(T + I)$, $\mathrm{Nuc}(T - I)$:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma projeção ortogonal num plano passando pela origem;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma reflexão em torno de um plano passando pela origem;

Problema 11. Sabendo que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ possui $x - y + z = 0$ como autoespaço associado ao autovalor 2,

(a) $T(1, 2, 1) =$ _____;

(b) $\dim(\mathrm{Nuc}(T))$ pode ser no máximo ___ (*0, 1, 2, 3*)

Problema 12. Sabendo que a matriz abaixo é uma rotação em torno de um eixo fixo, determine a direção do eixo de rotação. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Problema 13. Considere T um operador agindo no espaço das funções reais com duas derivadas, isto é, $T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Determine autofunções associadas ao autovalor $\lambda = -9$ se:

(a) $Tf = f'$; (b) $Tf = f''$;

Diagonalização

Problema 14. A matriz abaixo está fatorada na forma MDM^{-1}. **Sem fazer contas**, determine os autovalores da matriz e bases para cada um dos autoespaços.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Problema 15. Se possível, diagonalize a matriz:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 16. Considere o operador $P(x, y, z) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z)$. Determine base:

(a) β tal que $[P]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (b) γ tal que $[P]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Problema 17. Determine em cada caso se a TL pode ser diagonalizada:

(a) $A_{4\times4}$ tem três autovalores distintos. Um autoespaço é unidimensional e um dos outros é bidimensional.

(b) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tem polinômio característico $p(\lambda) = (\lambda - \pi)(\lambda - e)^2(\lambda - 1)^3$. Dois dos autoespaços de T são bidimensionais.

Problema 18. Seja $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ uma base de V e $A\mathbf{v}_k = k\mathbf{v}_k$, com $k = 1, \ldots, n$.

(a) Mostre que existe P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal;

(b) Determine esta matriz diagonal.

Problema 19. Sejam $P = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A = PDP^{-1}$. Calcule A^8 (sem passar por A^2).

Problema 20. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de A.

(b) Determine matrizes X e Y de modo que $A^{99} = XYX^{-1}$ (não efetue o produto).

Problema 21. Calcule o A^{10} para $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Problema 22. Calcule $\lim\limits_{k\to\infty} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}^k$.

Problema 23. Calcule $B = \sqrt{A}$ (raiz quadrada da matriz A), isto é, determine B tal que $B^2 = A$ para $A = \begin{bmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{bmatrix}$.

Problema 24. Num país politicamente instável 30% dos defensores da república passam a apoiar a monarquia a cada ano e 20% dos defensores da monarquia passa a apoiar a república a cada ano. Portanto, denotando por r_k e m_k o número de republicanos e monarquistas, respectivamente, a cada ano k, temos que $r_{k+1} = 70\% r_k + 20\% m_k$ e $m_{k+1} = 30\% r_k + 80\% m_k$. Utilizando matrizes,

$$\begin{bmatrix} r_{k+1} \\ m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_k \\ m_k \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule a decomposição espectral de $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$.

(b) Sabendo que hoje metade da população apoia a república, em 10 anos qual será o percentual que apoia a república?

(c) A longo prazo qual será o percental de republicanos e monarquistas? Note que isto independe do percentual inicial.

7.6.3 Desafios

Autovalores e Autovetores

Desafio 1. Considere $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ com $a + b = c + d$. Prove que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tem somente autovalores inteiros.

Desafio 2. Encontre o espectro de $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$

Desafio 3. Seja $T : V \to V$ com $\dim(V) = n$. Prove que $\det(T - \lambda I)$ é um polinômio de grau n.

Desafio 4. Considere uma matriz quadrada A. Prove que:

(a) a soma dos autovalores de A é igual ao traço de A (a soma dos elementos da diagonal);

(b) o produto dos autovalores de A é igual ao determinante de A.

Desafio 5.

Definição 91 (subespaço invariante) *Considere $T : V \to V$. Dizemos que um subespaço $W \subset V$ é **invariante** por T (denotado $T(W) \subset W$) se $\mathbf{w} \in W$ implica $T\mathbf{w} \in W$.*

(a) Prove que se W é invariante por T com $\dim(W) = 1$ então todo $\mathbf{w} \in W$ não-nulo é autovetor de T;

(b) Dê um exemplo de W invariante por T com $\dim(W) = 2$ tal que todo $\mathbf{w} \in W$ não-nulo **não** é autovetor de T;

(c) Prove que se W é invariante por T então existe uma base β de V tal que $[T]_\beta = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ com $\dim(A) = \dim(W)$;

(d) Suponha que $V = W + Z$ com $W \cap Z = \mathbf{0}$ (escrevemos $V = W \oplus Z$, V é **soma direta** de W e Z, conforme Definição 51 da página 75) invariantes por T. Mostre que existe uma base β de V tal que, utilizando notação de blocos, $[T]_\beta = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ com $\dim(A) = \dim(W)$, $\dim(C) = \dim(Z)$;

(e) Se T possui inversa todo subespaço invariante por T é invariante por T^{-1}.

Desafio 6. (Shilov p.117 #33) Mesmo que T não possua autovetores, T^2 pode possuir autovetores (por exemplo uma rotação de $90°$). Mostre que se T^2 tem autovetor com autovalor positivo então T possui autovetor.

Desafio 7. (Shilov p.116 #28) Prove que se A e B comutam (isto é, se $AB = BA$) então todo autoespaço de A é um subespaço invariante (veja Definição 91 da página 176) de B.

Desafio 8. Mostre que duas matrizes simétricas $n \times n$ A e B comutam ($AB = BA$) se, e somente se, eles possuem um conjunto de n autovetores ortogonais simultâneos.

Desafio 9. Prove que se λ é autovalor de AB então também é autovalor de BA.

Desafio 10. Seja $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ com $\dim \operatorname{Nuc}(T - \lambda I) = 4$. Mostre que existe uma base β de $\mathbb{R}^7$ tal que $[T]_\beta = \begin{bmatrix} I_{4\times4} & B_{4\times3} \\ 0 & C_{3\times3} \end{bmatrix}$.

Desafio 11. Considere T linear definido no espaço das matrizes 2×2 por $TA = A^T$. Determine os autovalores e autoespaços de T.

Desafio 12. Seja V o espaço vetorial das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Defina $(Tf)(x) = \int_0^x f(s)\, ds$. Prove que T não possui autovalores. Se tivesse, $Tf = \lambda f$, derivando os dois lados, $\lambda f' = f$ e portante f seria uma exponencial mas como $(Tf)(0) = \int_0^0 f(s)\,ds = 0$, $f \equiv 0$.

Diagonalização

Desafio 13. A famosa seqüência de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., é dada pela lei de formação: um termo é a soma dos dois anteriores. Em termos matriciais, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} x_{k+2} \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule a decomposição espectral de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Explique como calcular o qüinquagésimo segundo termo da série usando uma calculadora científica de 12 dígitos não programável.

(c) determine fórmula geral aproximada para x_{k+1}.

Desafio 14. Suponha N nilpotente (veja Definição 76 da página 118) isto é, $N^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Prove que:

(a) o único autovalor de N é zero;

(b) se $N \neq 0$, então N não é diagonalizável.

Desafio 15. Suponha A diagonalizável. Prove que:

(a) A^T é diagonalizável;

(a) se os autovalores são iguais a 1 em módulo então $A^{-1} = A$;

(b) se possui um único autovalor λ então $A = \lambda I$.

Desafio 16. Seja $T : V \to V$ com $\dim(V) = 3$.

(a) Suponha que o único autovalor de T é λ_0. Prove que T é diagonalizável se, e somente se, $T - \lambda_0 I = 0$ (isto é, $T = \lambda_0 I$;

(b) Suponha que T possua dois autovalores distintos λ_0 e λ_1. Prove que T é diagonalizável se, e somente se, $(T - \lambda_0 I)(T - \lambda_1 I) = 0$.

Desafio 17. Se A e B são diagonalizáveis e $AB = BA$ então os autovetores de A são iguais aos autovetores de B.

Desafio 18. Prove que se A é 2×2 e $A = A^T$ então A (teorema espectral para matrizes 2×2):

(a) possui todos autovalores reais;

(b) é diagonalizável.

Desafio 19. (Shilov p.117 #38) Considere T diagonalizável com n autovalores distintos. Mostre que existem 2^n subespaços invariantes (veja Definição 91 da página 176) por T.

Desafio 20. Suponha que T é diagonalizável e λ_1 o maior autovalor em módulo. Dado $\mathbf{v}_0$ qualquer defina $\mathbf{v}_n = T^n \mathbf{v}_0$ e $\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n / \|\mathbf{v}_n\|$ ($\mathbf{w}_n$ possui módulo 1). Prove que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{w}_n = \mathbf{u}_1$$

onde $\mathbf{u}_1$ é autovetor associado a λ_1. Este é o chamado **método da potência** para determinar autovetores.

Desafio 21. Dada A definimos $e^A = I + A + A^2/2! + \cdots A^n/n! + \cdots$.

(a) prove que se A é diagonalizável então $e^A = Pe^D P^{-1}$ onde e^D é diagonal com exponencial de cada elemento de D na diagonal;

(b) calcule e^A para $A = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; (Leon)

(c) Se N é nilpontente então e^N é uma série finita que pode ser calculada. Calcule e^N para $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) prove que se λ é autovalor de A então e^λ é autovalor de e^A;

(e) prove que e^A é invertível se A é diagonalizável;

(f) prove que se A é simétrica ($A = A^T$) então e^A é simétrica e positivo definida.

Desafio 22.

Definição 92 (polinômio minimal) *Dizemos que um polinômio p mônico (termo de maior grau é 1) é **minimal** para T se $p(T) = 0$ e é de menor grau dentre aqueles com esta propriedade.*

Prove que T é diagonalizável se, e somente se, seu polinômio minimal é da forma $p(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - \lambda_i)$ com λ_i distintos.

7.6.4 Extras

Autovalores e Autovetores

Extra 1. Calcule os autovalores e autoespaços associados de:

(a) $T(x, y) = (x - y,\ 2x + 3y)$; (b) $T(x, y, z) = (x - 2y,\ -y,\ -y)$;

Extra 2. Prove que o polinômio característico de A 2×2 é $\lambda^2 -$ traço$(A)\lambda + \det(A)$ onde traço(A) é igual a soma dos elementos da diagonal.

Extra 3.

(a) prove que $(A - \lambda I)^T = A^T - \lambda I$;

(b) prove que os autovalores de A são iguais aos de A^T.

Extra 4. Calcule os autovalores e autoespaços associados de:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

Extra 5. Sabendo que o polinômio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^8 - 2\lambda^6 + 3\lambda^2 + 4$, determine $\det(A)$.

Extra 6. Em cada item dê um exemplo de TL:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tenha 1 e -1 como autovalores;

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tenha 2 e 3 como autovalores associados respectivamente aos autoespaços $x = y$ e $x = -y$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenha $x - y + z = 0$ como autoespaço asociado ao autovalor 2 e que tenha também -1 como autovalor;

Extra 7. Explique em cada caso abaixo porque não existe uma TL:

(a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cujo núcleo seja o plano gerado por $(0, 1, -1, 1)$ e $(1, 0, 0, 1)$ e que tenha $(1, -1, 1, 0)$ como autovetor associado ao autovalor -3;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenha $x - y + z = 0$ como autoespaço associado ao autovalor -1 e tal que $T(1, 0, 1) = (0, 1, 0)$;

Extra 8. Calcule os autovalores e autoespaços associados de:

(a) $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma projeção ortogonal na reta gerada por $(1, 2, -1, 1)$;

(b) $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma rotação por ângulo de $90°$ em torno do eixo gerado por $(1, 1, -1)$.

Extra 9. Para cada T definida abaixo determine os autovalores e a dimensão de $\mathrm{Nuc}(T)$, $\mathrm{Nuc}(T+I)$, $\mathrm{Nuc}(T-I)$:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma projeção ortogonal numa reta passando pela origem;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma rotação de $180°$.

Extra 10. Suponha que A é semelhante a B (veja Definição 75 da página 113).

(a) prove que $\det(A) = \det(B)$;

(b) prove que A^3 e B^3 também são semelhantes.

(c) prove que A e B possuem os mesmos autovalores;

(d) determine a relação entre os autovetores $\mathbf{v}$ de A e $\mathbf{w}$ de B (que são distintos de forma geral).

(e) traço(A) = traço(B).

Extra 11. Prove que se A é diagonal (superior ou inferior) os autovalores são elementos da diagonal.

Extra 12. Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam autovetores. Defina $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ com $w \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Suponha ainda que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ estão associados:

(a) ao mesmo autovalor λ. Prove que $\mathbf{w}$ é autovetor associado a λ;

(b) a autovalores distintos. Prove $\mathbf{w}$ não é autovetor.

Extra 13. Considere T $T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, definida por $Tf = f''$. Determine o autoespaço associado ao:

(a) 1, isto é, as funções que satisfazem $f'' = f$.

(b) -1, isto é, as funções que satisfazem $f'' = -f$.

Extra 14. Considere $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definido por $T(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$. Determine os autovalores e autoespaços de T.

Extra 15. Se $A = A^5$ é uma matriz quadrada, o que você pode dizer sobre os autovalores reais de A?

Extra 16. (a) Seja $A_{n\times n}$ tal que as somas das entradas de cada linha têm todas o mesmo valor s. Conclua que s é autovalor.

Dica: escreva " $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s, \quad i = 1, 2, \ldots, n$" **em forma matricial** e então encontre um autovetor.

(b) Determine dois autovalores de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **por inspeção** (sem fazer contas).

(c) Suponha que a soma de todos elementos de cada coluna é igual a k. Prove que k é autovalor de A.

Diagonalização

Extra 17. Determine matrizes X e Y de modo que $A = XYX^{-1}$ possua autovalores 2 e -3 com autovetores associados, respectivamente, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Extra 18. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ dada por $(T(\mathbf{p}))(t) = (t-1)\mathbf{p}'(t)$. Determine:

(a) a matriz de T com relação à base canônica dos polinômios;

(b) a decomposição espectral desta matriz;

(c) os autovalores de T e respectivos autoespaços;

(d) $T^{2007}(4 - 2t)$.

Extra 19. Diagonalizabilidade e invertibilidade são conceitos distintos. Para confirmar esta afirmação, construa uma matriz 2×2 que é:

(a) diagonalizável mas não é invertível; (b) invertível mas não é diagonalizável.

Extra 20. Diagonalize, **sem fazer contas**, $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$.

Extra 21. Determine valores de a para os quais a transformação linear T é diagonalizável:
(a) $T(x, y, z) = (3x + az,\ 2y + az,\ 2z)$ (b) $T(x, y) = (ax,\ 3x + 2y)$
(c) $T(x, y) = (-ax,\ x + (a + 1)y)$ (d) $T(x, y, z) = (2x + ay,\ 2y,\ z)$

Extra 22. Determine os valores de a para que $\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ seja diagonalizável.

Extra 23. Se possível, diagonalize a matriz:
(a) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Extra 24. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $T\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$, $T\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2$ e $T\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_3$. Se $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 1)$, determine $T^{100}(x, y, z)$ como produto de três matrizes.

Extra 25. Calcule:
(a) $\begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}^{11}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{100}$; (c) $\lim\limits_{k\to\infty} \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}^{k}$.

Extra 26. Em cada item dê um exemplo de TL satisfazendo as condições dadas.
(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tenha 2 como único autovalor e seja diagonalizável;
(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenha $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$ como autovetores respectivamente associados aos autovalores -1 e 3 e seja diagonalizável.

Extra 27. Prove que se P diagonaliza A então $Q = \lambda P$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ não-nulo também diagonaliza A.

Extra 28. Calcule $B = \sqrt{A}$ (raiz quadrada da matriz A), isto é, determine B tal que $B^2 = A$ para $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Extra 29. Mostre que se A e B são diagonalizadas pela mesma matriz P então $AB = BA$.

Extra 30. (Shilov p.117 #31) Prove que se todo vetor (não-nulo) de V é autovetor de T então $T = \lambda I$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Capítulo 8

Produto Interno

Neste capítulo, introduzimos o conceito de produto interno em um espaço vetorial. O produto interno nos permite definir o comprimento de um vetor e o ângulo entre dois vetores (em particular, definir a ortogonalidade entre dois vetores).

Começaremos discutindo os conceitos de comprimento e ângulo em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, com os quais o leitor já está familiarizado. Veremos como estas quantidades podem ser convenientemente expressas em termos de uma função de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, à qual denominaremos produto interno (ou produto escalar). Discutiremos algumas propriedades desta função e, a exemplo do que fizemos outras vezes neste curso, estenderemos a noção de produto interno para outros espaços através destas propriedades.

Com o produto interno introduziremos o conceito de ortogonalidade para vetores em espaços vetoriais gerais. Isto permite definir projeções ortogonais e reflexões.

São aplicações importantes:

- problema de mínimos quadrados, quando damos sentido a resolução de sistemas lineares sobredeterminados (mais equações do que variáveis);
- aproximação de funções por polinômios ou funções simples (senos e cossenos por exemplo, no caso da série de Fourier).

8.1 Produto Interno em $\mathbb{R}^n$

Em $\mathbb{R}^2$, define-se o comprimento (também chamado de norma) de um vetor $\mathbf{v} = (x, y)$ por $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e, em $\mathbb{R}^3$, o de $\mathbf{v} = (x, y, z)$ por $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Conforme indicado na Figura 8.1, o comprimento em $\mathbb{R}^2$ decorre de uma aplicação do Teorema de Pitágoras e em $\mathbb{R}^3$ de duas aplicações pois $\sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Definindo-se o produto interno (canônico) de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ por $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{2 \text{ ou } 3} u_i v_i$, temos $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.

Definição 93 (produto interno canônico e norma no $\mathbb{R}^n$) *Dados* $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, *define-se o **produto interno canônico** por* $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$. *A **norma** (ou comprimento) é definida por* $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$.

[0]Versão 29.jul.2008 15h

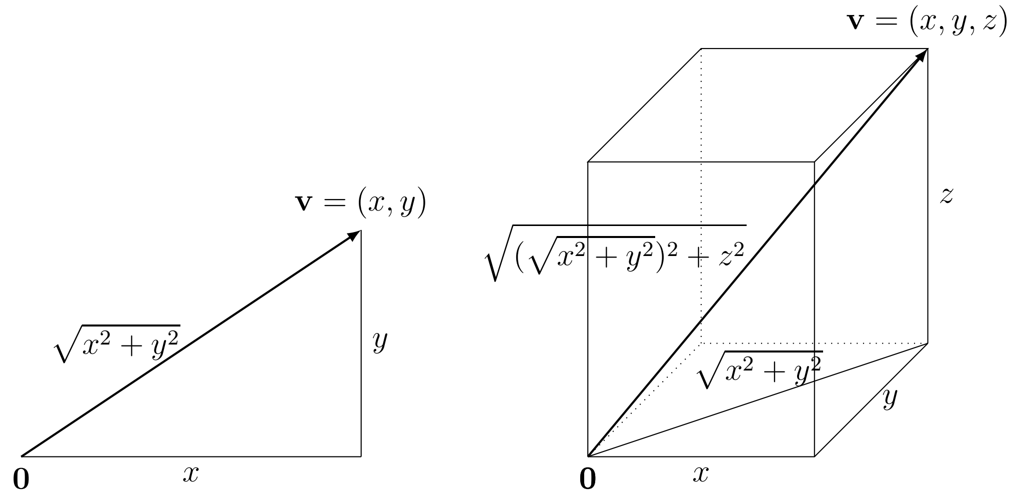


Figura 8.1: Comprimento em $\mathbb{R}^{2 \text{ ou } 3}$

Observação 61 (produto interno canônico e matrizes) *Da definição de produto de matrizes e de matriz transposta, dados* $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{w}.$$

Outras notações usuais para o produto interno (também denominado produto escalar) são $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$, esta última motivada pelo entendimento de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como vetores-coluna, isto é, matrizes $n \times 1$.

Exemplo 245 *Considere* $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 0), \mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4, -5)$. *Calcule* $\|\mathbf{v}\|$ *e* $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
$\|\mathbf{v}\|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 0^2 = 1 + 3 + 9 + 16 = 29$. *Logo,* $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{29}$. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (1)(-1) + (2)(2) + (3)(-3) + (4)(4) + (0)(-5) = -1 + 4 - 9 + 16 + 0 = 10$.

Lema 47 (propriedades do produto interno) *Considere* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. *O produto interno definido acima satisfaz as seguintes propriedades:*
(a) simetria: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$;
(b) bilinearidade: $\langle \alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$;
(c) positividade: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ *para todo* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Prova: Deixamos para o leitor. ■

O lema abaixo caracteriza a ortogonalidade de vetores no plano e no espaço em função do produto interno.

Lema 48 (ortogonalidade no plano e espaço) *Os vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *são ortogonais se, e somente se,* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Prova: Vamos utilizar um fato da geometria euclidiana que um paralelogramo é um retângulo se, e somente se, o comprimento de suas diagonais é igual.

Dado o paralelogramo de lados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, o comprimento de suas diagonais é $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Temos as seguintes equivalências:

– $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais;
– $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forma um retângulo;
– comprimento das diagonais é igual;
– $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$;
– $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$;
– $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle$;
– usando propriedades do produto interno, $\|\mathbf{u}\|^2+2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2-2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\|\mathbf{v}\|^2$;
– simplificando os dois lados da expressão, $2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = -2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$;
– $4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$;
– $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$; ■

Exemplo 246 *Verifique que são ortogonais entre si em $\mathbb{R}^6$:* $(1,0,1,0,1,0)$, $(0,1,0,1,0,1)$, $(-1,0,1,2,0,-2)$.

De fato, $\langle(1,0,1,0,1,0),(0,1,0,1,0,1)\rangle = 1(0)+0(1)+1(0)+0(1)+1(0)+0(1) = 0$, $\langle(1,0,1,0,1,0),(-1,0,1,2,0,-2)\rangle = 1(-1)+0(0)+1(1)+0(2)+1(0)+0(-2) = -1+1 = 0$, $\langle(-1,0,1,2,0,-2),(0,1,0,1,0,1)\rangle = -1(0)+0(1)+1(0)+2(1)+0(0)+-2(1) = 2-2 = 0$.

8.2 Produto Interno em Espaços Vetoriais

Inspirados por $\mathbb{R}^n$, definimos produto interno em espaço vetorial qualquer.

Definição 94 (espaço com produto interno) *Denomina-se* ***espaço com produto interno*** *a um espaço vetorial V munido de uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ (denominada* ***produto interno*** *ou* ***produto escalar****) tal que, para todo $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$, satisfaz às seguintes propriedades:*

(a) simetria: $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle$;

(b) bilinearidade: $\langle \alpha\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \alpha\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$ para todo $\forall\alpha\in\mathbb{R}$;

(c) positividade: $\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle > 0$ para todo $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$.

Exemplo 247 *Como já vimos, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dada por $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^T\mathbf{v}$ é produto interno (canônico) de $\mathbb{R}^n$. Mas podem-se definir outros produtos internos. Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$:*

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle : & \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (\mathbf{u},\mathbf{v}) & \mapsto & \mathbf{u}^T\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\mathbf{v}. \end{array}$$

De fato, $\langle(u_1,u_2),(v_1,v_2)\rangle = 7u_1v_1+2u_1v_2+2u_2v_1+7u_2v_2$*, de forma que é fácil verificar que as três propriedades em questão são satisfeitas. Em particular, a para a terceira, temos*

$$\left.\begin{array}{l} \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = 7u_1^2+4u_1u_2+7u_2^2 \\ 2ab \geq -a^2-b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle \geq 5u_1^2+5u_2^2 > 0 \;\; \forall\, \mathbf{u}\neq\mathbf{0}.$$

(Note que $2ab\geq -a^2-b^2$ segue de $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2 \geq 0$.)

Exemplo 248 *Seja $V = \mathcal{C}([-1,1];\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas de $[-1,1]$ em $\mathbb{R}$. Defina*

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle : & V\times V & \to & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt. \end{array}$$

Verifique que é um produto interno.

A simetria decorre de $\int fg = \int gf$. A bilinearidade decorre da linearidade da integral: $\int(\alpha f + g)h = \alpha \int fh + \int gh$. A positividade é mais delicada. Se f não é nula então, por continuidade, ela é não nula num certo intervalo não-degenerado. Com isto, $\int f^2 > 0$.

Exemplo 249 *Considere $\mathcal{P}_2$ o espaço dos polinômios de grau até dois. Defina*

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle_1 : & \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (p,q) & \mapsto & p(1)q(1) + p(2)q(2) \end{array}.$$

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle_2 : & \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (p,q) & \mapsto & p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3) \end{array}.$$

Verifique que $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ é um produto interno, mas que $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ não é.

É fácil checar que ambas funções serão simétricas e bilineares. A diferença é na positividade. Note que $\langle p,p\rangle_1 = p(1)^2 + p(2)^2 = 0$ se, e somente se, $p(1) = p(2) = 0$. Como o polinômio é de grau máximo 2 isto não garante que $p = 0$ (por exemplo $p(t) = (t-1)(t-2)$). Se o grau máximo fosse 1 (retas), isto garantiria que $p = 0$. Logo, $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ não satisfaz a positividade e não é produto interno.

Note que $\langle p,p\rangle_2 = p(1)^2 + p(2)^2 + p(3)^2 = 0$ se, e somente se, $p(1) = p(2) = p(3) = 0$. Nste caso, $p(t) = at^2 + bt + c$ e $p(1) = p(2) = p(3) = 0$ implica que $a + b + c = 0 = 4a + 2b + t = 9a + 3b + c = 0$. Resolvendo este sistema (a matriz do sistema é conhecida como matriz de Vandermonde) obtemos que a única solução é a trivial. Logo $a = b = c = 0$, ou seja, $p = 0$. . Logo, $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ satisfaz a positividade e é produto interno.

Definição 95 (norma e distância) *Em um espaço vetorial V com um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, podemos definir uma função, denominada* ***norma*** *(associada àquele produto interno):*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{v} & \mapsto & \sqrt{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle} \end{array}.$$

A norma induz a noção de ***distância****:*

$$\begin{array}{rccc} d(\cdot,\cdot) : & V \times V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (\mathbf{v},\mathbf{w}) & \mapsto & \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \end{array}.$$

Assim, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle}$ e $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

A norma nos dá uma noção de comprimento num espaço vetorial qualquer. Note que as seguintes propriedades, a serem esperadas de uma função comprimento e distância, valem:

- $\|\mathbf{0}\| = 0$, (vetor nulo tem norma zero)
- $\|\mathbf{v}\| > 0$ para todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, (todo vetor não-nulo tem norma positiva);
- $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, (vetor multiplicado por escalar tem norma modificada por módulo do escalar).
- $d(\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0$;
- $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \geq 0$.
- $d(\mathbf{v},\mathbf{0}) = \|\mathbf{v}\|$.

Exemplo 250 *Considere o produto interno do Exemplo 248 da página 183 e as funções* $f(t) = t^2, g(t) = 1 - t$. *Determine* $\|f\|, \|g\|$ *e* $\langle f, g\rangle$.

Como $\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} f^2(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (t^2)^2\,dt = \int_{-1}^{1} (t^4)\,dt = t^5/5|_{-1}^{1} = 1/5 - (-1/5) = 2/5$. *Logo,* $\|f\| = \sqrt{2/5}$.

Como $\|g\|^2 = \int_{-1}^{1} g^2(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (1-t)^2\,dt = \int_{-1}^{1} (1-2t+t^2)\,dt = (t - t^2 + t^3/3)|_{-1}^{1} = 2$. *Logo,* $\|g\| = \sqrt{2}$.

Calculando $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} t^2(1-t)\,dt = \int_{-1}^{1} (t^2 - t^3)\,dt = (t^3/3 - t^4/4)|_{-1}^{1} = 2/3$.

8.3 Ortogonalidade

8.3.1 Definições

A próxima definição é motivada pelo Lema 48.

Definição 96 (vetores ortogonais) *Dizemos que dois vetores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são ortogonais se* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$. *É utilizada a notação* $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Observação 62 *Note que, de acordo com a nossa definição, o vetor nulo é ortogonal a qualquer outro vetor, isto é,* $\mathbf{0} \perp \mathbf{v}$ *para todo* $\mathbf{v}$.

Definição 97 (vetor unitário) *Diz-se que um vetor* $\widehat{\mathbf{v}}$ *é unitário se tem norma igual a um,* $\|\widehat{\mathbf{v}}\| = 1$. *(É comum se utilizar o acento circunflexo para indicar que um vetor é unitário.)*

Definição 98 (normalização) *Dado um vetor não nulo* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, *defina* $\widehat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$. *É fácil verificar que* $\widehat{\mathbf{v}}$ *é unitário e tem a mesma direção e o mesmo sentido de* $\mathbf{v}$. *Mais ainda, é o único vetor com estas propriedades. Ao processo de passar de* $\mathbf{v}$ *para* $\widehat{\mathbf{v}}$ *denominamos* ***normalização***.

Definição 99 (conjunto ortogonal) *Diz-se que o conjunto* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é ortogonal se os vetores são dois a dois ortogonais,* $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0\ \ \forall i \neq j$ *ou se é um conjunto unitário.*

Definição 100 (conjunto ortonormal) *Diz-se que o conjunto* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é ortonormal se, além de ser ortogonal, todos os seus vetores são unitários, isto é, se*

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \text{onde} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}.$$

Exemplo 251 *Normalize o vetor* $\mathbf{v} = (1, -2, 0, -2, 0) \in \mathbb{R}^5$.

Calculando $\|\mathbf{v}\|^2 = (1)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (-2)^2 + (0)^2 = 1 + 4 + 1 = 9$. *Logo,* $\|\mathbf{v}\| = 3$. *Assim* $\widehat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/3 = (1/3, -2/3, 0, -2/3, 0)$.

Exemplo 252 *Considere o produto interno do Exemplo 248 da página 183 e as funções $f(t) = t^2, g(t) = 3t$. Mostre que f e g são ortogonais. Determine $\widehat{\mathbf{g}}$ um múltiplo de g tal que $\|\widehat{\mathbf{g}}\| = 1$.*

Calculando, $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt = \int_{-1}^{1} t^2 3t\,dt = \int_{-1}^{1} 3t^3\,dt = 3t^4/4|_{-1}^{1} = 3(1)^4/4 - 3(-1)^4/4 = 3 - 3 = 0.$

Como, $\|f\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (3t)^2\,dt = \int_{-1}^{1} 9t^2\,dt = 3t^3|_{-1}^{1} = 3(1)^3 - 3(-1)^3 = 3 + 3 = 6$. *Portanto,* $\|g\| = \sqrt{6}$. *Logo tome* $\widehat{\mathbf{g}} = g/\sqrt{6} = 3t/\sqrt{6}$.

Teorema 18 (conjunto ortogonal é LI) *Um conjunto ortogonal de vetores não-nulos é linearmente independente.*

Prova: Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ ortogonal. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad &\Rightarrow \quad \left\langle \mathbf{v}_j, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i \right\rangle = \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{0}\rangle \\
&\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i\rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2 = 0 \quad \forall j \\
&\Rightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j \quad (\text{já que } \mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}.)
\end{aligned}$$

■

Corolário 15 *Um conjunto ortonormal de vetores é sempre linearmente independente.*

Bases ortogonais (e ortonormais, em particular) são convenientes porque é *fácil* se determinar as coordenadas nesta base de um vetor dado, sem a necessidade de se resolver um sistema linear. De fato, seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base ortogonal de V e seja $\mathbf{u} \in V$ dado. Sabemos que existem coeficientes $\alpha_i's$ unicamente determinados tais que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{u}$. Fazendo-se o produto interno com $\mathbf{v}_j$, obtém-se

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = \alpha_j = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j\rangle \quad \forall j$$

e portanto

$$\alpha_j = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j\rangle}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \quad \forall j.$$

Definição 101 (coeficientes de Fourier) *Seja $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base ortogonal de V e seja $\mathbf{u} \in V$ dado. Chamamos os $\alpha_j = \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j\rangle}{\|\mathbf{v}_j\|^2}$ os* ***coeficientes de Fourier*** *de $\mathbf{u}$ com relação à base ortogonal β. Desta forma, $[\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$.*

Observação 63 *Em se tratando de uma base ortonormal,* $\{\widehat{\mathbf{v}}_1, \widehat{\mathbf{v}}_2, \ldots, \widehat{\mathbf{v}}_n\}$*, as contas se simplificam um pouco mais, pois* $\|\widehat{\mathbf{v}}_j\|^2 = 1$ *e* $\alpha_j = \langle \mathbf{u}, \widehat{\mathbf{v}}_j\rangle$ *para todo* j*:*

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \widehat{\mathbf{v}}_j\rangle\, \widehat{\mathbf{v}}_j.$$

Definição 102 (complemento ortogonal) *Seja* V *espaço vetorial com produto interno e* H *subespaço de* V*. O* ***complemento ortogonal*** *de* H *é o conjunto dos vetores de* V *ortogonais a todos os vetores de* H*, denotado por* $H^\perp$ *(lê-se* H *perp), definido por*

$$H^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = 0 \ \text{ para todo } \mathbf{u} \in H\}.$$

Exemplo 253 (exemplos no plano e espaço) *Em* $\mathbb{R}^2$*, se* H *é o eixo-*x*,* $H^\perp$ *é o eixo-*y*.*

Em $\mathbb{R}^2$*, se* H *é o eixo-*y*,* $H^\perp$ *é o eixo-*x*.*

Em $\mathbb{R}^2$*, se* H *é a reta* $x = y$*,* $H^\perp$ *é a reta* $y = -x$*.*

Em $\mathbb{R}^3$*, se* H *é o eixo-*x*,* $H^\perp$ *é o plano* yz *(ou* $x = 0$*).*

Em $\mathbb{R}^3$*, se* H *é o plano* yz*,* $H^\perp$ *é o eixo-*x*.*

Exemplo 254 *Num espaço vetorial* V *qualquer,* $\mathbf{0}^\perp = V$ *pois para todo* $\mathbf{v} \in V$*,* $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v}\rangle = 0$*.*

Por outro lado, $V^\perp = \mathbf{0}$ *pois o único* $\mathbf{w} \in V$ *tal que* $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = 0$ *para todo* $\mathbf{v}$ *é o* $\mathbf{0}$*. Isto é verdade pois pela igualdade* $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle = \|\mathbf{w}\|^2 = 0$ *implica que* $\mathbf{w} = 0$*.*

Lema 49 (propriedades do complemento ortogonal) *Seja* V *um espaço vetorial* n*-dimensional com produto interno. Considere* $H \subset V$ *um subespaço vetorial com base* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$*. Então:*

(a) $H^\perp$ *é subespaço vetorial de* V*;*

(b) $H^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i\rangle = 0,\ i = 1, 2, \ldots, p\}$*;*

(c) $\dim(H^\perp) + \dim(H) = \dim(V)$*.*

Prova: (a) Como $\mathbf{0}$ é perpendicular a todo vetor, $\mathbf{0} \in H^\perp$. Suponha que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^\perp$. Pela linearidade do produto interno, $\langle \lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$. Como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^\perp$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$ para todo $\mathbf{w} \in H$. Logo, $\langle \lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$ para todo $\mathbf{w} \in H$, ou seja, $\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H^\perp$

(b) Seja $W = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i\rangle = 0,\ i = 1, 2, \ldots, p\}$. Como $\mathbf{u}_i \in H$, é claro que $H^\perp \subset W$. Vamos mostrar a inclusão contrária, isto é, que $W \subset H^\perp$. Seja $\mathbf{w} \in W$ e $\mathbf{v} \in H$. Como os $\mathbf{u}_i's$ geram H, $\mathbf{v} = \sum_i a_i\mathbf{u}_i$. Pela linearidade do produto interno, $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle =$

$$\left\langle \mathbf{w}, \sum_i a_i\mathbf{u}_i \right\rangle = \sum_i a_i \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_i\rangle = 0 \text{ pois } \mathbf{w} \in W \text{ implica que } \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_i\rangle = 0.$$

(c) Considere $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base de V. Temos que $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{v}_i \in H^\perp$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^{n} x_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_k\rangle = 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, p$ pelo item (b). Estas p equações lineares são em n variáveis $(x_1, \ldots, x_n)$. Como os vetores são LIs, as equações são independentes. Desta forma o espaço solução W possui dimensão $n - p$. Pela construção, temos uma bijeção linear entre W e $H^\perp$, pois a cada solução $(x_1, \ldots, x_n)$ associamos o vetor

$\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i \in H^\perp$. Logo, $\dim(W) = n - p = \dim(H^\perp)$. Como $\dim(V) = n$ e $\dim(H) = p$, obtemos o resultado. ■

Lema 50 (base do complemento ortogonal) *Dado $H \subset \mathbb{R}^n$ subespaço gerado por $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ obtemos uma base para $H^\perp$ (com relação ao produto interno canônico) resolvendo o sistema homogêneo $A^T\mathbf{v} = \mathbf{0}$, onde $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$. Desta forma, $H^\perp = Nuc(A^T)$.*

Prova: Segue pois são equivalentes:
— $\mathbf{v} \in H^\perp$;
— $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^T\mathbf{v} = 0$, para $i = 1, \dots, m$ (pelo Lema 49 (b));
— $\begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_p \rightarrow \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$;
— $A^T\mathbf{v} = \mathbf{0}$, onde $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$. ■

Exemplo 255 *Encontre uma base para* $\left(\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right)^\perp$.

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$. *Vamos resolver o sistema*

$$A^T\mathbf{v} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando totalmente A^T obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (a última linha zera). Fazendo $z = s, w = t$, $x = s + 2t, y = -2s - 3t$. Logo, $(x, y, z, w) = s(1, -2, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1)$, ou seja uma base é $\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}$.

8.3.2 Projeções Ortogonais

Nesta seção vamos ver como podemos definir e calcular projeção ortogonal num subespaço vetorial. Uma ferramenta teórica importante é o Teorema de Pitágoras em sua versão abstrata.

Teorema 19 (de Pitágoras generalizado) *Seja H um subespaço vetorial de um espaço com produto interno. Se $\mathbf{v}_H \in H$ e $\mathbf{v}_{H^\perp} \in H^\perp$, então $\|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2$.*

Prova: Lembrando que $\langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle = \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H \rangle = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 &= \langle \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H \rangle + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
&= \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2
\end{aligned}$$

■

Observação 64 *Interprete este resultado com auxílio de um desenho para:*
(a) H uma reta (passando pela origem) no plano.
(b) H uma reta (passando pela origem) no espaço.
(c) H um plano (passando pela origem) no espaço.

Teorema 20 (decomposição ortogonal) *Dado $\mathbf{v} \in V$ um espaço vetorial com produto interno e H subespaço vetorial, existe uma única decomposição da forma $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}$ onde $\mathbf{v}_H \in H$ e $\mathbf{v}_{H^\perp} \in H^\perp$.*

Prova: Seja $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ base de H e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ base de $H^\perp$. Defina $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\} \cup \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_q\}$. Vamos mostrar que β é base de V. De fato:

(a) β é LI. Se $0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{q} b_i \mathbf{v}_i$, definindo $\mathbf{z}_H = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i \mathbf{u}_i$ e $\mathbf{z}_{H^\perp} = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i \mathbf{v}_i$, pelo Teorema 19 (Pitágoras), $0 = \|\mathbf{0}\|^2 = \|\mathbf{z}_H + \mathbf{z}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{z}_H\|^2 + \|\mathbf{z}_{H^\perp}\|^2$, o que implica $\|\mathbf{z}_H\| = 0$ e $\|\mathbf{z}_{H^\perp}\| = 0$. Logo, $\mathbf{z}_H = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i \mathbf{u}_i = 0$. Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ é base de H, $a_i = 0$ para $i = 1, \ldots, p$. De forma análoga, $b_i = 0$. Portanto, β é LI.

(b) β gera V. Pelo Lema 49 (c), $\dim(H^\perp) = \dim(V) - \dim(H)$. Logo $p + q = n$ e β é um conjunto LI com número de vetores igual a dimensão de V. Isto implica que β gera V e, portanto, é base.

Como é base, $\mathbf{v} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{q} b_i \mathbf{v}_i$ de forma única. Assim, definindo $\mathbf{v}_H = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i \mathbf{u}_i$ e $\mathbf{v}_{H^\perp} = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i \mathbf{v}_i$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}$ de forma única. ■

Este Teorema permite que se faça a seguinte definição.

Definição 103 (projeção ortogonal) *Dado H subespaço vetorial de um espaço vetorial V com produto interno definimos a* ***projeção ortogonal*** *$P_H : V \to H$ da seguinte forma: Dado $\mathbf{v} \in V$, pelo Teorema anterior, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}$ de forma única. Definimos $P_H(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_H$.*

Lema 51 (propriedades da projeção ortogonal) *A projeção ortogonal P_H no subespaço H possui as seguintes propriedades:*

(a) P_H é linear;

(b) $P_H + P_{H^\perp} = I$.

Prova:

(a) Se $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}$ com $\mathbf{v}_H \in H$ e $\mathbf{v}_{H^\perp} \in H^\perp$ e $\mathbf{w} = \mathbf{w}_H + \mathbf{w}_{H^\perp}$ com $\mathbf{w}_H \in H$ e $\mathbf{w}_{H^\perp} \in H^\perp$, então $\alpha\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha\mathbf{v}_H + \mathbf{w}_H) + (\alpha\mathbf{v}_{H^\perp} + \mathbf{w}_{H^\perp})$ com $\alpha\mathbf{v}_H + \mathbf{w}_H \in H$ e $\alpha\mathbf{v}_{H^\perp} + \mathbf{w}_{H^\perp} \in H^\perp$. Assim, $P_H(\alpha\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha P_H\mathbf{v} + P_H\mathbf{w}$.

(b) Se $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}$ com $\mathbf{v}_H \in H$ e $\mathbf{v}_{H^\perp} \in H^\perp$, $(P_H + P_{H^\perp})(\mathbf{v}) = P_H(\mathbf{v}) + P_{H^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$. Logo, $P_H + P_{H^\perp} = I$. ■

Dado um vetor $\mathbf{v}$, já vimos como expressá-lo em termos de uma base ortogonal β:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle}\mathbf{u}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle}\mathbf{u}_i}_{\in H} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle}\mathbf{u}_i}_{\in H^\perp} = P_H\mathbf{v} + P_{H^\perp}\mathbf{v}.$$

Concluimos que:

Fórmula da Projeção Ortogonal em H

Se $\gamma = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$ é base ortogonal de H então

$$P_H\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle}\mathbf{u}_i.$$

Em particular, se H é uma reta gerada por $\mathbf{u}$,

$$P_H\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}\mathbf{u}.$$

Se $\gamma = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_p\}$ é não apenas ortogonal, mas sim ortonormal, então os denominadores são todos iguais a 1 e a fórmula se simplifica para

$$P_H\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_i \rangle \mathbf{q}_i.$$

Se o produto interno é o canônico no $\mathbb{R}^n$, pela Observação 61 da página 182,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_i \rangle \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{q}_i {\mathbf{q}_i}^T \mathbf{v}.$$

Definindo $Q = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$, podemos verificar que $\sum_{i=1}^{p} \mathbf{q}_i {\mathbf{q}_i}^T = QQ^T$. Isto nos dá uma fórmula para a matriz de projeção:

Fórmula da Matriz de Projeção Ortogonal em $H \subset \mathbb{R}^n$

Se $\gamma = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_p\}$ é base ortonormal $H \subset \mathbb{R}^n$ com relação ao produto interno canônico,

$$P_H = QQ^T.$$

Na Seção de Mínimos Quadrados vamos ver como calcular a projeção no caso geral, quando não temos uma base ortogonal.

Exemplo 256 $H = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$ *e* $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$. *Calcule* $P_H\mathbf{v}$ *e* $P_{H^\perp}\mathbf{v}$.

$$P_H\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1\rangle}\mathbf{u}_1 = \frac{\left\langle \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\rangle}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \frac{2}{14}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/7\\2/7\\3/7\end{bmatrix}.$$

$$P_{H^\perp}\mathbf{v} = (I - P_H)\mathbf{v} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/7\\2/7\\3/7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13/7\\-2/7\\-3/7\end{bmatrix}.$$

Exemplo 257 $H = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}$ *e* $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$. *Calcule* $P_H\mathbf{v}$.

Este caso é fácil pois a base é ortogonal. Assim, $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}$ *é base ortogonal de* H *e portanto*

$$\begin{aligned}
P_H\mathbf{v} &= \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1\rangle}\mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2\rangle}\mathbf{u}_2 \\
&= \frac{\left\langle \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\rangle}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}\right\rangle}\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix} \\
&= \frac{2}{14}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \frac{8}{21}\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5/3\\2/3\\-1/3\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Exemplo 258 $H = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right\}$ *e* $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$. *Calcule* $P_H\mathbf{v}$.

Neste caso, ao contrário do exemplo anterior, a base não é ortogonal. Uma maneira de contornar isto é usando que $P_H = I - P_{H^\perp}$*, obter uma base para* $H^\perp$.

Pelo Lema 50 (base do complemento ortogonal), resolvemos o sistema homogêneo

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\2 & 3 & 4 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\end{array}\right], \quad \left\{\begin{array}{rcl}x_1 &=& \boxed{1}\,x_3\\x_2 &=& \boxed{-2}\,x_3\\x_3 &=& \boxed{1}\,x_3\end{array}\right..$$

$\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$ *é base de* $H^\perp$ *e, como trata-se de um conjunto contendo um único vetor, é uma* *base ortogonal. Assim, podemos utilizar a fórmula:*

$$P_{H^\perp}\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}\mathbf{u} = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$P_H\mathbf{v} = (I - P_{H^\perp})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 259 *Considere o produto interno do Exemplo 248 da página 183 e as funções* $f_1(t) = 1, f_2(t) = t, f_3(t) = 3t^2 - 1$. *Verifique que* $\{f_1, f_2, f_3\}$ *é ortogonal. Considere* H_2 *o espaço gerado por* $\{f_1, f_2\}$ *e* H_3 *o espaço gerado por* $\{f_1, f_2, f_3\}$. *Se* $\phi(t) = \exp(t)$, *determine* $P_{H_2}\phi$ *e* $P_{H_3}\phi$.

Vamos apresentar os resultados, deixando para o leitor verificá-los (utilizamos software de matemática simbólica para calcular):
$\langle f_1, \phi\rangle = e^1 - e^{-1}$, $\quad \langle f_1, f_1\rangle = 2$,
$\langle f_2, \phi\rangle = 2e^{-1}$, $\quad \langle f_2, f_2\rangle = 2/3$,
$\langle f_3, \phi\rangle = 2e^1 - 14e^{-1}$, $\quad \langle f_3, f_3\rangle = 8/5$.

Com isto calculamos que $P_{H_2}\phi(t) = (e^1 - e^{-1})/2 + 3e^1 t$ *e* $P_{H_3}\phi(t) = (e^1 - e^{-1})/2 + 3e^1 t + 5/4(e^1 - 7e^{-1})(3t^2 - 1)$. *Observe na Figura 8.2 que* P_{H_2} *é razoável e que* $P_{H_3}\phi$ *é praticamente idêntica a função* ϕ. *Para perceber a melhora no erro utilizando* P_{H_3}, *compare os erros* e_2 *e* e_3 *mostrados na figura.*

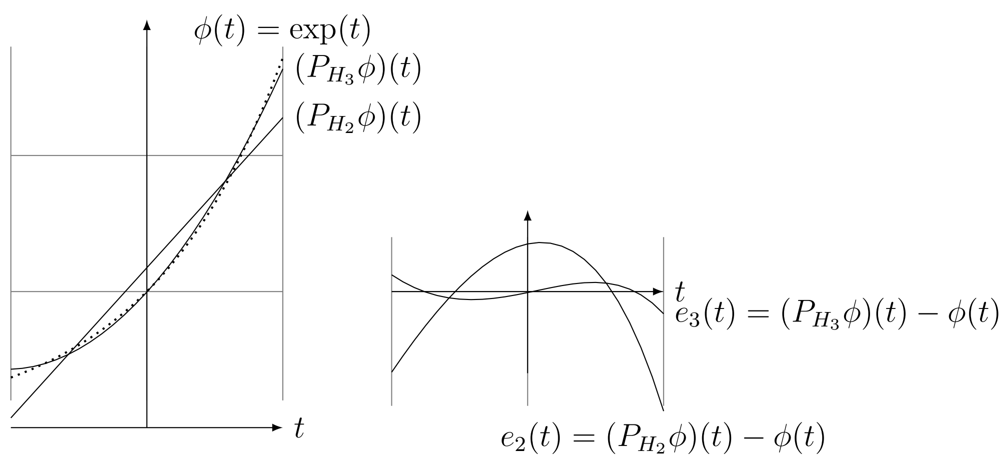


Figura 8.2: Aproximação de $\phi(t)$ por $(P_{H_2}\phi)(t)$ e $(P_{H_3}\phi)(t)$ e erros

Exemplo 260 (série de Fourier) *Vamos aproximar a função* $f(x) = e^{-x}$, *no intervalo* $[0, 1]$, *por uma função da forma* $a_1 \sin(\pi x) + a_2 \sin(2\pi x) + \cdots + a_n \sin(n\pi x)$. *Para isto consideramos, no espaço vetorial das funções contínuas, o produto interno* $\langle g, h\rangle = \int_0^1 g(t)h(t)dt$. *O que estamos procurando é a projeção ortogonal de* f *sobre* H_n, *o espaço gerado por* $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, *onde* $s_n(x) = \sin(n\pi x)$.

Pode-se verificar as seguintes fórmulas:

$$\int_0^1 \sin(k_1\pi t)\sin(k_2\pi t)dt = 0 \quad \forall\, k_1 \neq k_2,$$
$$\int_0^1 e^{-t}\sin(k\pi t)dt = \frac{k\pi(e-(-1)^k)}{e(1+k^2\pi^2)} \quad e$$
$$\int_0^1 \sin^2(k\pi t)dt = \frac{1}{2}.$$

Fazendo as contas (com auxílio de softwares de cálculo) podemos calcular $(P_{H_4}f)(t)$ *e* $(P_{H_{10}}f)(t)$. *Veja na Figura 8.3 o gráfico de* f *e as projeções em* H_4 *e* H_{10} *com os respectivos erros.*

Caso queira estudar mais a este respeito, procure um texto sobre Séries de Fourier.

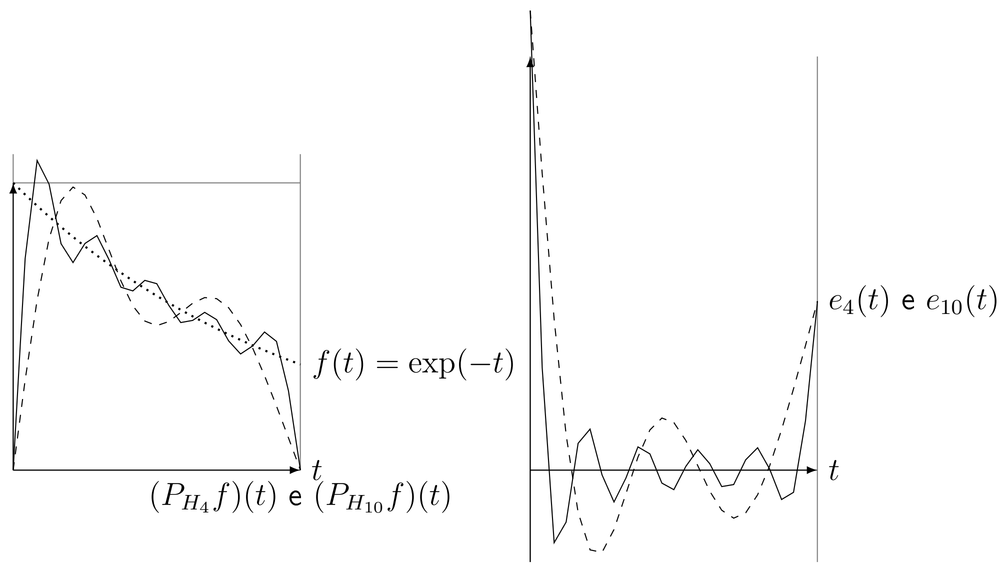


Figura 8.3: Aproximação de $f(t)$ por $(P_{H_4}f)(t)$ e $(P_{H_{10}}f)(t)$ e erros $e_4(t) = (P_{H_4}f)(t) - f(t)$ e $e_{10}(t) = (P_{H_{10}}f)(t) - f(t)$

8.4 Mínimos Quadrados

Já vimos que o sistema linear $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$ tem solução(ões) se, e somente se, $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(A)$. O que fazer quando $\mathbf{b} \notin \mathrm{Im}(A)$? Nem sempre a resposta "o problema não tem solução" é plenamente satisfatória, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 261 *Imagine, de forma super-simplificada, que um paciente deva fazer uma refeição consistindo de arroz e carne, de forma a totalizar 150g de alimento com 450 Kcal e 25g de gordura. Dado que 1g de arroz tem 2.5Kcal e 0.03g de gordura e que a mesma quantidade de carne tem 3.1 Kcal e 0.21g de gordura, que quantidade de cada alimento deve ser ingerida?*

Seja x *a quantidade de arroz, em gramas, e* y *a quantidade de carne. Precisamos de uma solução para o sistema linear*

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &+& y &=& 150 \\ 2.50x &+& 3.10y &=& 450 \\ 0.03x &+& 0.21y &=& 25. \end{array}\right. \quad ou \quad \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 150 \\ 2.50 & 3.10 & 450 \\ 0.03 & 0.21 & 25 \end{array}\right].$$

É fácil verificar, no entanto, que este é um sistema sem solução. Mas esta resposta não há de ajudar muito o nosso paciente!

Note que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.50 & 3.10 \\ 0.03 & 0.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 \\ 113 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151 \\ 445.3 \\ 24.87 \end{bmatrix}.$$

Isto significa que 38g de arroz e 113 de carne é uma "quase-solução": 151g de alimento (ao invés de 150g), 445.3Kcal (ao invés de 450Kcal) e 24.87g de gordura (ao invés de 25g). Para fins de alimentação, estes erros são totalmente aceitáveis.

O que fazer quando $\mathbf{b} \notin \mathrm{Im}(A)$?

Neste caso não existe possibilidade de existir $\mathbf{z}$ tal que $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$. Observando a Figura 8.4, o que podemos fazer é obter um $\mathbf{z}$ tal que $A\mathbf{z}$ está o mais próximo possível de $\mathbf{b}$, isto é, determinar $\mathbf{z}$ tal que a distância $d(\mathbf{b}, A\mathbf{z})$ assume o menor valor possível.

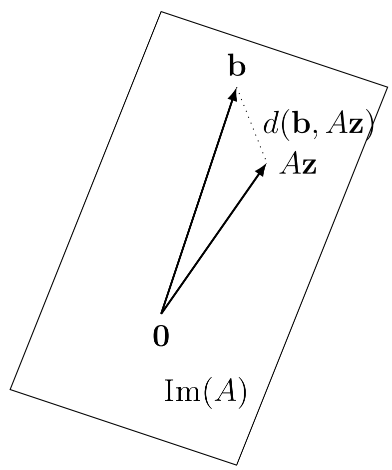


Figura 8.4: Mínimos Quadrados

Definição 104 (solução de mínimos quadrados) *Uma "quase-solução", chamada de* ***solução de mínimos quadrados****, é um vetor* $\mathbf{z}$ *que minimiza* $d(\mathbf{b}, Ax)$ *(a distância entre* $\mathbf{b}$ *e* $A\mathbf{z}$*). Isto significa que* $d(\mathbf{b}, A\mathbf{z}) \leq d(\mathbf{b}, A\mathbf{y})$ *para todo* $\mathbf{y}$ *no domínio de* A.

Vamos começar investigando um problema correlato mais simples.

Lema 52 (vetor mais próximo de um subespaço) *Dado* $H \subset V$ *subespaço vetorial e* $\mathbf{b} \in V$*, existe um único vetor* $\mathbf{h} \in H$ *tal que* $d(\mathbf{b}, \mathbf{h})$ *é mínimo, dado por* $\mathbf{h} = P_H\mathbf{b}$*, a projeção ortgonal de* $\mathbf{b}$ *sobre* H.

Prova: Podemos decompor $\mathbf{b}$ como $\mathbf{b} = P_H\mathbf{b} + P_{H^\perp}\mathbf{b}$ e portanto a quantidade a ser minimizada pode ser escrita como

$$d(\mathbf{b}, \mathbf{h}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{h}\| = \|P_H\mathbf{b} + P_{H^\perp}\mathbf{b} - \mathbf{h}\|.$$

Ou, equivalentemente, podemos minimizar

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{h}\|^2 = \| \underbrace{P_H\mathbf{b} - \mathbf{h}}_{\in H} + \underbrace{P_{H^\perp}\mathbf{b}}_{\in H^\perp} \|^2 = \|P_H\mathbf{b} - \mathbf{h}\|^2 + \|P_{H^\perp}\mathbf{b}\|^2,$$

onde a última identidade se deve ao Teorema 19 (Pitágoras). Note que estamos minimizando uma função de $\mathbf{h}$, mas o termo $\|P_{H^\perp}\mathbf{b}\|^2$ não depende desta variável. Assim, o mínimo é obtido minimizando-se o termo $\|P_H\mathbf{b} - \mathbf{h}\|^2$, o que obviamente se dá quando $\mathbf{h} = P_H\mathbf{b}$. ■

Usando este Lema podemos resolver problemas simples (unidimensionais).

Exemplo 262 [1] *Suponha que usamos uma moeda para jogar caras/coroas. A moeda tem uma certa proporção m de caras com relação ao total de jogadas que esperamos que seja próximo de $1/2$. Podemos obter m experimentalmente jogando a moeda muitas vezes.*

jogadas	*30*	*60*	*90*
caras	*16*	*34*	*51*

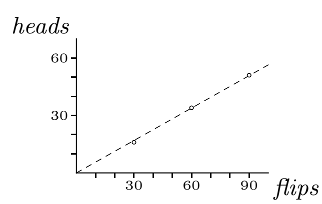
Por ser de natureza randômica, não existe proporção exata – o sistema abaixo não possui solução (exata):

$$\begin{cases} 30m &= 16 \\ 60m &= 34 \\ 90m &= 51 \end{cases}$$

Portanto, o vetor $\mathbf{b} = (16, 34, 51) \notin \langle(30, 60, 90)\rangle = H$. Podemos encontrar $\mathbf{h} \in H$ mais próximo de $\mathbf{b}$ projetando ortogonalmente:

$$\mathbf{h} = P_H\mathbf{b} = \frac{\langle(16, 34, 51), (30, 60, 90)\rangle}{\langle(30, 60, 90), (30, 60, 90)\rangle} \cdot (30, 60, 90) = \frac{7110}{12600} \cdot (30, 60, 90)$$

A estimativa $m = 7110/12600 \approx 0.56$ é um pouco alta mas não muito, e provavelmente a moeda é honesta. A reta com coeficiente angular $m \approx 0.56$, que melhor aproxima os dados, é mostrada na figura abaixo:



Teorema 21 (mínimos quadrados) *A solução de mínimos quadrados do sistema $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$ é a solução do sistema $A^TA\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$.*

Prova: O vetor $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{z}$ é denominado "resíduo associado a $\mathbf{z}$". Voltando ao nosso sistema linear $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$, note que minimizar $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{b} - A\mathbf{z}\|$ com $\mathbf{z}$ qualquer é o mesmo que minimizar $\|\mathbf{b} - \mathbf{y}\|$ com $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}(A)$. Pelo Lema 52, $\mathbf{y} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$. Portanto, $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{b} - A\mathbf{z}\|$ é minimizado quando $A\mathbf{z} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$. Nesta situação,

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{z} = \mathbf{b} - P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} = (I - P_{\mathrm{Im}(A)})\mathbf{b} = P_{\mathrm{Im}(A)^\perp}\mathbf{b} = P_{\mathrm{Nuc}(A^T)}\mathbf{b} \in \mathrm{Nuc}(A^T).$$

Na seqüência anterior usamos que: $P_{\mathrm{Im}(A)^\perp} + P_{\mathrm{Im}(A)} = I$ (pelo Lema 51 (b)) e $\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Nuc}(A^T)$ (pelo Lema 50 pois $H = \mathrm{Im}(A)$).

Portanto, $r \in \mathrm{Nuc}(A^T)$, ou seja,

$$\mathbf{0} = A^T\mathbf{r} = A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{z}) = A^T\mathbf{b} - A^TA\mathbf{z},$$

[1] adaptado de Hefferon

o que implica

$$A^T A\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}.$$

Vale também a volta:

$$\begin{aligned} A^T A\mathbf{z} = A^T\mathbf{b} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{b} - A\mathbf{z} \in N(A^T) \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{b} - A\mathbf{z} \in \mathrm{Im}(A)^\perp \\ &\Rightarrow \quad P_{\mathrm{Im}(A)}(\mathbf{b} - A\mathbf{z}) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \quad P_{\mathrm{Im}(A)}A\mathbf{z} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \\ &\Rightarrow \quad A\mathbf{z} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

■

Resumindo: os sistemas lineares $A\mathbf{z} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$ e $A^T A\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$ sempre possuem solução, quaisquer que sejam A e $\mathbf{b}$, e são equivalentes (isto é, possuem o mesmo conjunto-solução). Ademais, as soluções destes sistemas são os argumentos que minimizam a norma do resíduo $\|\mathbf{b} - A\mathbf{z}\|$ e são ditas soluções no sentido de mínimos quadrados de $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$.

Observação 65 *Se um sistema linear tem solução no sentido clássico, então $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(A)$ e portanto $P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} = \mathbf{b}$. O sistema $A\mathbf{z} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$ é idêntico ao sistema original $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$. As soluções de mínimo quadrado coincidem, neste caso, com as soluções clássicas.*

Lema 53 *Seja A uma matriz qualquer. Então $A^T A$ é invertível se, e somente se, as colunas de A são linearmente independentes.*

Prova: Se $A^T A$ é invertível, $\mathrm{Nuc}(A^T A) = \{\mathbf{0}\}$ e portanto $\mathrm{Nuc}(A) = \{\mathbf{0}\}$, o que implica a independência linear das colunas de A. Se $A^T A$ não é invertível, existe $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ tal que $A^T A\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Portanto, $\|A\mathbf{z}\|^2 = \mathbf{z}^T A^T A\mathbf{z} = \mathbf{z}^T\mathbf{0} = 0$, o que implica $A\mathbf{z} = \mathbf{0}$ e a existência de uma combinação linear não-trivial das colunas de A dando $\mathbf{0}$. ■

Corolário 16 *O problema de mínimos quadrados tem solução única se, e somente se, as colunas de A são linearmente independentes.*

Incidentalmente, obtivemos uma fórmula alternativa para a matriz de projeção. Se $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ é base de H e $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$, então $A^T A$ é invertível e a solução de $A^T A\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$ é dada por $\mathbf{z} = (A^T A)^{-1}A^T\mathbf{b}$. Sabemos que este vetor satisfaz também a $A\mathbf{z} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} = P_H\mathbf{b}$, ou seja, $P_H\mathbf{b} = A(A^T A)^{-1}A^T\mathbf{b}$. Isto nos dá a fórmula alternativa $P_H = A(A^T A)^{-1}A^T$ para a matriz de projeção. Podemos enunciar isto como um lema.

Lema 54 (fórmula para projeção) *Dado $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ base de H e $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$, a matriz de projeção ortogonal em H é $P_H = A(A^T A)^{-1}A^T$.*

Exemplo 263 *Resolva, no sentido dos mínimos quadrados, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ e calcule $P_H\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, onde $H = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.*

Solução:

$$A^TA\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}: \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

A projeção é dada por $A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$. *Mas* $\mathbf{z} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$ *já foi calculado acima. Basta fazer*

$$A\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 264 *A equação que modela um determinado fenômeno físico é dada por* $f(t) = at^2 + bt + c$ *(por exemplo,* f *pode ser a posição de um corpo uniformemente acelerado). Com o objetivo de se determinar os parâmetros* a, b *e* c, *uma série de experimentos são realizados, com os seguintes resultados:*

As posições medidas foram:

t	$f(t)$
1	6.5
2	11.2
3	17.7
4	27.1
5	39.0

Determine os parâmetros a, b *e* c *que melhor ajustam os dados experimentais no sentido dos mínimos quadrados.*

Solução: Gostaríamos que, para determinada escolha de a, b *e* c, *fossem satisfeitas simultaneamente as equações*

$$\begin{cases} a \times 1^2 + b \times 1 + c = 6.5 \\ a \times 2^2 + b \times 2 + c = 11.2 \\ a \times 3^2 + b \times 3 + c = 17.7 \\ a \times 4^2 + b \times 4 + c = 27.1 \\ a \times 5^2 + b \times 5 + c = 39.0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.5 \\ 11.2 \\ 17.7 \\ 27.1 \\ 39.0 \end{bmatrix}.$$

A solução aproximada é obtida resolvendo-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.5 \\ 11.2 \\ 17.7 \\ 27.1 \\ 39.0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 979 & 225 & 55 \\ 225 & 55 & 15 \\ 55 & 15 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1619.2 \\ 385.4 \\ 101.5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.24 \\ 0.68 \\ 4.68 \end{bmatrix}.$$

Para estes valores dos parâmetros, o modelo prevê a seguinte tabela

t	$f(t)$
1	6.60
2	11.00
3	17.88
4	27.24
5	39.08

bastante próxima da real.

Exemplo 265 *Vamos retomar o Exemplo 258 e oferecer agora uma outra solução para determinar $P_H\mathbf{v}$, onde $H = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

A idéia é escrever um problema de mínimos quadrados cuja solução $\mathbf{z}$ satisfaça $A\mathbf{z} = P_H\mathbf{v}$. Para isto, basta encontrarmos uma matriz A tal que $\operatorname{Im}(A) = H$ e tomarmos o lado direito $\mathbf{b} = \mathbf{v}$. Tal matriz pode ser obtida colocando-se os vetores que geram H em suas colunas. Assim,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e$$

$$A^T A\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{z} = A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 20 & 29 \end{bmatrix} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -11/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}.$$

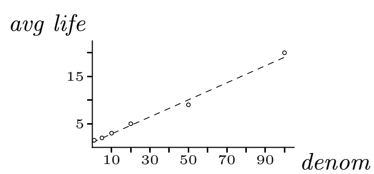
Portanto,

$$P_H\mathbf{v} = A\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 266 [2] *As cédulas de dinheiro tem médias diferentes de tempo de circulação de acordo com o valor. Quanto tempo você espera que uma nota de R$25 dure?*

cédula (R$)	*1*	*5*	*10*	*20*	*50*	*100*
tempo médio (anos)	$1,5$	2	3	5	9	20

O gráfico abaixo parece linear.



Portanto o tempo médio em função do valor x da cédula é dado (aproximadamente) por $k + mx$. Para determinar k e m precisamos resolver o sistema $\begin{cases} k + 1m &= 1.5 \\ \vdots &= \vdots \\ k + 100m &= 20 \end{cases}$, que é impossível. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \\ 1 & 10 \\ 1 & 20 \\ 1 & 50 \\ 1 & 100 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$$

[2]adaptado de Hefferon

Para determinar os coeficientes k e m resolvemos $A^TA\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$ com auxílio de software, obtendo $\mathbf{z} = (1.05, 0.18)$. Portanto, $k = 1.05$ e $m = 0.18$. Colocando $x = 25$ na equação da reta, determinamos que a cédula deve durar 5.55 anos, isto é entre 5 e 6 anos.

8.5 ⋆Cauchy-Schwarz e Ângulo[0]

A Lei dos Cossenos, aplicada ao triângulo cujos lados são $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, onde θ é o ângulo formado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (que pode ser pensado igualmente em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$), diz que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$. Expandindo alguns termos, temos $\sum_{i=1}^{2 \text{ ou } 3} (u_i - v_i)^2 = \sum_{i=1}^{2 \text{ ou } 3} u_i^2 + \sum_{i=1}^{2 \text{ ou } 3} v_i^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$. Como $\sum_{i=1}^{2 \text{ ou } 3} (u_i - v_i)^2 = \sum_{i=1}^{2 \text{ ou } 3} u_i^2 + \sum_{i=1}^{2 \text{ ou } 3} v_i^2 - 2\sum_{i=1}^{2 \text{ ou } 3} u_iv_i$, resulta[3]

$$\cos\theta = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{2 \text{ ou } 3} u_iv_i}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Estas idéias podem ser generalizadas através de um importante resultado envolvendo o produto interno e a sua norma associada, a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Teorema 22 (de Cauchy-Schwarz) *Seja V espaço vetorial, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produto interno e $\|\cdot\|$ a norma associada. Vale a desigualdade*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|.$$

Prova: Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, o resultado vale com igualdade. Assuma agora $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u} + t\mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + t^2\|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Completando o quadrado, temos

$$\left(t\|\mathbf{v}\| + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|}\right)^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $t = -\dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}$, o termo entre parêntesis se anula e temos $\|\mathbf{u}\|^2 \geq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2}{\|\mathbf{v}\|^2}$, o que implica $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$. ∎

Corolário 17 (desigualdade triangular) *Além das propriedades já citadas, vale para norma:*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|,$$

conhecida como Desigualdade Triangular (ver Figura 8.5).

[0]A leitura desta seção é opcional.

[3]Assumindo-se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não nulos; caso contrário, θ não fica bem definido.

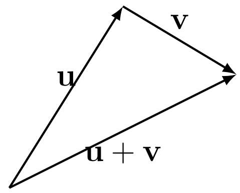


Figura 8.5: Desigualdade Triangular

Prova: De fato,

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Usando Cauchy-Schwarz,

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 \le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2.$$

■

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz nos garante que, num espaço com produto interno, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores não nulos, então

$$\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \le 1 \quad \text{e} \quad -\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle -\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|-\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \le 1$$

e portanto

$$-1 \le \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \le 1.$$

Isto nos permite definir o ângulo entre dois vetores (mais exatamente, o cosseno deste ângulo).

Definição 105 (ângulo entre vetores) *Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ um espaço vetorial com produto interno, definimos o ângulo entre eles $\theta \in [0, 180^\circ[$ tal que*

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Em particular, caso $\theta = 90^\circ$ então $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$, concordando com a Definição 96.

8.6 ⋆Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt[0]

Bases ortonormais são úteis, como visto na seção anterior. A questão é:

Partindo-se de uma base qualquer, como construir uma base ortogonal (ou ortonormal)?

A resposta é o chamado processo de ortogonalização de Gram Schmidt. Dada uma base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ queremos substituí-la por outra ortogonal, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$, com a característica adicional de que, para cada i, existem α's tais que $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \mathbf{v}_j$. Assim, devemos

[0]A leitura desta seção é opcional.

ter:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 + \alpha \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 + \beta \mathbf{v}_1 + \gamma \mathbf{v}_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\mathbf{u}_p &= \mathbf{v}_p + \dots .
\end{aligned}
$$

Note que os espaços gerados pelos primeiros $\mathbf{u}$'s e pelos primeiros $\mathbf{v}$'s são iguais, isto é, $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, p$. Desta forma, podemos ainda escrever

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 + \widetilde{\alpha} \mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 + \widetilde{\beta} \mathbf{u}_1 + \widetilde{\gamma} \mathbf{u}_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\mathbf{u}_p &= \mathbf{v}_p + \dots .
\end{aligned}
$$

A exigência de que esta base seja ortogonal nos permite determinar os coeficientes $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$, ... De fato,

$$
\left.\begin{array}{r}
\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \widetilde{\alpha}\mathbf{u}_1 \\
\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0
\end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle + \widetilde{\alpha} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \widetilde{\alpha} = -\frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}
$$

$$
\left.\begin{array}{r}
\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \widetilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \widetilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\
\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \\
\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0
\end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle + \widetilde{\beta} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \widetilde{\beta} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}
$$

$$
\left.\begin{array}{r}
\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \widetilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \widetilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\
\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \\
\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0
\end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle + \widetilde{\gamma} \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \widetilde{\gamma} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}
$$

Assim,

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Dada uma base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ obtemos outra, ortogonal, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$, por

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1; \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2; \\
\vdots &= \vdots \\
\mathbf{u}_p &= \mathbf{v}_p - \frac{\langle \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 - \dots - \frac{\langle \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_{p-1} \rangle}{\langle \mathbf{u}_{p-1}, \mathbf{u}_{p-1} \rangle}\mathbf{u}_{p-1}.
\end{aligned}
$$

Se o objetivo for obter não apenas uma base ortogonal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$, mas sim ortonormal $\{\widehat{\mathbf{q}}_1, \widehat{\mathbf{q}}_2, \dots, \widehat{\mathbf{q}}_p\}$, basta normalizarmos ao final: $\widehat{\mathbf{q}}_i = \|\mathbf{u}_i\|^{-1}\mathbf{u}_i$. Outra opção, ainda, é normalizar passo a passo; neste caso, os denominadores desaparecem:

Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt

Dada uma base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ obtemos outra, ortonormal, $\{\widehat{\mathbf{q}}_1, \widehat{\mathbf{q}}_2, \ldots, \widehat{\mathbf{q}}_p\}$, por

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1; \quad \widehat{\mathbf{q}}_1 = \|\mathbf{u}_1\|^{-1}\mathbf{u}_1;\\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \widehat{\mathbf{q}}_1\rangle \widehat{\mathbf{q}}_1 \quad \widehat{\mathbf{q}}_2 = \|\mathbf{u}_2\|^{-1}\mathbf{u}_2;\\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \widehat{\mathbf{q}}_1\rangle \widehat{\mathbf{q}}_1 - \langle \mathbf{v}_3, \widehat{\mathbf{q}}_2\rangle \widehat{\mathbf{q}}_2 \quad \widehat{\mathbf{q}}_3 = \|\mathbf{u}_3\|^{-1}\mathbf{u}_3;\\
\vdots &= \vdots\\
\mathbf{u}_p &= \mathbf{v}_p - \langle \mathbf{v}_p, \widehat{\mathbf{q}}_1\rangle \widehat{\mathbf{q}}_1 - \langle \mathbf{v}_p, \widehat{\mathbf{q}}_2\rangle \widehat{\mathbf{q}}_2 - \ldots - \langle \mathbf{v}_p, \widehat{\mathbf{q}}_{p-1}\rangle \widehat{\mathbf{q}}_{p-1}.
\end{aligned}$$

Exemplo 267 *Seja* $H = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\5\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\4\\5\end{bmatrix}\right\}$. *Encontre uma base ortonormal para* H.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix},\\
\mathbf{u}_2 &= \begin{bmatrix}2\\3\\4\\0\end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix}2\\3\\4\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}\right\rangle}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\\0\end{bmatrix} - \frac{20}{14}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4/7\\1/7\\-2/7\\0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Poderíamos usar $\mathbf{u}_2$ *exatamente como calculado acima. Mas podemos, por conveniência, eliminar as frações e usar*

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}4\\1\\-2\\0\end{bmatrix}.$$

Temos agora

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}3\\4\\5\\0\end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix}3\\4\\5\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}\right\rangle}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix}3\\4\\5\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\-2\\0\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}4\\1\\-2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\-2\\0\end{bmatrix}\right\rangle}\begin{bmatrix}4\\1\\-2\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{26}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{6}{21} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Este resultado, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$, *revela que* $\mathbf{v}_3$ *é combinação linear dos vetores anteriores. Assim,* $H = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$. *Basta ortogonalizar este conjunto, reduzido em relação ao original.* $\mathbf{u}_1$ *e* $\mathbf{u}_2$ *já foram calculados. Agora,*

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{18}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{5}{21} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 15 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Como anteriormente, faremos $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 15 \end{bmatrix}$.

Desta forma, temos que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 15 \end{bmatrix} \right\}$$

é base ortogonal de H. *Para uma base ortonormal, basta normalizar estes vetores.*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_1\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{14} \\
\|\mathbf{u}_2\| &= \sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{21} \\
\|\mathbf{u}_4\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 + 15^2} = \sqrt{231}
\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{231}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 15 \end{bmatrix} \right\}$$

é base ortonormal de H.

Nós já vimos nos Exemplos 258 e 265 como calcular $P_H\mathbf{v}$. Vamos ver outra maneira.

Exemplo 268 $H = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ *e* $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Calcule* $P_H\mathbf{v}$.

É necessária uma base ortogonal para H. Por Gram-Schmidt,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad e$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{20}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/7 \\ 1/7 \\ -2/7 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ *é base ortogonal de H e portanto*

$$\begin{aligned} P_H\mathbf{v} &= \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 \\ &= \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{8}{21} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observação 66 *Seja $\beta_H = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ base ortogonal de um subespaço H. Seja $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma extensão de β_H a uma base ortogonal de V (pode ser feita se estendemos β_H a uma base qualquer e em seguida ortogonalizamo-na por Gram-Schmidt. Então $\beta_{H^\perp} = \{\mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é base de $H^\perp$.*

8.7 Produto Interno

8.7.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1. Considere $\mathbf{u} = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$ e $\mathbf{v} = (-2,\ 2,\ -2,\ 3)$.
(a) $\|\mathbf{u}\| = \_\_$; (b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \_\_$; (c) $d(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \_\_$.

Exercício 2. O produto interno em um espaço vetorial V é uma função:
(A) $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$;
(B) $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to V$;
(C) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R} \times V \to V$;
(D) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to V$;

[3] 02.jun.2008 22h

(E) $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}\times V \to \mathbb{R}$;

Exercício 3. Determine se é Verdadeiro ou Falso:

(a) todo conjunto ortogonal é ortonormal ___;
(b) todo vetor pode ser normalizado não-nulo ___;
(c) um conjunto ortonormal de vetores é sempre LI ___;
(d) $\langle \mathbf{v}, \lambda\mathbf{w}\rangle = \lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ ___;
(e) $\|\lambda\mathbf{v}\| = \lambda\|\mathbf{v}\|$ ___.

Exercício 4. Dado H subespaço vetorial:

(a) $\mathrm{Nuc}(P_H) =$ ___; (b) $\mathrm{Im}(P_H) =$ ___; (c) $P_H + P_{H^\perp} =$ ___;

Exercício 5. Considere $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Se T é:

(a) projeção ortogonal no eixo x seguido de projeção ortogonal no eixo y então $T =$___$(I, -I, 0)$;
(b) é reflexão no eixo x seguido de reflexão no eixo x então $T =$___$(I, -I, 0)$;
(c) reflexão no eixo x seguido de reflexão no eixo y então $T =$___$(I, -I, 0)$.

Exercício 6. Se T é:

(a) projeção ortogonal, $T^2 =$___$(I, -I, 0.T, -T)$;
(b) reflexão, $T^2 =$___$(I, -I, 0, T, -T)$.

Exercício 7. Se $V\subset\mathbb{R}^{12}$ e $\dim(V) = 3$, então $\dim(V^\perp) =$_____.

Exercício 8. Se W é:

(a) o eixo y em $\mathbb{R}^2$ então $W^\perp$ é a reta ___$(y = x,\ y = 0,\ x = 0,\ y = -x)$;
(b) a reta $y = x$ em $\mathbb{R}^2$ então $W^\perp$ é a reta ___$(y = x,\ y = 0,\ x = 0,\ y = -x)$;
(c) o eixo y em $\mathbb{R}^3$ então $W^\perp$ é o _____ (*plano; eixo*) ___ $(x,\ y,\ z,\ xy,\ yz,\ xz)$;
(d) o plano yz em $\mathbb{R}^3$ então $W^\perp$ é o _____ (*plano; eixo*) ___ $(x,\ y,\ z,\ xy,\ yz,\ xz)$.

Exercício 9. Se $\mathbf{z}$ é solução de mínimos quadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ então é sempre verdade que:

(A) $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$;
(B) $\|\mathbf{z}-\mathbf{b}\| = 0$;
(C) $\|\mathbf{z}-\mathbf{b}\| > 0$;
(D) $P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{z} = \mathbf{b}$;
(E) $P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} = \mathbf{z}$;

Exercício 10. Sabendo que P é:

(a) projeção ortogonal no eixo y, $P(x, y, z) =$ (___, ___, ___);
(a) projeção ortogonal no plano xy, $P(x, y, z) =$ (___, ___, ___);
(a) reflexão em torno do plano xz, $P(x, y, z) =$ (___, ___, ___).

8.7.2 Problemas

Problema 1. Determine se os conjuntos abaixo são ortogonais:

(a) $\left\{\begin{bmatrix}-1\\4\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-4\\-7\end{bmatrix}\right\}$; (b) $\left\{\begin{bmatrix}3\\-2\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\\-3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\8\\7\\0\end{bmatrix}\right\}$

Problema 2. Calcule a distância entre os vetores $\begin{bmatrix}4\\3\\-3\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}-3\\-1\\2\end{bmatrix}$.

Problema 3. Dado que $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ é base **ortogonal** de $\mathbb{R}^3$, expresse $[\mathbf{v}]_\beta$, onde $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Dica: Não resolva nenhum sistema linear!

Problema 4. Encontre uma base de $H^\perp$, onde

(a) H é a reta em $\mathbb{R}^2$ $2x + 3y = 0$;

(b) H é o plano em $\mathbb{R}^3$ $x - y + z = 0$;

(c) $H = \langle (1,\ 3,\ 1), (3,\ 1,\ 2), (2,\ -2,\ 1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$;

(d) $H = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^5$.

Problema 5. Defina em $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(s)g(s)\,ds$. Calcule:

(a) $\langle x, x^2 \rangle$; (b) $\langle x^2, x^3 \rangle$; (c) $\|1 - x\|$.

Problema 6. Seja $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a projeção na reta gerada por $(1,\ 0,\ -1,\ 0)$. Calcule

(a) $P(x, y, z, w)$; (b) $P^{100}(x, y, z, w)$.

Dica: Não tente calcular P^{100} explicitamente!

Problema 7. Encontre as matrizes das TLs $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

(a) $n = 2$, projeção ortogonal na reta $\{(2t, -t) \in \mathbb{R}^2;\ \text{para } t \in \mathbb{R}\}$;

(b) $n = 3$, projeção ortogonal sobre o plano $x = z$.

Problema 8. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma rotação em relação ao eixo $(1,\ 0,\ 1)$. Sabe-se que $T(0,\ 1,\ 0) = (-1/\sqrt{2},\ 0,\ -1/\sqrt{2})$. Determine o ângulo de rotação.

Dica: pense no plano perpendicular ao eixo de rotação.

Problema 9. Calcule os autovalores os autoespaços associados a:

(a) uma reflexão no plano $3x - 2y + z = 0$ em $\mathbb{R}^3$;

(b) uma projeção numa reta em $\mathbb{R}^3$ sabendo que $P(1,\ -1,\ 0) = (1,\ -1,\ 0)$.

Problema 10. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma projeção ortogonal no plano $x - 2y - z = 0$. Determine uma base β tal que $[T]_\beta$ seja diagonal.

Problema 11. Calcule autovalores e autovetores para mostrar que $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é reflexão. Determine em torno do que (plano ou reta) se dá a reflexão.

Problema 12. [4] Use mínimos quadrados para julgar se a moeda deste experimento é honesta.

jogadas	8	16	24	32	40
caras	4	9	13	17	20

[4] adaptado de Hefferon

Problema 13. Sejam $H = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcule $P_H\mathbf{v}$ de duas maneiras diferentes, conforme os Exemplos 258 (página 191) e 265 (página 198) no texto.

Problema 14. Encontre a melhor aproximação de $\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ por vetores da forma

$$a \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Problema 15. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Encontre o conjunto-solução do problema de mínimos quadrados associado ao sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;

(b) Use o item anterior para calcular $P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$. (Dica: você pode usar **qualquer** solução do problema de mínimos quadrados.)

8.7.3 Desafios

Desafio 1. Considere $\mathbf{u}$ autovetor de A associado a λ e $\mathbf{v}$ autovetor de A^T associado a μ com $\lambda \neq \mu$. Prove que $\mathbf{u}$ é perpendicular a $\mathbf{v}$.

Desafio 2. [5] Defina uma projeção como $P^2 = P$.

(a) Mostre que uma projeção ortogonal possui esta propriedade;

(b) Mostre que existe uma base tal que $P(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$ para $i < k$ e $P(\mathbf{v}_i) = 0$ para $i \geq k$.

(c) Mostre que nesta base P é da forma em blocos $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Desafio 3. Seja V espaço vetorial com produto interno e $\{\widehat{\mathbf{u}}_1, \widehat{\mathbf{u}}_2, \widehat{\mathbf{u}}_3, \widehat{\mathbf{u}}_4, \widehat{\mathbf{u}}_5\}$ base ortonormal de V. Seja

$$H = \langle \widehat{\mathbf{u}}_2 + 2\widehat{\mathbf{u}}_3 + \widehat{\mathbf{u}}_4 + \widehat{\mathbf{u}}_5, \; -2\widehat{\mathbf{u}}_2 - 4\widehat{\mathbf{u}}_3 - 2\widehat{\mathbf{u}}_4 - 4\widehat{\mathbf{u}}_5, \; \widehat{\mathbf{u}}_2 + 2\widehat{\mathbf{u}}_3 + 2\widehat{\mathbf{u}}_4 + 3\widehat{\mathbf{u}}_5 \rangle.$$

Encontre uma base para $H^{\perp}$.

Desafio 4. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Defina $\langle A, B \rangle = \text{traço}(AB^T)$.

(a) prove que é um produto interno;

(b) se $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$, prove que $\|A\|$ (norma de A) induzida pelo produto interno satisfaz:

$$\|A\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{v}_n\|^2.$$

[5] adaptado de Hefferon

(c) [6] encontre o complemento ortogonal do subespaço das matrizes diagonais.

Desafio 5. Seja $D \in \mathcal{M}_{n\times n}$ uma matriz diagonal tal que todos elementos da diagonal são positivos não-nulos. Mostre que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{v}^T D\mathbf{u}$ é um produto interno para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Desafio 6. Mostre que em $\mathbb{R}^2$ toda matriz de:

(a) projeção possui a forma $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$;

(b) reflexão possui a forma $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$.

Desafio 7. Mostre que se H, W são subespaços de um espaço vetorial então:

(a) $H^\perp \cap W^\perp \subset (H\cap W)^\perp$; (b) $(H^\perp)^\perp = H$.

Desafio 8. Sabemos que o determinante de uma TL é definida como o determinante de uma matriz que representa T numa certa base. Se mudarmos a base, a matriz que represnta T muda mas o determinante permanece o mesmo. Use isto para calcular o determinante de $A = [T]_\varepsilon$ nos casos em que:

(a) T é diagonalizável com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$;

(b) T é uma rotação no $\mathbb{R}^2$;

(c) T é uma rotação no $\mathbb{R}^3$;

(d) T é uma reflexão em torno de uma reta no $\mathbb{R}^2$;

(e) T é uma reflexão em torno de um plano no $\mathbb{R}^3$;

(f) T é uma projeção;

Desafio 9. (Shilov p.272 #6) Mostre dada matriz não-singular A existem S auto-adjunta ($S^T = S$) e Q ortogonal ($Q^T = Q^{-1}$) tais que $A = SQ$. Esta é chamada de decomposição polar de A, em analogia com complexos: S é o módulo (esticamento) e Q a parte angular (rotação). Prove que ela é única.

Desafio 10. (Shilov p.242 #19) Encontre o polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ para o qual a integral

$$\int_{-1}^{1} p^2(x)\, dx$$

é o menor valor possível.

Desafio 11. Dado $T \in \mathcal{L}(V; W)$, defina $\|T\| = \max\limits_{\|u\|_V = 1} \|T(u)\|_W$. Prove que isto define uma norma nos espaço das TLs.

Desafio 12. Interprete o algoritmo de Gram-Schmidt como uma decomposição $A = QR$, com Q ortogonal e R triangular superior.

Desafio 13. Prove que a matriz de rotação anti-horária por um ângulo θ em torno do eixo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, com $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ é:

$$\begin{bmatrix} a^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & ab(1-\cos\theta) - c\operatorname{sen}\theta & ac(1-\cos\theta) + b\operatorname{sen}\theta \\ ab(1-\cos\theta) + c\operatorname{sen}\theta & b^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & bc(1-\cos\theta) - a\operatorname{sen}\theta \\ ac(1-\cos\theta) - b\operatorname{sen}\theta & bc(1-\cos\theta) + a\operatorname{sen}\theta & c^2(1-\cos\theta) + \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Conclua que se A é matriz de rotação, o ângulo θ de rotação satisfaz $\cos\theta = (\text{traço}(A) - 1)/2$.

Dica: Mude base levando o eixo-z em (a, b, c) e utilize matriz de rotação no plano xy.

Desafio 14. Suponha que T é uma rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno de um eixo fixo.

(a) prove que existe uma base β do $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$;

[6] Hoffman and Kunze, p. 289, sec. 8.2 no. 10

(b) (Anton; difícil) Prove que se $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor não-nulo então $\mathbf{v} = T\mathbf{w} + T^T\mathbf{w} + (1 - \text{traço}(T))\mathbf{w}$ determina o eixo de rotação de T.

Desafio 15. Prove que se $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ com $\det(A) = 1$ e $\{A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2\}$ ortonormal então A representa uma rotação em $\mathbb{R}^2$.

Desafio 16. Prove que se $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ com $\det(A) = 1$ e $\{A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, A\mathbf{e}_3\}$ ortonormal então A representa uma rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno de algum eixo de rotação.

Desafio 17. Se $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ é ortogonal então é rotação em torno de um eixo se $\det A = 1$ e uma rotação seguida de reflexão se $\det(A) = -1$.

8.7.4 Extras

Extra 1. Encontre uma base para $H^\perp$ se:
(a) $H = \langle (1,\ -3,\ 1,\ 2), (2,\ -1,\ 2,\ 0), (-4,\ -3,\ -4,\ 4) \rangle \subset \mathbb{R}^4$;
(b) $H = \langle (1,\ 0,\ 1,\ 3), (1,\ 2,\ 0,\ 1) \rangle \subset \mathbb{R}^4$;
(c) H é a interseção dos planos $x - y - z = 0$ e $2x - y + z = 0$;
(d) H é a reta em $\mathbb{R}^3$ $(x(t), y(t), z(t)) = (2t,\ -t,\ 3t)$;

Extra 2. Seja $\mathbf{v} \in V$ um vetor não nulo. Prove que a matriz de projeção ortogonal na direção $\mathbf{v}$ é dada por

$$P_{\langle \mathbf{v} \rangle} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Extra 3. Encontre as matrizes das TLs $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:
(a) $n = 2$, projeção ortogonal na reta $2x - 4y = 0$;
(b) $n = 2$, projeção ortogonal na reta $\langle (0,\ -2) \rangle$;
(c) $n = 2$, reflexão em torno da reta $2x - 4y = 0$;
(d) $n = 2$, reflexão em torno da reta $y = 3x$.
(e) $n = 2$, projeção na reta $y = x$ seguida de rotação de $45°$;
(f) $n = 4$, projeção ortogonal sobre o plano $\left\{ \begin{array}{rcl} x - w & = & 0 \\ y = z & = & 0 \end{array} \right.$
(g) $n = 3$, rotação de $45°$ em torno do eixo $(1,\ 1,\ 1)$ (deixe indicado como produto de matrizes, não precisa explicitar o produto).

Extra 4. Seja H subespaço vetorial. Mostre que $H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

Extra 5. Em cada item dê um exmplo de uma TL satisfazendo as condições dadas:
(a) $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma reflexão com $R(0,\ 1) = (0,\ -1)$,
(b) $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma projeção numa reta com $P(1,\ 1) = (1,\ 1)$;
(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma reflexão tal que $T(2,\ 2,\ 2) = (0,\ 0,\ 1)$.
(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma projeção ortogonal tal que $T(2,\ 1,\ 2) = (2,\ 3/2,\ 3/2)$.

Extra 6. Seja R_θ uma rotação do plano de ângulo θ. Sabendo que $R_\theta(\sqrt{3},\ -1) = (2,\ 0)$ e $R_\theta(\sqrt{3},\ 1) = (1,\ \sqrt{3})$, determine θ.

Extra 7. Sabe-se que $T(1,\ 1,\ -1) = 3(1,\ 1,\ -1)$, $T(1,\ 0,\ 1) = 3(1,\ 0,\ 1)$ e $T\mathbf{w} = \mathbf{w}$, com $\mathbf{w}$ ortogonal a $(1,\ 1,\ -1)$ e $(1,\ 0,\ 1)$. Encontre uma base *ortonormal* β tal que $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Extra 8. Calcule autovalores e autovetores para mostrar que:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é rotação. Determine o ângulo e o eixo de rotação.

(b) $\begin{bmatrix} 4/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 4/5 \end{bmatrix}$ é projeção ortogonal sobre um plano. Determine o plano.

(c) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 7 & 2 & \sqrt{3} \\ 2 & 4 & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 5 \end{bmatrix}$ é projeção ortogonal.

(d) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2\sqrt{3} \\ 4 & 0 & -4\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -4\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$ é reflexão.

(e) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ é rotação. Determine o eixo e o ângulo.

Extra 9. Seja R uma reflexão em torno da reta $3x + 5y = 0$ e P uma projeção nesta reta.

(a) Determine um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ tal que $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$;

(b) Determine um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ tal que $R\mathbf{v} = -\mathbf{v}$;

(c) Calcule o núcleo de P.

(d) Calcule o núcleo de R.

Dica: não precisa calcular nem P nem R explicitamente.

Extra 10. Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de V e $\mathbf{w} \in V$ tal que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w} \rangle = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Prove que $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Extra 11. (Teorema de Pitágoras generalizado) Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores ortogonais dois a dois, isto é, $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$. Prove que

$$\|\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{v}_n\|^2.$$

Extra 12.

(a) Encontre a equação $y = ax + b$ da reta que melhor ajusta os pontos $(0,\ 1)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$ e $(3,\ 2)$.

(b) Esboce um gráfico ilustrando o item anterior.

(c) Use sua resposta ao item (a) para encontrar a projeção ortogonal de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ sobre $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Extra 13. A força aplicada numa mola e sua distenção estão relacionadas por uma relação linear. Para determinar esta relação para uma certa mola fizemos medidas de distensões e obtemos a seguinte tabela:

força aplicada y (N)	distenção x (cm)
0,5	0,6
1,0	0,9
1,5	1,7
2,0	2,1
2,5	2,4

Monte o sistema (sobredeterminado) que determina a, b da reta $y = ax + b$ e resolva por mínimos quadráticos.

Extra 14. Determine a reta que melhor se ajusta aos seguintes pontos: $(0,\ 1.1)$, $(1,\ 2.1)$ e $(2,\ 3.0)$.

Apêndice A

Notação

A.1 Básica

Conjuntos numéricos: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Vetores são usualmente denotados por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Vetor nulo $\mathbf{0}$.

Escalares são denotados usualmente por $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Transformações lineares são usualmente denotadas por: T, P, R, S.

Conjunto de elementos de $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - x = 0$: $\{x \in \mathbb{R} |\ x^2 - x = 0\}$.

Um conjunto de vetores: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Uma lista de vetores: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Entradas de um vetor em $\mathbb{R}^n$: $(1, 2, 3)$.

Função T de V em W: $T : V \to W$. Também escrevemos $\begin{array}{rccc} T: & V & \to & W \\ & \mathbf{v} & \mapsto & 3\mathbf{v} \end{array}$

Sistemas lineares: $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right.$.

A.2 Espaços

Espaços vetoriais são usualmente denotados por: V, W, U.

A soma direta de V e W: $V \oplus W$.

Espaço gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$: $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. Também uso, no capítulo de produto interno, $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para não confundir com produto interno.

Espaço das Funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$; de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$: $\mathcal{F}([0, 1]; \mathbb{R})$.

Espaço das Funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ Contínuas: $\mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Espaço das Funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com n derivadas Contínuas: $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Espaço dos polinômios de grau n: $\mathcal{P}_n$.

Espaço de todos os polinômios (qualquer grau): $\mathcal{P}$.

Espaço das TLs de V em W: $\mathcal{L}(V; W)$.

Espaço das matrizes $n \times m$: $\mathcal{M}_{n \times m}$.

A.3 Bases e Coordenadas

Bases são usualmente denotadas por: α, β, γ. Base canônica do $\mathbb{R}^n$: ε.

Coordenadas do vetor $\mathbf{v}$ na base β: $[\mathbf{v}]_\beta$.

[0] Versão 17.abr.2008

Dada a transformação linear $T : V \to W$, com β base de V e γ base de W, a matriz que representa T é: $[T]_{\gamma \leftarrow \beta}$. Caso seja mesma base do domínio e contradomínio, deixamos o segundo argumento em branco: $[T]_{\beta}$.

Imagem de uma TL (ou matriz): $\mathrm{Im}(T)$. Núcleo de uma TL (ou matriz): $\mathrm{Nuc}(T)$.

A.4 Matrizes

Matrizes são usualmente denotadas por A, B, M.

Matriz genérica: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Vetor coluna: $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Matriz e Transformação identidade: I.

Posto: $\dim \mathrm{Im}\,(A)$. Nulidade: $\nu(A)$. Traço de uma matriz (ou TL): traço(A). Determinante de uma matriz (ou TL) $\det(A)$.

Matriz por colunas:

(a) com primeira coluna igual ao vetor $\mathbf{v}_1$ e segunda igual ao vetor $\mathbf{v}_2$: $\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$;

(b) com colunas $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$: $\begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$.

Matriz por linhas, com primeira linha igual ao vetor $\mathbf{u}_1^T$, ..., $\mathbf{u}_m^T$: $\begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_m \rightarrow \end{bmatrix}$.

Matrizes diagonais: $\begin{bmatrix} a & \\ & b \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & c & \\ & & & d \end{bmatrix}$.

A.5 Produto Interno e Norma

Produto interno: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$. Cuidado para não confundir com a notação de espaço gerado pelos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Por isso uso no capítulo de produto interno $\mathrm{span}\,\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ para o espaço gerado.

Norma: $\|\lambda \mathbf{w}\| = |\lambda| \|\mathbf{w}\|$.

Vetor unitário: $\widehat{\mathbf{v}}$.

Apêndice B

Respostas dos Exercícios

B.1 Introdução à Álgebra Linear

B.1.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1. (a) reta; (b) ponto; (c) plano; (d) reta; (e) plano; (f) ponto; (g) reta; (h) reta.

Exercício 2. (a) paralelos; (b) maior tamanho e mesmo sentido; (c) mesmo tamanho e sentido oposto; (d) maior tamanho e sentido oposto; (e) menor tamanho e sentido oposto; (b) maior tamanho e mesmo sentido;

Exercício 3. (a) reta; (b) plano; (c) reta; (d) ponto;

Exercício 4. (a) não; (b) sim.

Exercício 5. (a) V; (b) F;

Exercício 6. (a) $(1,0,0,0,0)$, $(0,1,0,0,0)$, $(0,0,1,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(0,0,0,0,1)$. (b) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 7. Todas falsas.

B.1.2 Problemas

Problema 1. (a) $(0,11)$; (b) $(3,-1)$; (c) $(6,0)$;

Problema 2. (a) $(0,0,0,2,1)$; (b) $(-3,6,-9,6,-3)$.

Problema 3. (a) $(x,y) = (t, 2t+5) = (0,5)+t(1,2)$ ou $(x,y) = ((s-5)/2, s) = (-5/2, 0)+s(1/2,1)$; (b) $(x,y) = (t,-1) = (0,-1)+t(1,0)$;

Problema 4. (a) $x = t-1, y = -2t+1, z = t$; (b) $x = 1, y = 0, z = t$; (c) $x = t, y = t, z = 0$;

Problema 5. (a) $x = 2-t, y = -3+5t, z = -1+2t$; (b) $x = -1, y = 2, z = t$; (c) $x = 0, y = 1-t, z = t$;

Problema 6. (a) Tome $s = z, t = y, x = -y+z+2 = -t+s+2$. Logo, $(x,y,z) = (2,0,0)+s(1,0,1)+t(-1,1,0)$; (b) $x = t$, $y = s$, $z = y = s$. Logo, $(x,y,z) = \mathbf{0}+t(1,0,0)+s(0,1,1)$.

[0]Versão 17.Mar.2008 17h

Problema 7. (a) $(1,0,1)+t(-1,1,0)+s(-2,0,-1)$;
(b) $(1,3,2)+t(-2,-1,-1)+s(1,-1,-1)$; (c) $(-3,1,0)+t(4,0,-1)+s(1,-1,1)$;

Problema 8. (a) tome $t = 0, 1$ e -1 por exemplo e obtenha $(1,2,0,0)$, $(1,5/2,1,-1)$, $(1,3/2,-1,1)$; (b) sim ($t=4$); (c) não; (d) não pois $(1,4,3,2) \notin r$;
(e) sim pois $(1,4,-4,4) \in r$ ($t=-4$) e $(0,-2,-4,4)$ é paralelo a $(0,1/2,1,-1)$.

Problema 9. (a) Coloque $s = 0, 1$ e $t = 0, 1$ alternadamente, obtendo 4 pontos: $(1,1,2,0)$, $(0,3,1,2)$, $(2,2,3,1)$ e $(1,4,2,3)$; (b) sim com $t = 1, s = 2$; (c) não; (d) não pois $(1,1,3,3) \notin \Pi$.

Problema 10. (a) $(x,y,z,w) = (s-3t+2u+4, s, t, u) = (4,0,0,0)+s(1,1,0,0)+t(-3,0,1,0)+u(2,0,0,1)$; (b) note que x, y, w podem assumir qualquer valor. Logo colocando $x = t, y = s, w = k$ e $u = m$, temos que $z = 3u+5 = 3m+5$. Portanto $(x,y,z,w,u) = (t,s,3m+5,k,m)$. Na forma fatorada, $(x,y,z,w,u) = (0,0,5,0,0)+t(1,0,0,0,0)+s(0,1,0,0,0)+m(0,0,3,0,1)+k(0,0,0,1,0)$.

Problema 11. (a) sim pois um não é múltiplo do outro; (b) não pois $-3(-1,2,1,-3) = (3,-6,-3,9)$; (c) não pois, embora nenhum seja múltiplo de outro, $(1,2)+(2,1) = (3,3)$; (d) não pois $(0,0,0,0,0) = 0(1,2,3,4,5)$.

Problema 12. (a) não pois não é múltiplo; (b) sim pois $(-1,0,0) = (2,1,1)-(3,1,1)$; (c) não pois vai aparecer um sistema sem solução; (d) sim pois $(a,b,c) = a(1,0,1)+b(0,1,0)+(c-a)(0,0,1)$; (e) não pois $(2,1,2)$ não é múltiplo de $(2,-1,2)$.

Problema 13. (a) $\mathbf{v} = 4(1,-1,0)+3(0,1,-1)+2(0,0,1)$; (b) $[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$; (c) $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$; (d) $[\mathbf{w}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$;

B.1.3 Extras

Extra 1. (a) F; (b) V;

Extra 2. (a) $(x,y) = (3,t) = (3,0)+t(0,1)$ ou $(x,y) = (3,2s) = (3,0)+s(0,2)$. (b) $x = -t+1, y = t, z = t-1/5$; (c) $y = t, z = s$, $x = 1+2y = 1+2t$. Logo $(x,y,z) = (1,0,0)+t(1,2,0)+s(0,0,1)$; (d) $x = t, y = s, z = (3t-5)/2$;

Extra 3. (a) reta; (b) plano; (c) plano; (d) plano; (e) ponto; (f) reta.

B.2 Sistemas Lineares

B.2.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1. (a) infinitas; (b) uma única; (c) nenhuma.

Exercício 2. Nunca alteram: (a), (d) e (e); podem alterar (b), (c) e (f).

Exercício 3. $2x+3y = -2$.

Exercício 4. (a) Nenhuma; (b) uma única.

Exercício 5. Basta que uma linha seja múltipla da outra. (a)$\xi \neq -6$; (b) nenhum valor de ξ satisfaz.

---
[0]Versão 14.jul.2008 09h

Exercício 6. (a) falso. Pode ser, por exemplo, um sistema sem solução pois uma das equações restantes pode ser $0 = 1$. (b) verdadeiro, a solução nula; (c) falso.

Exercício 7. (a) falso; (b) falso, pode ser sem solução; (c) verdadeiro; (d) verdadeiro (pode possuir até 9); (e) falso, pode possuir equações que são combinações lineares de outras.

Exercício 8. (a) O sistema linear tem solução única; (b) O sistema linear é sem solução (conjunto-solução é vazio), pois há uma linha da forma $[\,0\ 0\ \cdots\ 0 \mid \blacksquare\,]$; (c) O sistema linear com infinitas soluções. Há 3 variáveis e 2 pivôs, logo o número de variáveis livres é $3 - 2 = 1$ variável livre.

Exercício 9. (a) interseção de hiperplanos; (b) 1; (c) 2; (d) 4;

Exercício 10. (a) $\neq \emptyset$; (b) $\in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$.

Exercício 11. $S = \mathbf{v}_0 + V$ com $\mathbf{v}_0 \in S$.

B.2.2 Problemas

Problema 1. (a) $y = 1$; (b) $y = 1/2$; (c) O sistema não possui solução.

Problema 2. (a) solução única: retas concorrentes em $(2, 1)$; (b) nenhuma solução: retas paralelas distintas;

Problema 3. Existem várias possibilidades para cada item.

Problema 4. (a) C; (b) nenhuma solução; (c) nenhuma solução; (d) A.

Problema 5. (a)$\{0x = 0$; (b)Impossível, pois $p < n$; (c)$\{0x + 0y = 1$; (d)$\begin{cases} 0x &= 0 \\ 0x &= 0 \end{cases}$;

Problema 6. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Problema 7. (a) Sistema sem solução. (b) Conjunto-solução: $\{(1, 0, 0, 0)r + (0, 2, 1, 0)s \mid r, s \in \mathbb{R}\}$; (c) Conjunto-solução: $\{(-1, 3, 2)\}$; (d) Conjunto-solução: $\{(\frac{4}{3}, 1, 0)r + (-\frac{2}{3}, 0, 1)s \mid r, s \in \mathbb{R}\}$; (e) Conjunto-solução: $\{(6, 0, -2, -2) + (-3, 1, 0, 0)r \mid r \in \mathbb{R}\}$. (f) Matriz totalmente escalonada: $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$; O sistema linear tem solução, já que não há linha da forma $[\ 0\ 0\ \cdots\ 0 \mid \blacksquare\ ]$. A solução não é única: há duas variáveis livres, já que há cinco variáveis e só três pivôs;

$\{(0, 2, 0, 1, 3) + r(1, 0, 0, 0, 0) + s(0, -2, 1, 0, 0)\ r, s \in \mathbb{R}\}$.

Problema 8. Por definição, sistemas equivalentes têm o mesmo conjunto solução. O conjunto é: $\{s(2, 2, 1, 0, 0) + t(24, 7, 0, 1, 0),\quad s, t \in \mathbb{R}\}$; (b) Fazendo, por exemplo, $(s, t) = (0, 0)$, $(s, t) = (0, 1)$ e $(s, t) = (1, 0)$ obtemos as soluções (1,3,0,0,9), (25,10,0,1,9) e (3,5,1,0,9).

Problema 9.

(a)$\begin{cases} x &= \frac{1}{2} + 1r + (-2)s \\ y &= 0 + 1r + 0s \\ z &= 0 + 0r + 1s \end{cases}$;

(b)$\begin{cases} x &= r - 1 \\ y &= r - 1 \quad r \in \mathbb{R}. \\ z &= r \end{cases}$

Problema 10. (a) $m \neq 4$; (b)$m = 4$.

Problema 11. (a) $c = 0$ e $d \neq 0$; (b) $c = 0$ e $d = 0$.

Problema 12. $a = 1, b = -1, c = 2$.

Problema 13. $(2, -1)$ e $(-2, 3)$.

Problema 14. (a) CL das colunas: $2(1, -2, 0) - 1(0, 1, 4) + 1(-1, 3, -3) = (2, -4, 0) + (0, -1, -4) + (-1, 3, -3) = (1, -2, -7)$;

(b) $\begin{bmatrix} (1, 0, -1) \cdot (2, -1, 1) \\ (-2, 1, 3) \cdot (2, -1, 1) \\ (0, 4, -3) \cdot (2, -1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$

Problema 15. Portanto queremos combinar 1 vez a primeira coluna mais 1 vez a segunda menos 1 vez a terceira (usando definição de produto matriz-vetor como CL das colunas): $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Ele não é único: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$ etc.

B.2.3 Desafios

Desafio 4. São duas as possibilidades para a forma totalmente escalonada de um sistema homogêneo $n \times n$. Uma é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right].$$

A outra é que alguma linha zere durante o escalonamento e seja assim descartada, de forma que o número de linhas após o escalonamento (p, igual ao número de pivôs) seja menor do que o número e variáveis n.

Dado um sistema qualquer, consideremos o sistema homogêneo associado.

I. Se este se enquadrar no primeiro caso acima, a forma escalonada do sistema não-homogêneo original será, necessariamente, da forma

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \star \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \star \end{array}\right].$$

Este sistema tem solução única. A solução (isto é, os valores das $\star$'s) depene do lado direito do sistema original, mas a existência e unicidade são garantidas para todo lado direito. Esta é a alternativa (a).

II. Se este se enquadrar no segundo caso, temos um sistema com solução (pois sistemas homogêneos sempre o são) com $p < n$ e portanto $n - p$ variáveis livres. Isto implica em infinitas soluções. É a alternativa (b).

B.2.4 Extras

Extra 1. (a) infinitas soluções: retas coincidentes; (b) sem solução: retas não se interceptam simultaneamente em um ponto.

Extra 2. (a) ∞; (b) 0; (c) 1; (d) 1; (e) 0.

[0]Versão 14.jul.2008 09h

Extra 3. (a)$\{x = 0$; (b)$\{0x = 1$; (c)$\{x + y = 1$; (d)$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ 2x & = & 2 \end{array}\right.$; (e)$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ 2x & = & 3 \end{array}\right.$

Extra 4. (c) $a = -2, b = -4, c = -29$.

Extra 6. $a = 0$.

Extra 7. (a) $3b_1 - b_2 - 4b_3 = 0$. (b) Não, pois $3(3) - 5 - 4(-1) = 8 \neq 0$.

Extra 8. $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & b_1 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & b_2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & b_3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & b_4 \\ 1 & a_5 & a_5^2 & a_5^3 & a_5^4 & b_5 \end{array}\right]$.

B.3 Espaços Vetoriais

B.3.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1. (a) sim; (b) não; (c) sim; (d) não; (e) não; (f) não.

Exercício 2. (a) u é múltiplo de v; (b) nenhuma das alternativas. (c) não nulo.

Exercício 3. (C).

Exercício 4. representado como o gráfico da função. $f(1) = -2, f(2) = 1, f(3) = 5, f(4) = -3$.

Exercício 5. função identicamente nula.

Exercício 6. (a) sim; (b) não; (c) sim;

Exercício 7. base de W escalonando ... como linhas.

Exercício 8. (a) pode aumentar; (b) pode diminuir.

Exercício 9. (a) 1; (b) plano.

Exercício 10. (a) não; (b) não. (c) não;

Exercício 11. (a) no máximo (b) é LI; (c) pode ser LD; (d) não pertence.

Exercício 12. (a) no máximo (b) pode ser gerador; (c) é gerador; (d) pode pertencer.

Exercício 13. (a) $\mathbf{0} \in W$; (b) $6\mathbf{v}_2 - 5\mathbf{v}_3 \in W$; (c) $\dim W \leq n$

B.3.2 Problemas

Subespaços do $\mathbb{R}^n$

Problema 1. (a) não; (b) não; (c) sim;

Problema 2. (a) não; (b) não;

Problema 3. (a) $\mathbf{0}$; (b) $\mathbb{R}^3$.

Problema 4. (a) não; (b) sim. (c) sim.

Problema 5. (a) Não. (b) Sim. (c) O único conjunto de um único elemento que é LD é $\{\mathbf{0}\}$.

Problema 6. (a) Não. (b) Sim. (c) Não. (d) Um conjunto de dois elementos, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é LD se e só se um dos vetores é múltiplo do outro, isto é, $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$, para algum α. Note que, no item **a**, $\mathbf{0} = 0(1, 0, -2)$, mas $(1, 0, -2) \neq \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}\ \ \forall\alpha$.

[0]Versão 16.jul.2008 9h

Problema 7. (a) Sim. (b) Não. (c) Não.

Problema 8. (a) não é; (b) não é; (c) é base; (d) não é;

Problema 9. (a) Sistema (1 equação) já esta totalmente escalonado. Como é 1 equação, 4 variáveis: 3 variáveis livres. Logo dimensão é 3. Como pivô é associado ao x, colocamos x como variável dependente e y, z, w como livres. $y = r, z = s, w = t$, $x = -y + w = -r + t$. Logo $(x, y, z, w) = r(-1, 1, 0, 0) + s(0, 0, 1, 0) + t(1, 0, 0, 1)$. Base: $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$.

(b) Escalonando totalmente obtemos $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$. Como são 2 equações, 4 variáveis: 2 variáveis livres. Logo dimensão é 2. Como pivôs são associados a x e z, colocamos x, z como variáveis dependentes e y, w como livres. $y = r$, $w = s$, $x = 0$, $z = w = s$. Logo $(x, y, z, w) = r(0, 1, 0, 0) + s(0, 0, 1, 1)$. Base: $\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$.

(c) Sistema (2 equações) já esta totalmente escalonado. Como são 2 equações, 4 variáveis: 2 variáveis livres. Logo dimensão é 2. Como pivôs são associados a y e w, colocamos y, w como variáveis dependentes e x, z como livres. $x = r$, $z = s$, $y = -3z = -3s$, $w = 0$. Logo $(x, y, z, w) = r(1, 0, 0, 0) + s(0, -3, 1, 0)$. Base: $\{(1, 0, 0, 0), (0, -3, 1, 0)\}$.

(d) reescrevendo equações paramétricas, $(x, y, z, w) = r(1, 0, 2, 1) + s(2, -1, 1, 0) + t(1, -2, -4, -3)$. Não podemos concluir que dimensão é 3! Temos que escalonar matriz (não precisa escalonar totalmente) com vetores em linhas para ver dimensão do espaço gerado: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Portanto dimensão 2 e base $\{(1, 0, 2, 1), (0, -1, -3, -2)\}$.

Problema 10. (a) qualquer uma das três; (b) basta tomar o múltiplo de uma delas. por exemplo $2x - 2y = 0$.

Problema 11. Temos que resolver o sistema $(0, 5, 1) = a(1, 1, 1) + b(-1, 1, 0) + c(1, 0, -1)$. Resolvendo obtemos que $(a, b, c) = (2, 3, 1)$. Logo, $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

LI e LD: teóricos

Problema 12. $1(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + 1(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + 1(\mathbf{w} - \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ é uma combinação linear não-trivial que dá o vetor nulo.

Problema 13. (a) se $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$, então $1\mathbf{v} + \sum_{i=1}^n (-\alpha_i)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ é uma combinação linear não-trivial dando o vetor nulo.

(b) se $\sum_{i=2}^n (-\alpha_i)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ é uma combinação linear não-trivial dando o vetor nulo, então $0\mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^n (-\alpha_i)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ também o é. Isto é, se $\{\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ não é LI, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ também não é.

(c) se fosse verdadeiro, pelo item (a) teríamos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é LD.

Espaços de Polinômios e Funções

Problema 14. (a) sim; (b) não; (c) não; (d) sim.

Problema 15. (a) $1(1+2x) - (3/2)(1+x) + (1/2)(1-x) = 0$; (b) $1 - \operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x) = 0$.

Problema 16. (a) LD; (b) LI; (c) LI.

Problema 17. (a) se $f' = 0$ então f é constante, isto é, $f(x) = c$ para todo x. Logo, $f = cg$, dado que $g(x) = 1$ para todo x;

(b) sabemos (do cálculo) que se $f' = f$ então $f(x) = ce^x$ para alguma constante c. Logo $f = cg$.

Problema 18. (a) sim; (b) não;

Problema 19. (a) $[q]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; (b) $[p]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

Problema 20. $[f]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ pois $f = 4\phi_0 + 3\phi_1 + 5\phi_2 + 2\phi_3$.

B.3.3 Desafios

Desafio 1. Suponha que existe $\mathbf{v} \neq 0$ com $\mathbf{v} \in V$.

Desafio 5. (e) tome uma base para $H \cap K$; estenda-a a base de H e estenda-a a base de K.

Desafio 7. (a) Junte as bases de W_1 e W_2 e escalone; (c) Determine base escalonada de W_1. (e) Determine sistemas homogêneos cuja solução seja W_1 e W_2. Junte as equações num sistema ampliado.

Ver Reginaldo Santos p. 178, 179.

Desafio 8. (a) É claro que $f(x) \equiv 0$ satisfaz à equação. Sejam f_1 e f_2 satisfazendo $f_1''(x) + p(x)f_1'(x) + q(x)f_1(x) = 0$ e $f_2''(x) + p(x)f_2'(x) + q(x)f_2(x) = 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer. Então $(\alpha f_1 + f_2)''(x) + p(x)(\alpha f_1 + f_2)'(x) + q(x)(\alpha f_1 + f_2)(x) = \alpha(f_1''(x) + p(x)f_1'(x) + q(x)f_1(x)) + (f_2''(x) + p(x)f_2'(x) + q(x)f_2(x)) = 0$ e portanto $\alpha f_1 + f_2$ é também solução.

Desafio 9. (c) $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$..

B.3.4 Extras

Subespaços do $\mathbb{R}^n$

Extra 1. (a) sim; (b) LI para $k \neq 1$ e $k \neq -2$. (c) não.

Extra 6. 1ª parte (se): assuma $ad - bc = 0$. Se $a = b = c = d = 0$, então (a, b) e (c, d) são LD. Caso contrário, temos que vale uma das seguintes alternativas: (i) $(a, c) \neq (0, 0)$ e portanto $c(a, b) - a(c, d) = (ca - ac, bc - ad) = (0, 0)$ é combinação linear não-trivial dando zero ou (ii) $(b, d) \neq (0, 0)$ e portanto $d(a, b) - b(c, d) = (da - bc, db - bd) = (0, 0)$ é combinação linear não-trivial dando zero.

2ª parte (somente se): assuma (a, b) e (c, d) LD. Temos que vale uma das seguintes alternativas: (i)$(a, b) = \lambda(c, d)$, isto é, $a = \lambda c$ e $b = \lambda d$, de forma que $ad = \lambda cd = bc$ e $ad - bc = 0$ ou (ii) $(c, d) = \lambda(a, b)$, isto é, $c = \lambda a$ e $d = \lambda b$, de forma que $bc = \lambda ab = ad$ e $ad - bc = 0$.

LI e LD: teóricos

Extra 7. $\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{w}_3 = \alpha_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1) + \alpha_2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \alpha_3(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) = (2\alpha_1 + \alpha_2 +$

$\alpha_3)\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, se, e somente se, $\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_3 & = & 0 \end{cases}$, se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Extra 9. (a) Decorre trivialmente do resultado de que um conjunto é LD se e só se existe um vetor que é combinação linear dos demais. (b) Decorre trivialmente de (a).

Extra 10. Lembre que um conjunto é LD se e só se existe um vetor que é combinação linear dos anteriores. No conjunto $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, este não é o caso de nenhum dos $n-1$ primeiros vetores, dado que eles formam um conjunto LI. Também não é o caso do n-ésimo vetor, por (b). Logo $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ não é LD.

Espaços de Funções ou Polinômios

Extra 12. (a) sim; (b) sim; (c) não (basta notar que $f(x) \equiv 0$ não pertence ao conjunto); (d) sim.

Extra 13. (a) sim; (b) sim;

Extra 15. (b) Prove que qualquer polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ pode se expresso como combinação de elementos de β.

B.4 Transformações Lineares

B.4.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1. (a) $\mathbf{0}$; (b) V; (c) V; (d) $\mathbf{0}$.

Exercício 2. (a) não; (b) sim; (c) não; (d) sim; (e) não.

Exercício 3. (i) (C); (ii) (A); (iii) (D); (iv) (C).

Exercício 4. (a) 7; (b) 4; (c) 2;

Exercício 5. (a) 2; (b) 5;

Exercício 6. (a) 2; (b) 0;

Exercício 7. (a) falsa; (b) verdadeira; (c) falso; (d) verdadeiro. (e) falso, $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = 0$.

Exercício 8. $3x - 4, \;\; 5$.

B.4.2 Problemas

Problema 1. (a) Não. (b) sim; (c) não.

Problema 2. (a) Resolvendo o sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ achamos o núcleo. Escalonando totalmente a matriz obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. São 3 variáveis, 2 equações: $3 - 2 = 1$ variável livre. Como a coluna sem pivô é a terceira, colocamos z como variável livre. São dependentes x e y. Colocando $z = r$, $x = -z = -r$ e $y = -z = -r$. Logo, $(x, y, z) = (-r, -r, r) = r(-1, -1, 1)$. Logo o núcleo tem dimensão 1 e base $\{(-1, -1, 1)\}$.

[0] 19.jul.2008 16h

Pelo TNI, dimensão da imagem é $3 - 1 = 2$. Para calcular a base montamos a matriz com $T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$ nas linhas: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Escalonando (parcialmente, não precisa ser totalmente escalonada), $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Logo a imagem tem dimensão 2 e base $\{(1, 0, -1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$.

(b) Resolvendo o sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ achamos o núcleo. Escalonando totalmente a matriz obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$. São 3 variáveis, 2 equações: $3 - 2 = 1$ variável livre. Como a coluna sem pivô é a terceira, colocamos z como variável livre. São dependentes x e y. Colocando $z = r$, $x = -z/2 = -r/2$ e $y = -z/2 = -r/2$. Logo, $(x, y, z) = (-r/2, -r/2, r) = r(-1/2, -1/2, 1)$. Logo o núcleo tem dimensão 1 e base $\{(-1/2, -1/2, 1)\}$.

Pelo TNI, dimensão da imagem é $3 - 1 = 2$. Para calcular a base montamos a matriz com $T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$ nas linhas: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Escalonando (parcialmente, não precisa ser totalmente escalonada), $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Logo a imagem tem dimensão 2 e base $\{(1, 2, 0), (0, 2, 2)\}$.

(c) Resolvendo o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ achamos o núcleo. Escalonando totalmente a matriz obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. São 5 variáveis, 2 equações: $5 - 2 = 3$ variáveis livres. Como são colunas com pivô primeira e terceira, a e c são dependentes. São livres: b, d, e. Colocando $b = r, d = s, e = t$, $a = -3d + 4e = -s + t$, $c = d - e = s - t$. Logo, $(a, b, c, d, e) = (-3s + 4t,\ r,\ s - t,\ s,\ t)$ $= r(0, 1, 0, 0, 0) + s(-3, 0, 1, 1, 0) + t(4, 0, -1, 0, 1)$. Logo o núcleo tem dimensão 3 e base $\{(0, 1, 0, 0, 0), (-3, 0, 1, 1, 0), (4, 0, -1, 0, 1)\}$.

Pelo TNI, dimensão da imagem é $5 - 3 = 2$. Para calcular a base montamos a matriz com $T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$ nas linhas: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Escalonando (parcialmente, não precisa ser totalmente escalonada), $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Logo a imagem tem dimensão 2 e base $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

Problema 3. (a) $\operatorname{Nuc}(T) = \operatorname{Im}(T) = \mathcal{P}_1$. (b) $\operatorname{Nuc}(T)$ é o conjunto dos polinômios da forma $(x - 3)q(x)$, $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}$.(c) $\operatorname{Nuc}(T) = 0, \operatorname{Im}(T) = \langle x, x^2, x^3 \rangle$ (d) A imagem é $\mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ (sobrejetiva) pois dado $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ defina $h(x) = \int_0^x g(s)\, ds$, pelo teorema fundamental do cálculo $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e $T(h) = g$. O núcleo são funções constantes.

Problema 4. (a) Contradiz o Teo. do Núcleo e da Imagem (dimensão do núcleo só com a origem ($= 0$) mais dimensão da imagem (no máximo $= 2$) é *menor* do que a dimensão do espaço de partida ($= 4$) . Ou, mais intuitivamente, um espaço de dimensão 4 está sendo levado pela TL num espaço de dimensão 2. A imagem portanto tem dimensão no máximo 2. Assim, é preciso que um subespaço de $\mathbb{R}^4$ de dimensão ao menos 2 seja levado (colapse) no 0 pela TL.

(c) Para que a TL seja injetiva, seu núcleo deve ser trivial, ou seja, deve conter apenas o 0 (de $\mathbb{R}^4$). Nesse caso a dimensão do núcleo é 0 (contém apenas um ponto). Mas na TL dada, o nécleo deve ter dimensão pelo menos 2 (vide resposta do item (a)).

(e) Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, dim$(N(T))$+dim$(Im(T)) = 7$. Ora, como a soma de dois números iguais daria um número ímpar? Impossível.

(g) Note que os vetores da base do núcleo são LI (e dim$(N(T)) = 2$), mas que os vetores (1,1,2) e (2,2,4) que geram a imagem são LD, e logo basta um deles para gerar o mesmo espaço (logo dim$(Im(T)) = 1$). Mas aí, novamente, não conseguiríamos satisfazer ao Teo. do Núcleo e da Imagem. Logo não é possível existir tal TL.

Problema 5. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $T(x, y, z, w) = (2x + 2y + z + w, x + y - z + 2w, 4x + 4y + z + 3w)$. Solução: Uma base do núcleo é $(1, 0, -1, -1)$ e $(0, 1, -1, -1)$. Podemos completar esta base, por exemplo, com $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$. Podemos agora determinar completamente T por $T(1, 0, -1, -1) = T(0, 1, -1, -1) = 0$, $T(0, 0, 1, 0) = (1, -1, 1)$ e $T(0, 0, 0, 1) = (1, 2, 3)$.

(c) $T(x, y, z) = (0, 0, -x - y + z, -x - y + z)$ Solução: O núcleo é gerado por $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$. A imagem é gerada por $(0, 0, 1, 1)$. Portanto, $T(1, 0, 1) = T(0, 1, 1) = 0$. Como $(0, 0, 1)$ completa a base do $\mathbb{R}^3$ (entre outras possibilidades), colocamos $T(0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1)$. Agora sabemos T em três vetores da base de uma base do $\mathbb{R}^3$. Portanto podemos determinar que $T(x, y, z) = (0, 0, -x - y + z, -x - y + z)$.

Problema 6. São lineares somente (a) e (c).

Problema 7. Observe o seguinte: Caso 0 não fosse raíz de p, i.e., não houvesse a restrição $p(0) = 0$ sobre os elementos de W, então o núcleo da transformação linear derivada primeira seria somente os polinômios constantes, da forma $p(x) = a$, com $a \in \mathbb{R}$. Mas polinômios dessa forma só satisfazem a restrição $p(0) = 0$ em W quando $a = 0$ (caso contrário teríamos $p(0) = a$, com $a \neq 0$ e daí p não pertenceria a W), donde concluímos que o único polinômio levado no 0 pela TL derivada primeira é o polinômio nulo. Logo D é injetiva.

Problema 8. Funções do primeiro grau: $f(x) = ax + b$, ou seja $\mathcal{P}_1$.

Problema 9. $((T \circ S)(f))(x) = (T(S(f)))(x) = (S(f))(2x+2) = f((2x+2)/2-1) = f(x)$. $\forall x, \forall f$. Isto implica que $(T \circ S)(f) = f$, $\forall f$, o que implica que, $T \circ S = I$.

De forma análoga, mostra-se que $S \circ T = I$.

B.4.3 Desafios

Desafio 1. (b) note que traço de AB é igual ao traço de BA. logo, traço de $AB - BA$ é zero e traço de I é n.

Desafio 5. Defina $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por: $T_1(x, y) = x$ e $T_2(x, y) = y$. Verifique que são LIs. Dada T qualquer defina $a = T(\mathbf{e}_1), b = T(\mathbf{e}_2)$. Então $T(x, y) = xT(\mathbf{e}_1) + yT(\mathbf{e}_2) = aT_1(x, y) + bT_2(x, y)$. Logo $T = aT_1 + bT_2$. A dimensão deste espaço é 2.

Desafio 6. Defina $T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por: $T_{11}(x, y) = (x,\ 0)$, $T_{12}(x, y) = (0,\ x)$, $T_{21}(x, y) = (y,\ 0)$, $T_{22}(x, y) = (0,\ y)$. Verifique que são LIs. Dada T qualquer defina

$(a, b) = T(\mathbf{e}_1), (c, d) = T(\mathbf{e}_2)$. Então $T(x, y) = xT(\mathbf{e}_1) + yT(\mathbf{e}_2) = x(a, b) + y(c, d) = a(x, 0) + b(0, x) + c(y, 0) + d(0, y) = aT_{11}(x, y) + bT_{12}(x, y) + cT_{21}(x, y) + dT_{22}(x, y)$. Logo $T = aT_{11} + bT_{12} + cT_{21} + dT_{22}$. A dimensão deste espaço é 4.

Desafio 7. (a) Como $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) = 4$, o conjunto $\{I, T, T^2, T^3, T^4\}$, que possui 5 elementos, é LD. Portanto existe uma combinação linear não-trivial deles que vale $\mathbf{0}$.

(b) Generalizando o argumento anterior, como $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) = n^2$, o conjunto $\{I, T, T^2, \ldots, T^{n^2}\}$, que possui $n^2 + 1$ elementos, é LD. Portanto existe uma combinação linear não-trivial deles que vale $\mathbf{0}$.

Desafio 9. Seja $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ base de U e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ base de V. Pelo Lema 11 da página 82, para definir $T_{ij} \in \mathcal{L}(U; V)$ basta definir valores nos elementos da base de U. Assim definimos $T_{ij}(\mathbf{u}_k) = \begin{cases} \mathbf{v}_j; & \text{para } i = k; \\ \mathbf{0}; & \text{caso contrário} \end{cases}$. Como $T(\mathbf{u}_k) \in V$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ é base de V, existem $a_{kj} \in \mathbb{R}$ tais que $T(\mathbf{u}_k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{kj}\mathbf{v}_j$. Agora defina $S \in \mathcal{L}(U; V)$ por $S = \displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}T_{ij}$. Agora, $S(\mathbf{u}_k) = \displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}T_{ij}(\mathbf{u}_k) = \sum_{j} a_{kj}\mathbf{v}_j = T(\mathbf{u}_k)$ para todo k. Como S e T são lineares e assumem mesmo valor nos elementos da base, $S \equiv T$. Logo $\{T_{ij};\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$ gera o espaço $\mathcal{L}(U; V)$. Pode-se provar que T_{ij} é LI no espaço das TLs. Como são $nm\ T'_{ij}s$, a dimensão é nm.

Desafio 10. Use o Teorema do Núcleo-Imagem duas vezes.

B.4.4 Extras

Extra 1. (a) 7; (b) 7;

Extra 2. (a) 4; (b) 5.

Extra 3. (a) 3; (b') 0;

Extra 4. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Extra 9.

(a) $T(0) = T(0 + (-1)0) = T(0) + (-1)T(0) = T(0) - T(0) = 0$ (usamos somente a linearidade de T).

(c) Contém o 0, e está fechado pela soma e multiplicação por escalar: Considere $\bar{v}$ e $\hat{v}$ em $N(T)$ (ou seja: $T(\bar{v}) = 0$ e $T(\hat{v}) = 0$), e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $T(\bar{v} + \alpha\hat{v}) = T(\bar{v}) + \alpha T(\hat{v}) = 0 + \alpha 0 = 0$. Logo $N(T)$ é subespaço vetorial.

(d) Vamos usar que, se T é injetiva, o único elemento do núcleo é o 0. Suponha, por exemplo, que $T(v_i) = \lambda T(v_j)$, com $i \neq j$. Então $T(v_i) - \lambda T(v_j) = 0$. Usando a linearidade de T, temos que $T(v_i - \lambda v_j) = 0$. Agora, usando a injetividade de T, concluimos que $(v_i - \lambda v_j) = 0$, ou $v_i = \lambda v_j$. Contradição, pois por hipótese os v_i's eram LI.

(d) (solução alternativa) Seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ LI. Considere a sua imagem por T, $\{T(\mathbf{v}_1), \cdots, T(\mathbf{v}_p)\}$. Para discutir a independência linear deste conjunto, devemos verificar quando $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$. Mas, por linearidade, $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i T(\mathbf{v}_i) = T\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i\right)$ e $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Da injetividade de T, segue que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, o que, pela independência dos $\mathbf{v}_i$'s, implica em α_i's todos nulos. Mas isto garante a independência de $\{T(\mathbf{v}_1), \cdots, T(\mathbf{v}_p)\}$.

(e) Seja V de dimensão n e seja $\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base de V. Então, pelo exercício anterior, $T(\beta) = \{T(\mathbf{v}_1), \cdots, T(\mathbf{v}_n)\}$ é um conjunto LI. Mas um conjunto de n vetores LI em um espaço de dimensão n é uma base.

Extra 10. Todas as operações são lineares.

Extra 11. Como $T(\alpha p+q)(x) = x(\alpha p(x)+q(x)) = \alpha xp(x)+xq(x) = (\alpha T(p)+T(q))(x)$, concluimos que é linear.

Se $T(p) = T(q)$ então $T(p)(x) = xp(x) = T(q)(x) = xq(x)$ para todo x. Logo $p(x) = q(x)$ para todo x diferente de zero. Como polinômios são funções contínuas, $p(x) = q(x)$ para todos x (incluindo o zero) e portanto $p = q$. Concluimos que é injetiva.

Extra 12. É linear somente (a).

Extra 13. (a) T não é, S é. (b) $\mathrm{Nuc}(S) = \mathbf{0}$. S é sobrejetiva: de fato, dado h defina $f(x) = h(x-1)$ e $S(f)(x) = h(x+1-1) = h(x)$.

B.5 Matrizes

B.5.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1. (a) e (c) somente.

Exercício 2. $A^2+AB+BA+B^2$.

Exercício 3. $\mathrm{Im}(T_A)$.

Exercício 4. (a) 0; (b) n.

Exercício 5. (a) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $T(x,y) = (x,\ 3x)$; (d) $T(x,y) = (-y,\ 8x+3y)$.

Exercício 6. (a) colunas; (b) linhas;

Exercício 7. (a) das colunas de A; (b) das linhas de B; (c) linhas de A por colunas de B;

Exercício 8. n é dimensão do domínio e m do contradomínio. (a) Falso. Por exemplo, tome uma matriz $m\times n$ com todas as entradas iguais a 0; (b) verdadeiro pois se a dimensão do domínio é maior do que a do contra-domínio então $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) > 0$.

B.5.2 Problemas

Núcleo e Imagem e Inversa em $\mathbb{R}^n$

Problema 1. (a) Núcleo=$\mathbf{0}$, com, dimensão 0, Imagem=$\langle(1,2,0,-1),(0,0,1,-2)\rangle$, com dimensão 2.

(b) Núcleo=$\langle(2,-1,1,0),(0,0,0,1)\rangle$, com dimensão 2. Imagem=$\langle(1,0,-1),(0,1,1)\rangle$ com dimensão 2.

(c) Núcleo=$\langle(1,-1,1)\rangle$ com dimensão 1, Imagem=$\langle(1,0,1,0),(0,2,-1,1\rangle$ com dimensão 2.

(d) Núcleo=$\langle(1,0,1,0),(0,1,0,1)\rangle$ com dimensão 2, Imagem=$\langle(1,0,1),(0,1,1)\rangle$ com dimensão 2.

Problema 2. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

[0] 28.jul.2008 11h

Problema 3. $[T]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$([T]_\varepsilon)^{-1} = [T^{-1}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$

Problema 4. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ -1/5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/5 \end{bmatrix}$

Problema 5. (a) $\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix}$

Problema 6. $S^2 = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

Geometria e TLs

Problema 7. (a) r; (b) $\mathbf{0}$; (c) $PP = P$; (d) $RR = I$; (e) $RP = P$; (f) $PR = P$; (g) $P^n = P$ e $R^{2k} = I$; $R^{2k+1} = R$.

Problema 8. Núcleo: $(0, 1, 0)$ e Imagem: $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$

Mudança de bases

Problema 9. (a) $[I]_{\varepsilon \leftarrow \alpha} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $[I]_{\alpha \leftarrow \varepsilon} = [I]^{-1}_{\varepsilon \leftarrow \alpha}$.

(c) Basta verificar que $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -11/2 & 3 \end{bmatrix} [I]_{\varepsilon \leftarrow \alpha} = I$.

Problema 10. (a) $[I]_{\varepsilon \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ cuja inversa é $[I]_{\beta \leftarrow \varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$; (c) $[\mathbf{w}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$; (d) $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 11. (a) A resposta não é única. Por exemplo, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ (b) Um não é múltiplo do outro, portanto são dois vetores LI em $\mathbb{R}^2$. (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Problema 12. Para ambos itens, a matriz identidade.

Problema 13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$

Problema 14. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 15. Se $p = 1$, $S(p)(x) = xp(x) = x1 = x$ e $[x]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, se $p = x$, $S(p)(x) = xp(x) = xx = x^2$ e $[x^2]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Logo, $[S]_{\beta_2 \leftarrow \beta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

B.5.3 Desafios

Desafio 1. $BA^2 = (BA)A = I$, logo A é invertível e $A^{-1} = BA$.

Desafio 5. (a) Note que $T(I) = IB - BI = B - B = 0$, independentemente de B. Logo, $I \in \mathrm{Nuc}(T)$. (b) 1ª parte (se): suponha que B possui inversa. Seja $A \in \mathrm{Nuc}(S)$. Então $S(A) = BA = 0$. Multiplicando-se por B^{-1} dos dois lados, $A = B^{-1}BA = B^{-1}0 = 0$. Logo $\mathrm{Nuc}(S) = \{0\}$. 2ª parte (somente se): suponha que B não possui inversa. Logo existe $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $B\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Seja $A = [\mathbf{v} \cdots \mathbf{v}]$. Então $S(A) = BA = 0$ e $0 \neq A \in \mathrm{Nuc}(S)$.

Desafio 6. (a) Há infinitas respostas. Por exemplo, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. (b) Neste caso $AB = AC \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AB = A^{-1}AC \quad \Rightarrow \quad B = C$.

Desafio 7. (a) não; (b) $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$.

Desafio 8. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

B.5.4 Extras

Núcleo e Imagem e Inversa em $\mathbb{R}^n$

Extra 1. (a) Núcleo=$\langle(1, -1, 1)\rangle$ com dimensão 1, Imagem=$\langle(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1)\rangle$ com dimensão 2.

(b) Núcleo é $x + z = 0$ e $y + z = 0$, cuja dimensão é 1, gerado por $(1, 1, -1)$, imagem é $\langle(1, 0, 2, 3), (0, 1, -2, -2)\rangle$, dimensão 2.

(c) Núcleo é o plano xw, $y = z = 0$, com dimensão 2. Imagem é $\langle(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$ com dimensão 2.

Extra 2. (a) Ponha a matriz na forma escalonada (não precisa ser reduzida). Para que o posto seja 1, precisamos de apenas 1 pivot. Logo $5 - 2h = 0$, ou $h = \frac{5}{2}$.

(b) Ponha a matriz na forma escalonada (não precisa ser reduzida). Para que o posto seja 2, precisamos de 2 pivots. Logo $5 - 2h \neq 0$, ou $h \in \mathbb{R}, h \neq \frac{5}{2}$.

Extra 3. (a) $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$;

Extra 4. $[T]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$([T]_\varepsilon)^{-1} = [T^{-1}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Geometria e TLs

Extra 5. Dica: Qual a reflexão dos vetores da base canônica com relação a esta reta? R: $T(x, y) = (-y, -x)$.

Extra 7. (a) $PQ = 0$. (b) $QP = 0$. (c) $QR = -Q$; (d) $RQ = -Q$;

Matrizes

Extra 9. (a) sim;

(b) sim;

(c) sim.

(d) Defina A_{ij} a matriz que todas entradas são zero menos $a_{ij} = 1$.

Para matriz 2×2: Base de triangular superior: A_{11}, A_{12}, A_{22}. Base de diagonal: A_{11}, A_{22}. Base de simétrica: $A_{11}, A_{12} + A_{21}, A_{22}$. $a_{ij} = 1$.

Para matriz 3×3: Base de triangular superior: $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{22}, A_{23}, A_{33}$. Base de diagonal: A_{11}, A_{22}, A_{33}. Base de simétrica: $A_{11}, A_{12} + A_{21}, A_{13} + A_{31}, A_{22}, A_{23} + A_{32}, A_{33}$.

Extra 11. (a) Defina $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então $\{A_{11}, A_{12}, A_{13}A_{21}, A_{22}, A_{23}\}$ é base (representação única) pois

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

A dimensão é 6.

(b) Defina $A_{kl} = (a_{ij})$ uma matriz com zeros em todas as entradas menos $a_{kl} = 1$ (veja item (a)). O conjunto $\{A_{kl};\ 1 \leq k \leq m;\ 1 \leq l \leq n\}$ é base de $\mathcal{M}_{m\times n}$ e a dimensão é mn.

Extra 13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Extra 14. (a) $\mathrm{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{M}_{n\times n}$. (b) T é bijetiva (injetiva e sobrejetiva).

Extra 16. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

Extra 17. (b) $k = 3$; (c) $k = n + 1$; (d) Basta fazer a conta $(I - N)(I + N + N^2 + N^3 + \cdots + N^{k-1}) = I + N + N^2 + N^3 + \cdots + N^{k-1}\ -N(I + N + N^2 + N^3 + \cdots + N^k) = I + N + N^2 + N^3 + \cdots + N^{k-1}\ -N - N^2 - N^3 - \cdots - N^n - N^k = I - N^k$. Como $N^k = 0$, $(I - N)(I + N + N^2 + N^3 + \cdots + N^{k-1}) = I$.

Mudança de bases

Extra 18. $[I]_{\alpha\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Extra 20. A base β são as colunas da matriz $[I]_{\varepsilon\leftarrow\beta} = [I]_{\varepsilon\leftarrow\alpha}[I]_{\alpha\leftarrow\beta}$. Como $[I]_{\varepsilon\leftarrow\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ obtemos que $\beta = \{(-1, 3, 3), (1, -1, -1), (-1, 0, 2)\}$.

Extra 21. $\begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Extra 22. $[I]_{\beta\leftarrow\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Extra 23. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Extra 24. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Extra 26. Se $p = 1$, $T(p)(x) = p(x+1) = 1$ e $[1]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, se $p = x$, $T(p) = p(x+1) = x + 1$ e $[x+1]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, se $p = x^2$, $T(p)(x) = p(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ e $[x^2 + 2x + 1]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Logo $[T]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

B.6 Determinantes

B.6.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1. (a) V: (b) F, pode ser uma múltipla da outra; (c) F, $\det(B) = -\det(A)$.

Exercício 2. (a) -2; (b) $-1/2$; (c) -32.

Exercício 3. (a) pode ser $=$ (se $A = B = 0$) ou $\neq$ (se $A = B = I$); (b) $=$; (c)-30.

Exercício 4. (a) 0; (b) $4!$.

Exercício 5. (a) 14; (b) 21; (c) -7; (d) 56.

Exercício 6. (a) uma única solução; (b) uma única solução; (c) nenhuma ou infinitas soluções; (d) infinitas soluções;

Exercício 7. (a) múltiplo de; (b) pertence ao plano gerado por v e w; (c) LDs; (d) LDs.

Exercício 8. (a) $\neq 0$; (b) $= 0$; (c) $\neq 0$.

Exercício 9. (a) $\neq 0$; (b) $= 0$; (c) 4; (d) < 4.

Exercício 10. $\mathbf{v}$ é solução não-trivial de $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Logo, $\det(A - \lambda I) = 0$.

B.6.2 Problemas

Problema 1. (a) λ^n; (b) $\lambda^n \det(A)$.

Problema 2. $\det(A) - (-4) = \det(B) = -36$. Logo, $\det(A) = 9$.

Problema 3. (a) -16; (b) 12.

Problema 4. (a) -1 e 6; (b) usando matriz em blocos, $1, 2, 3$.

Problema 5. 4π.

Problema 6. 62.

---

[0]Versão 28.julho.2008 06h

Problema 7. -1.

Problema 8. (a) Troque l_1 com l_4 e l_2 com l_3. Agora a matriz resultante é diagonal e o determinante é o mesmo que de M pois foram duas trocas. Assim o determinante é o produto dos elementos da diagonal da nova matriz: $abcd$. (b) $(-1)^{(n+1)}$.

Problema 9. O fator $1/(ad-bc)$ sai do determinante como $1/(ad-bc)^2$ pois A é 2×2, obtendo o resultado correto: $\det(A^{-1}) = (ad-bc)/(ad-bc)^2 = ad-bc$.

Problema 10. (a) $(9-8)(14-1) = 13$; (b) $(9-8)(-1) = -1$.

B.6.3 Desafios

Desafio 1. (e) Seja $\mathbf{v} = \sum v_i e_i$, $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = \sum w_i v_i = \sum \det\left[\ \mathbf{u}\ \middle|\ \mathbf{v}\ \middle|\ \mathbf{e}_i\ \right] v_i =$ (pela linearidade do determinante) $\det\left[\ \mathbf{u}\ \middle|\ \mathbf{v}\ \middle|\ \sum v_i e_i\ \right] = \det\left[\ \mathbf{u}\ \middle|\ \mathbf{v}\ \middle|\ \mathbf{v}\ \right] = 0$.

Desafio 3. (a) Subtraia a primeira linha das outras e reduza a determinante 2×2. Considere $v=(x,y)$ O determinante é zero se, e somente se, os vetores $v_1 - v$ e $v_2 - v$ são colineares. (b) Semelhante a letra (a), o determinante é zero se, e somente se, os vetores $v_1 - v$, $v_2 - v$ e $v_3 - v$ são coplanares.

Desafio 4. (a) Subtraia linhas e reduza a determinante 2×2;

Desafio 10. Aplicando a algoritmo de cálculo com eliminação de Gauss, somente racionais entrarão em cada etapa, inclusive na final, no produto de elementos da diagonal.

Desafio 11. Cada coluna é um vetor cujo máximo da norma é $\sqrt{k^2+\cdots+k^2} = k\sqrt{n}$. O máximo volume é o produto do comprimento de cada aresta.

Desafio 14. Adicione todas as colunas da primeira. Se a matriz é $n\times n$, o determinante é $(x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$.

Desafio 16. (a) Mostrar que 3 não é suficiente é fácil. Para mostrar que é 4 coloque-os na mesma linha ou coluna. (b) n.

B.6.4 Extras

Extra 1. (a) $-3\cdot 2^n$; (b) $-3\cdot 3^n$; (c) $(-3)^5/3^n$;

Extra 2. (a) 2; (b) 2; (c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Extra 3. (a) não possui; (b) nada podemos afirmar.

Extra 4. Não. Para preservar área, basta que $\det T = 1$. Considere $T(x,y) = (x/2, 2y)$. Embora $\det T = 1$, comprimentos na direção x são reduzidos à metade, na direção y duplicados.

Extra 6. $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Como C é um cubo de aresta 3, $\operatorname{vol}(C) = 3^3 = 27$. Logo, $\operatorname{vol}(T(C)) = \det(T)\operatorname{vol}(C) = (2)(27) = 54$.

Extra 7. $T(x,y,z) = (ax,by,cz)$ e $B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$. Logo $\operatorname{vol}(E) = \operatorname{vol}(T(B)) = \det(T)\operatorname{vol}(B) = (abc)(4/3\pi)$.

Extra 9. (a) 2 e 5;

Extra 10. Se $x = \det(A)$ então $x^2 = x$; raízes são 0 ou 1.

Extra 11. Calculando o determinante dos dois lados concluímos que A é invertível. Multiplicando os dois lados por A^{-1} concluimos que $B = A^{-1}$. Dai segue o resultado.

Extra 12. Se $x = \det(A)$ então $x^k = 1$; raíz 1 se k par, 1 e -1 se k impar.

Extra 13. (a) Como $n = 3$, $\det(-I) = -1$ e $\det(A^2) = \det(-I) = -1 = \det(A)^2$. Logo $\det(A) = \pm i$, o que é impossível para uma matriz com entradas reais. (b) basta fazer a conta.

Extra 14. Se $x = \det(S)$ então $x = (-1)^n x$; se n é impar obtemos $x = -x$, o que implica $x = 0$.

Extra 15. Se $x = \det(N)$ então $x^k = 0$; raíz 0. Logo $\det(N) = 0$, o que implica que N não é invertível.

Extra 16. Se $x = \det(Q)$ então $x^2 = 1$; raízes são 1 ou -1.

Extra 19. Troque as linhas de cima com a debaixo. O determinante é o mesmo a menos de sinal. Como todas são do mesmo tamanho, o sinal final é o mesmo. A matriz agora será bloco triangular da forma $\begin{bmatrix} A & 0 \\ X & I \end{bmatrix}$, com determinante igual a $\det(A)$.

Extra 20. Como $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.

Extra 21. $\det(A) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) = \det(D)$ pois $\det(P)\det(P^{-1}) = \det(PP^{-1}) = \det(I) = 1$. Como D é diagonal, $\det(D) = n!$ (produto dos elementos da diagonal). Como $\det(A^k) = (\det(A))^k = (n!)^k$.

Extra 22. (a) de forma geral não; (b) sim; (c) sim.

Extra 23. Sim, pois se $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$ então $\det(A) \neq 0$, o que implica que A é invertível.

Extra 24. Troque as linhas até resultar numa matriz diagonal. Dependendo se a matriz possui número par ou impar de linhas, o determinante possuirá o mesmo sinal ou sinal trocado.

Extra 25. Cada operação elementar altera o sinal (que continuará zero) ou multiplicará por constante (que manterá determinante zero).

B.7 Autovalores, Autovetores e Diagonalização

B.7.1 Exercícios de Fixação

Autovalores e Autovetores

Exercício 1. (a) 2; (b) 3. (c) não é;

Exercício 2. (a) Falso pois para ser autovalor o autovetor tem que ser não-nulo; (b) Falso pois autovetor tem que ser não-nulo.

Exercício 3. (a) Falso, rotações em $\mathbb{R}^2$. (b) Verdadeiro, autovalor 0. (c) Verdadeiro, pois como 0 não é autovalor a matriz A é invertível.

Exercício 4. 9.

Exercício 5. (a) $= 0$; (b) $= 0$; (c) > 0;

Exercício 6. é.

Exercício 7. (a) talvez; (b) sim.

Exercício 8. (a) R, P; (b) R; (c) P; (d) U.

Exercício 9. (a) 0; (b) todos os vetores não-nulos.

Exercício 10. (a) 3; (b) 0; (c) 1.

---

[0]Versão 28.jul.2008 19h

Diagonalização

Exercício 11. (a) verdadeiro. (b) falso, pode ser diagonalizável; Um exemplo com somente um autovalor é a matriz identidade, cujo único autovalor é 1 e é diagonalizável.

Exercício 12. não é.

Exercício 13. (a) $-1, 1, 2$; (b) pode ser diagonalizada; distintos; formam uma base.

B.7.2 Problemas

Autovalores e Autovetores

Problema 1. (a) sim; (b) não; (c) não; (d) sim;

Problema 2. (a) Não; (b) Sim com autovalor 0 (zero).

Problema 3. $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base. $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 10 \\ -30 \end{bmatrix}$, por exemplo, são autovetores distintos.

Problema 4. (a) autovalor -5 com autoespaço $\langle(-1,1)\rangle$ e autovalor 9 com autoespaço $\langle(1,1)\rangle$. (b) autovalor 3 com autoespaço $\langle(1,0,0)\rangle$, autovalor 2 com autoespaço $\langle(0,-2,1)\rangle$, e autovalor 1 com autoespaço $\langle(0,-1,1)\rangle$. (c) autovalor 1 com autoespaço $\langle(1,0,0,-1)\rangle$ e autovalor 0 com autoespaço $\langle(0,1,0,0)\rangle$.

Problema 5. (a) autovalor 3 com autoespaço $\langle(1,0)\rangle$; (b) autovalor -1 com autoespaço $\langle(1,0,0)\rangle$, autovalor 1 com autoespaço $\langle(1,0,1),(0,1,-1)\rangle$.

Problema 6.

$$
\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c|c} A-5I & \mathbf{0} \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & -2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h-6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\
(\text{se } h=6) &\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\
(\text{se } h\neq 6) &\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Autoespaço bidimensional $\Leftrightarrow$ duas variáveis livres $\Leftrightarrow$ $h = 6$.

Problema 7. Autovetor $\mathbf{v}$ com autovalor: (a) λ^2;

(b) $1/\lambda$; De fato, seja $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ autovetor associado ao autovalor λ. Então $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Como A é invertível, podemos multiplicar à esquerda por A^{-1} ambos os lados da equação, produzindo $A^{-1}A\mathbf{v} = \mathbf{v} = A^{-1}\lambda\mathbf{v} = \lambda A^{-1}\mathbf{v}$. Como $\lambda \neq 0$ (pois a matriz é invertível), podemos dividir tudo por lambda e obter $A^{-1}\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{v}$.

(c) $\mu\lambda$;

(d) $a\mu + b\lambda$;

Problema 8. (a) Como $T(1,-2) = -1/2(1,-2) = (-1/2, 1)$ e $T(0,1) = 2(0,1) = (0,2)$.

Como $(1,0) = (1,-2) + 2(0,1)$, $T(1,0) = (-1/2, 5)$. Portanto, $[T]_\varepsilon = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Logo $T(x,y) = (-x/2, 5x + 2y)$

(b) $T(1,-1,1) = 3(1,-1,1)$, $T(1,0,1) = 3(1,0,1)$ e $T(0,1,1) = 0$. Desenvolvendo estes dados obtemos que $T(x,y,z) = 3x, 3x+3y-3z, 3x)$.

Problema 9. (a) como o núcleo é uma reta, 0 é autovalor também, resultando em três autovalores distintos, o que é impossível em dimensão 2;

(b) pelo teorema do núcleo-imagem T deve ser injetiva também, implicando que 0 não pode ser autovalor;

(c) como $(5,7,9) = (1,2,3) + (4,5,6)$, $T(5,7,9) = T(1,2,3) + T(4,5,6) = (1,2,3) + 2(4,5,6) = (9,12,15) \neq 3(5,7,9)$;

Problema 10. (a) 0 e 1; $\dim \operatorname{Nuc}(T) = 1$, $\dim \operatorname{Nuc}(T+I) = 0$, $\dim \operatorname{Nuc}(T-I) = 2$.

(b) 1 e -1. $\dim \operatorname{Nuc}(T) = 0$, $\dim \operatorname{Nuc}(T+I) = 1$, $\dim \operatorname{Nuc}(T-I) = 2$.

Problema 11. (a) $(2,4,2)$; (b) 1 pois a imagem tem pelo menos dimensão 2, igual a dimensão do autoespaço.

Problema 12. O eixo será um autovetor associado ao autovalor 1: $(-1,1,-1)$.

Problema 13. (a) $f(s) = \exp(-9s)$; (b) $f(s) = \operatorname{sen}(3s)$ e $f(s) = \cos(3s)$.

Diagonalização

Problema 14. Os autovalores são as entradas de D, ou seja, 1 e 2.

Uma base para o autoespaço associado ao autovalor 1 é obtida tomando-se as colunas de M associadas ao autovalor 1: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Da mesma forma, uma base para o autoespaço associado ao autovalor 2 é obtida tomando-se as colunas de M associadas ao autovalor 2: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Problema 15. (a) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - (-1))(\lambda - 1)$.

O autoespaço associado ao autovalor -1 é o conjunto-solução de $\left[\, A - (-1)I \mid \mathbf{0} \,\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Uma base é $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

O autoespaço associado ao autovalor 1 é o conjunto-solução de $\left[\, A - I \mid \mathbf{0} \,\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \end{array} \right]$. Uma base é $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$.

Assim, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

(b) Autovalores: 0 e 1, com polinômio característice $\lambda(1-\lambda)^2$. Associado ao autovalor 0 o sistema $\left\{ \begin{array}{r} x = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right.$, com autoespaço gerado por $(0,1,-1)$; associado ao autovalor 1 o sistema $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$ com autoespaço gerado por $(0,0,1)$. Portanto NÃO existe base de autovetores (soma das dimensões dos autoespaços é 2 e não 3) e não é diagonalizável;

(c) Autovalores: 2 e 4, com polinômio característico $(4-\lambda)(2-\lambda)^2$. Associado ao autovalor 2 o sistema $\left\{ \begin{array}{r} x - y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$, com autoespaço gerado por $(1,1,0)$; associado ao autovalor 4 o sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ com autoespaço gerado por $(0, 0, 1)$. Portanto NÃO existe base de autovetores (soma das dimensões dos autoespaços é 2 e não 3) e não é diagonalizável;

(d) Autovalores: 1 e -1, com polinômio característico $(1-\lambda)^3(1+\lambda)$. Associado ao autovalor 1 o sistema $\{\ y - z = 0$, com autoespaço gerado por $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$; associado ao autovalor -1 o sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ com autoespaço gerado por $(0, 1, -1, 0)$. Portanto existe base de autovetores (soma das dimensões dos autoespaços é 4) e é diagonalizável. Tome $\beta = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0)\}$ e $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} -1.$

Problema 16. Associado ao autovalor 0, $(1, -1, 0)$, associado ao autovalor 1 o espaço gerado por $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. (a) Logo $\beta = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, -1, 0)\}$. ou $\beta = \{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$; (b) $\gamma = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Problema 17. (a) Não, A é necessariamente diagonalizável pois a soma das dimensões dos autoespaços é 4. (b) T não é diagonalizável pois a soma das dimensões dos autoespaços é 4 que é menor que 5.

Problema 18. (a) $P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$; (b) matriz diagonal $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & n \end{bmatrix}$.

Problema 19. $A^8 = PD^8P^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3826 & -8925 \\ 1530 & -3569 \end{bmatrix}$$

Problema 20. (a) $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, -5, 1)$. (b) Seja $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ e $Y = D^{99} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{99} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{99} \end{bmatrix}$, $A^{99} = XYX^{-1}$

Problema 21. Autovalor 1 com autovetor $(1, 1)$, autovalor 2 com autovetor $(0, 1)$. Assim tomando $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. $A^{10} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{bmatrix}$.

Problema 22. $A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

Problema 23. Diagonalize A e determine $B = P\sqrt{D}P^{-1}$. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Problema 24. (a) autovalor $1/2$ com autovetor $(-1, 1)$ e autovalor 1 com autovetor $(1, 3/2)$. Definindo $A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1/2 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{bmatrix}$, calculamos $P^{-1} =$

$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Logo, $A = PDP^{-1}$.

(b) Como $\begin{bmatrix} r_{10} \\ m_{10} \end{bmatrix} = A^{10}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, calculamos

$$A^{10} = P\begin{bmatrix} 1/2^{10} & \\ & 1 \end{bmatrix}P^{-1} = \frac{1}{5\cdot 2^{10}}\begin{bmatrix} 2051 & 2046 \\ 3069 & 3074 \end{bmatrix}.$$

Logo $r_{10} = 4097/10240 \approx 40\%$.

(c) Como $\lim_{k\to\infty} A^k = P\begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$. Logo, se inicialmente são r_0 republicanos e m_0 monarquistas, serão $0.4(r_0+m_0)$ republicanos e $0.6(r_0+m_0)$ monarquistas, isto é, 40% republicanos e 60% monarquistas independente do valor de r_0 e m_0.

B.7.3 Desafios

Autovalores e Autovetores

Desafio 1. Autovalores são $a+b$ e $a-c$.

Desafio 2. 0 e traço de A.

Desafio 3. Indução.

Desafio 4. (b) Fatore (utilizando o Teorema Fundamental da Álgebra) o polinômio característico em $(\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$ e coloque $\lambda = 0$.

Desafio 5. (b) uma rotação de $90°$ no plano.

Desafio 11. 1 com autoespaço gerado por:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Desafio 12.

Se tivesse, $Tf = \lambda f$, derivando os dois lados, $\lambda f' = f$ e portante f seria uma exponencial mas como $(Tf)(0) = \int_0^0 f(s)\,ds = 0$, $f \equiv 0$.

Diagonalização

Desafio 13. (a) autovalor $1/2(1+\sqrt{5})$ com autovetor $1/2(1+\sqrt{5},1)$ autovalor $1/2(1-\sqrt{5})$ com autovetor $1/2(1-\sqrt{5},1)$. Definindo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & \\ & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}$ e $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calculamos $P^{-1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{5}-1 \\ -1 & \sqrt{5}+1 \end{bmatrix}$. Logo, $A = PDP^{-1}$.

(b) como $1/2(1-\sqrt{5}) \approx -0.61$, $\lim_{k\to\infty}(1/2(1-\sqrt{5}))^k = 0$. Assim, de forma aproximada, $D^{50} = \frac{1}{2^{50}}\begin{bmatrix} (1+\sqrt{5})^{50} & \\ & 0 \end{bmatrix}$. Definindo $\phi = 1+\sqrt{5}$, colocando ϕ^{50} em evidência, e efetuando obtemos

$$A^{50}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = PD^{50}P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \frac{\sqrt{5}\phi^{50}}{10\cdot 2^{50}}\begin{bmatrix} \phi & 1-\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{5}-1 \\ -1 & \phi \end{bmatrix}.$$

Efetuando obtemos,

$$A^{50}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \frac{\sqrt{5}\phi^{50}}{10\cdot 2^{50}}\begin{bmatrix} \phi\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} = \frac{\phi^{50}}{2^{51}}\begin{bmatrix} \phi \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $x_{52} \approx (\phi/2)^{51} \approx (1.61)^{51}$.

(c) do item anterior, $x_{k+1} \approx (\phi/2)^k$.

Desafio 14. (a) O único autovalor possível é 0 senão $N^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v} \neq 0$. (b) Portanto $D = 0$ e teriamos que ter, se fosse diagonalizável, $N = PDP^{-1} = 0$.

Desafio 18. Escreva $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ e faça contas.

Desafio 21. (b) $\begin{bmatrix} 3-2e & 6-6e \\ e-1 & 3e-2 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 1 & e \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & e & 1 \\ 1 & 1 & e \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

B.7.4 Extras

Autovalores e Autovetores

Extra 1. (a) $2 \pm i$; (b) $0, (0,0,1)$, $1, (1,0,0)$ e $-1, (1,1,1)$.

Extra 4. (a) $\lambda = 0$ com com $(1,0)$; (b) não possui autovalores reais; (c) $\lambda = 2$, $(1,0,0)$;

Extra 5. Como $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, $\det(A - 0I) = \det(A) = p(0) = 4$.

Extra 7. (a) $(1,-1,1,0) = -(0,1,-1,1)+(1,0,0,1)$ e portanto pertence ao núcleo também; não pode estar associado ao autovalor -3;

(b) como $(1,0,1)$ pertence ao plano $x - y + z = 0$, $T(1,0,1) = -(1,0,1) \neq (0,1,0)$.

Extra 8. (a) autovalor 0 na direção $(1,2,-1,1)$ e autovalor 1 no hiperplano perpendicular a $(1,2,-1,1)$.

(b) autovalor 1 na direção $(1,1,-1)$.

Extra 9. (a) 0 e 1. $\dim \operatorname{Nuc}(T) = 1$, $\dim \operatorname{Nuc}(T + I) = 0$, $\dim \operatorname{Nuc}(T - I) = 1$.

(b) 1 e -1. $\dim \operatorname{Nuc}(T) = 0$, $\dim \operatorname{Nuc}(T + I) = 2$, $\dim \operatorname{Nuc}(T - I) = 1$.

Extra 10. (a) $\det(PBP^{-1}) = \det(B)\det(P)\det(P^{-1}) = \det(B)$;
(b) $A^3 = PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)BP^{-1} = PB(I)B(I)BP^{-1} = PBBBP^{-1}$. (c) o polinômio característico é o mesmo pois $\det(B - \lambda I) = \det(PAP^{-1} - \lambda I) = \det(PAP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = \det(P(A - \lambda I)P^{-1}) = \det(P)\det(A - \lambda I)\det(P^{-1}) = \det(A - \lambda I)$. (d) $w = P^{-1}v$. (e) segue do fato de possuirem o mesmo polinômio característico.

Extra 12. (b) $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT\mathbf{u} + bT\mathbf{v} = a\lambda_u\mathbf{u} + b\lambda_v\mathbf{v} = \lambda_u(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}\lambda_v/\lambda_u)$

Extra 13. (a) e^x e e^{-x}; (b) $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$.

Extra 14. 1 com autoespaço gerado por x e $x^2 + 1$.

Extra 15. Autovalores reais somente podem ser 1, -1 e 0.

Extra 16. (a) Seguindo a sugestão, "$\sum_{j=1}^n a_{ij} = s, \ \ i = 1, 2, \ldots, n$" equivale a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ \vdots \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto s é autovalor.

(b) 0 autovalor pois a matriz é singular. 6 é autovalor pelo item anterior.

Diagonalização

Extra 17. $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Outra opção é ($A$ não é única) tomar $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Extra 19. (a) $\begin{bmatrix} 0 & \star \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $\star \in \mathbb{R}$. (b) $\begin{bmatrix} 1 & \blacksquare \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $0 \neq \blacksquare \in \mathbb{R}$.

Extra 20. $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Extra 22. Autovalores são 1 (duplo) e 2. A condição é $a = 0$.

Extra 23. (a) autovalores complexos dados por $(3-\lambda)^2 + 4 = 0$, portanto não existe base de autovetoroes e,portanto, não é diagonalizável;

(b) Não é diagonalizável.

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Extra 27. Se $A = PDP^{-1}$ então $A = (\lambda P)D(1/\lambda P^{-1}) = QDQ^{-1}$.

B.8 Produto Interno

B.8.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1. (a) $\sqrt{5}$; (b) 1; (c) 0.

Exercício 2. (A) $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$.

Exercício 3. (a) Falso, pois os vetores podem não ser unitários; (b) verdadeiro, basta dividir pela norma; (c) verdadeiro; (d) verdadiro; (e) falso, $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$.

Exercício 4. (a) $H^\perp$; (b) H; (c) I.

Exercício 5. (a) $T = 0$; (b) $T = I$; (c) $T = -I$.

Exercício 6. (a) $T^2 = T$; (b) $T^2 = I$.

Exercício 7. 9.

[0]02.jun.2008 22h

Exercício 8. (a) $y = 0$; (b) $y = -x$; (c) plano xz; (d) eixo x.

Exercício 9. (E).

Exercício 10. (a) $P(x, y, z) = (0,\ y,\ 0)$; (b) $P(x, y, z) = (x,\ y,\ 0)$; (c) $P(x, y, z) = (x,\ -y,\ z)$;

B.8.2 Problemas

Problema 1. (a) Não. (b) Sim.

Problema 2. $\left\| \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = 3\sqrt{10}$

Problema 3. $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 5/2 \\ -3/2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Problema 4. (a) $(2,\ 3)$; (b) $(1,\ -1,\ 1)$; (c) Resolvendo o sistema encontramos que $S^\perp = \langle(5,\ 1,\ -8)\rangle$ (d) Definindo-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix},$$

temos $\mathrm{Im}(A) = H$ e portanto $H^\perp = (\mathrm{Im}(A))^\perp = \mathrm{Nuc}(A^T)$. Uma base para este espaço é

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Problema 5. (a) $1/4$; (b) $1/6$; (c) $\sqrt{3}/3$.

Problema 6. (a) $P(x, y, z, w) = (x - z)/2(1,\ 0,\ -1,\ 0) = (x - z,\ 0,\ z - x,\ 0)/2$. (b) por ser projeção, $P^1 00 = P$.

Problema 7. (a) $\begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$.

(b) $T(x, y, z) = ((x + z)/2, y, (x + z)/2)$. Sol: Como o plano é gerado por $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ e a direção $(1, 0, -1)$ é perpendicular ao plano, podemos dizer que $T(1, 0, 1) = (1, 0, 1)$ e $T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$. Também $T(1, 0, -1) = 0$. Como sabemos T em três vetores LIs, podemos calcular T.

Problema 8. Como $(0, 1, 0)$ é perpendicular a $(1, 0, 1)$, o eixo de rotação, basta calcular o ângulo entre $(0, 1, 0)$ e $(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$. Como o produto escalar é igual a zero, a rotação é de $90°$.

Problema 9. Não precisa calcular explicitamente as TLs.

(a) o vetor $(3, -2, 1)$ é perpendicular ao plano de reflexão. Logo é autovetor associado ao autovalor -1. Por outro lado, podemos obter base do plano $(1, 0, -3)$ e $(0, 1, 2)$, que são autovetores associados ao autovalor 1. (b) Como é projeção em reta, toda direção perpendicular ao vetor $(1,-1,0)$ é levado em zero. Portanto os vetores (x,y,z) satisfazendo $x-y=0$ são levados no zero. Assim (x,x,z), $(1,1,0)$ e $(0,0,1)$ são levados em zero. Assim autovalor 0; autovetores $(1,1,0),(0,0,1)$ e autovalor 1, autovetor $(1,-1,0)$.

Problema 10. Da equação obtemos que $(1,-2,-1)$ é ortogonal ao plano de projeção. Resolvendo a equação obtemos $(1,1,-1)$ e $(1,0,1)$. Como é projeção cada uma destas direções é um autovetor e forma base do $\mathbb{R}^3$.

Problema 11. Reflexão em torno do plano $x+y=0$. Solução: Achando os autovalores e autovetores, obtemos equação característica $(1-\lambda)^2(1+\lambda)=0$. Para o autovalor 1 obtemos o autoespaço $x+y=0$ (de dimensão 2); para autovalor -1 obtemos como autoespaço a solução do sistema $\{\ x-y=0//z=0$, cujo espaço é gerado por $(1,1,0)$. Note que esta direção é perpendicular ao plano do autoespaço do autovalor 1.

Os vetores do plano $x+y=0$ não são alterados pela transfirmação (plano de reflexão) e os da direção $(1,1,0)$ são multiplicados por -1. Logo TL é reflexão em torno do plano $x+y=0$.

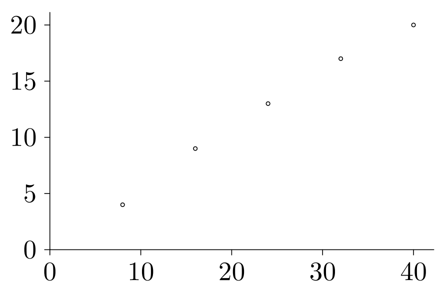
Problema 12. Vamos determinar m do sistema:

$$\begin{cases} 8m &= 4\\ 16m &= 9\\ 24m &= 13\\ 32m &= 17\\ 40m &= 20 \end{cases}$$

Projetando no subespaço linear obtemos:

$$\frac{\langle(4,9,13,17,20),(8,16,24,32,40)\rangle}{\langle(8,16,24,32,40),(8,16,24,32,40)\rangle}\cdot(8,16,24,32,40)$$
$$=\frac{1832}{3520}\cdot(8,16,24,32,40)$$

e $m\approx 0.52$.



Problema 13. $\begin{bmatrix} 4\\ 3\\ 3\\ -2 \end{bmatrix}$

Problema 14.

$$\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 2\\ -1\\ -3\\ 1 \end{bmatrix}-\frac{7}{3}\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1\\ -3\\ -2\\ 3 \end{bmatrix}$$

Problema 15. (a) $\left\{\begin{bmatrix} 5\\ -3\\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} -1\\ 1\\ 1 \end{bmatrix},\ \ t\in\mathbb{R}\right\}$; (b) $\begin{bmatrix} 2\\ 2\\ 5\\ 5 \end{bmatrix}$

B.8.3 Desafios

Desafio 1. $\langle A\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \lambda\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, A^T\mathbf{v}\rangle = \mu\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ Como $\lambda \neq \mu$, $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$.

Desafio 8. (a) produto dos autovalores; (b) 1; (c) 1; (d) -1; (e) -1; (f) 0;

Desafio 10. Queremos minimizar a distância $d(p,0)$. Logo $p(x) \equiv 0$.

B.8.4 Extras

Extra 1. (d) o plano $2x - y + 3z = 0$;

Extra 3. (a) $\begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}$; (d) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (e) aprojeção é $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, a rotação é $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, compondo obtemos $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (f) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(g) O plano perpendicular ao eixo de rotação é $x + y + z = 0$. Tomamos uma base ortonormal deste plano: $\{1/\sqrt{2}(1,\ 0,\ -1), 1/\sqrt{6}(1,\ -2,\ 1)\}$ Completamos esta base com $1/\sqrt{3}(1,\ 1,\ 1)$ para obter base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Definimos $\beta = \{\{1/\sqrt{2}(1,\ 0,\ -1), 1/\sqrt{6}(1,\ -2,\ 1), 1/\sqrt{3}(1,\ 1,\ 1)\}$ Nesta base a rotação será:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz $[I]_{\varepsilon\leftarrow\beta}$ é igual as colocar os vetores de β em colunas. A inversa desta matriz é $[T]_{\beta\leftarrow\varepsilon}$, que pode ser obtida transpondo a matriz anterior pois ela é ortogonal. Com isto podemos calcular $[T]_\epsilon = [I]_{\varepsilon\leftarrow\beta}[T]_{\beta\leftarrow\beta}[I]_{\beta\leftarrow\varepsilon}$. Deixe somente indicado.

Extra 4. Se $\mathbf{u} \in H$ e $\mathbf{v} \in H^\perp$, então $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$. Se $\mathbf{w} \in H \cap H^\perp$, então $\mathbf{w} \in H$ e $\mathbf{w} \in H^\perp$, de forma que $\langle \mathbf{w},\mathbf{w}\rangle = \|\mathbf{w}\|^2 = 0$.

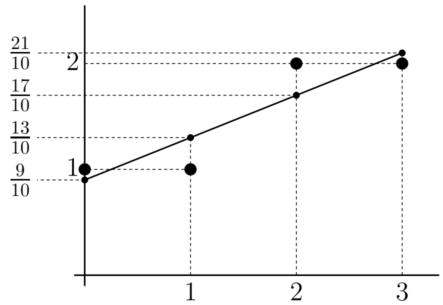
Extra 7. Calculamos resolvendo o sistema $x + y - z = 0, x + z = 0$ que $\mathbf{w} = (1,-2,-1)$. Como são autovetores LIs, $\beta = \{(1,1,-1)/\sqrt{3},\ (1,0,1)/\sqrt{2},\ (1,-2,-1)/\sqrt{6}\}$

Extra 8. (a) Eixo: $(1,-1,1)$ com ângulo $120°$. Solução: Para determinar eixo precisamos calcular a direção associada ao autovalor 1. Vamos obter o sistema $\begin{cases} -y = x \\ -z = y \\ x = z \end{cases}$. Resolvendo obtemos $(1,-1,1)$ como direção do eixo. Para determinar o plano de rotação resolvemos o sistema $\{\ x - y + z = 0$, que é gerado por $\mathbf{u} = (1,0,-1)$ e $\mathbf{v} = (0,1,1)$. Calculando $T\mathbf{u} = (0,1,1)$ e $T\mathbf{v} = (-1,-1,0)$. Determinamos o ângulo fazendo o produto interno: $\cos\theta = \langle \mathbf{u}, T\mathbf{u}\rangle / (\|\mathbf{u}\|\|T\mathbf{u}\|) = -1/2$ $\cos\phi = \langle \mathbf{v}, T\mathbf{v}\rangle / (\|\mathbf{v}\|\|T\mathbf{v}\|) = -1/2$. Logo o ângulo $\theta = \phi = 120°$. Segue que T é rotação.

(e) Calculando autovetor associado ao 1 determinamos o eixo $(1,0,-1)$. Com isto determinamos o plano de rotação, que é perpendicular a este eixo: são os (x,y,z) tais que $x - z = 0$. O plano é $\langle (1,0,1),(0,1,0)\rangle$. Aplicando matriz num destes vetores (por exemplo em $(1,0,1)$) calculamos o ângulo, que é $90°$.

Extra 9. (a) $(-3,5)$; (b) $(3,5)$; (c) $\langle (3,5)\rangle$; (d) $\mathbf{0}$;

Extra 12. (a) $y = \frac{4}{10}x + \frac{9}{10}$ (b)



(c) $\begin{bmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{13}{10} \\ \frac{17}{10} \\ \frac{21}{10} \end{bmatrix}$

Extra 13. $a = 0,960$ e $b = 0,100$.

Extra 14. $y = 19/20x + 67/40$.

Referências Bibliográficas

[1] Anton, Howard; Rorres, Chris; *Álgebra Linear com Aplicações;* Bookman; 2001.

[2] Boldrini, Costa, Figueiredo e Wetzler; *Álgebra Linear;* Harbra; 1986.

[3] Diversos autores; *Listas e Provas Antigas do DMA – IM – UFRJ;* 1990–2006.

[4] Halmos, Paul; *Finite-Dimensional Vector Spaces;* Springer Verlag; 1974.

[5] Hefferon, Jim; *Linear Algebra;* Acessado em Maio de 2008:
`http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/`

[6] Hoffman, Kenneth; Kunze, Ray; *Linear Algebra;* Prentice-Hall; 1971.

[7] Jänich, Klaus; *Linear Algebra;* Springer Verlag; 2007.

[8] Lay, David C.; *Linear Algebra and Its Applications;* Addison-Wesley; 1987.

[9] Leon, Steven J.; *Linear Algebra With Applications;* Prentice Hall; 2005.

[10] Santos, Reginaldo J.; *Um Curso de Geometria Analítica e Algebra Linear;* Imprensa Universitaria da UFMG; 2007.

[11] Shilov, Georgi E.; *Linear Algebra;* Dover Publications; 1977.

[12] Strang, Gilbert; *Introduction to Linear Algebra;* Wellesley-Cambridge Press; 1993.

[0] Versão 0.2

Índice Remissivo