Cálculo II - 2012/02 - Milton Lopes

Graduação em Matemática Aplicada - UFRJ
Monitores: Raphael Lourenço & Gabriel Sanfins
Lista 01 - Prolegômenos

"At first, I was afraid, I was petrified."
Freddie Perren & Dino Fekaris através da voz de Gloria Gaynor

1. (Você sabe derivar e integrar?)
   Derive: i. $f_1(x) = \ln\left(\frac{1+\cos^2\sqrt{(arctgx)^4 e^{-x^2}}}{1+\sin^2(\cos(\sin x))}\right)$ ii. $f_2(x) = \int_{\sqrt{x^2+1}}^{e^x} \frac{\sin t}{t^4+t^2+1} dt$.
   Integre: i. $f_1(x) = \sqrt{e^x+1}dx$ ii. $f_2(x) = x^3 \text{arcsin}(\frac{1}{x})dx$.

2. ("Teorema da Mudança de Variável" ou "dx pra cá dx pra lá, nunca mais!") Prove que:

   i. Se $g : [a,b] \to I \in C^1$ estritamente crescente e $f : I \to \mathbb{R} \in C^0$, então
   $$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

   ii. Conclua que: $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$ e $\int_{ca}^{cb} f(x)dx = c\int_a^b f(cx)dx$

3. (A primeira integral de sua vida: O POLINÔMIO):
   Você sabe calcular $\int_a^b x^n dx$, certo? Vamos fazer isso de um jeito diferente.

   i. Seja $c_n = \int_0^1 x^n dx$. Mostre que $\int_0^a x^n dx = c_n a^{n+1}$
   ii. Mostre que $\int_0^{2a} x^n dx = \int_{-a}^{a} (x+a)^n dx$
   iii. Use a formula acima para provar que $2^{n+1} c_n a^{n+1} = 2a^{n+1} \sum_{k\text{par}} \binom{x}{y} c_k$
   iv. Usando identidades binomiais, conclua que $c_n = 1/(n+1)$

4. (*Fórmula de Wallis*[1] ou "Uma formula irada para π"):
   $$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\cdots$$

   i. Mostre que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\ dx$.
   ii. Mostre que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\ dx = \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}$ e que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\ dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$.
   iii. Conclua que $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n} x\ dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1} x\ dx}$.
   iv. Para terminar a demostração, mostre que $\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n} x\ dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1} x\ dx} = 1$.
   v. Aproveite e mostre também que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2}{1}\frac{4}{3}\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1} = \sqrt{\pi}$.

[1] John Wallis: Ashford 23/11/1616 - Oxford 28/10/1703.

5. ("A *Gaussiana*[2]: $f(x) = e^{-x^2}$" ou "A Função Bolada do espaço de Schwartz[3]"):

   i. Porque essa função se chama gaussiana?
   ii. Procure saber o que é o espaço de Schwartz. Porque essa definição é legal?
   iii. Calcule $\int e^{-x^2}dx$
   iv. Você conseguiu calcular o exemplo acima? Se sim, mostre. Se não, diga o porquê.
   v. Então tente calcular a integral definida agora: $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, seguindo os passos
   Comece mostrando que $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2}{3}\frac{4}{5}\dots\frac{2n}{2n+1}$, e $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\dots\frac{2n-3}{2n-2}$.
   vi. Mostre que $1-x^2 \leq e^{-x^2}$ $\forall x \in [0,1]$, e $e^{-x^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)}$ $\forall x \geq 0$.
   vii. Integre as n-ésimas potências das desigualdades acima e use a substituição $y = \sqrt{nx}$
   viii. Mostre, com isso, que, $\sqrt{n}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\dots\frac{2n}{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}dy \leq \int_0^\infty e^{-y^2}dy \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{n}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\dots\frac{2n-3}{2n-2}$.
   ix. Use a *Formula de Wallis* para concluir que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   x. E finalmente que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

6. (A *"Função Gama"* ou "É possivel generalizar o fatorial para numeros reais??")
   Def: A Função Gama é definida por $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$.

   i. Mostre que $\Gamma(x)$ está bem definida para $x > 0$ e que $\Gamma(1) = 1$
   ii. Mostre que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $\forall x > 0$. Conclua que
   iii. Conclua que $\Gamma(n) = (n-1)!$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
   iv. Mostre que $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u^{1/x}}du$.
   v. Faça $\Gamma(\frac{1}{2})$ e use o resultado da gaussiana para calcular $(\frac{1}{2})!$, ou seja, o fatorial de $\frac{1}{2}$

   Curiosidade: Existem infinitas funções $f(n) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e mais ainda, existem infinitas funções tais que $f(x+1) = xf(x)$. Entretanto é possível mostrar (Teorema de Bohr[4] - Mollerup[5]) que $\Gamma(x)$ é a ÚNICA função tal que $f(1) = 1$, $f(x+1) = xf(x)$ e cujo logaritmo é convexo. Para mais detalhes, veja livro do Emil Artin, "The Gamma Function".

7. (e é irracional ou "O número que permeia toda a matemática")

   i. Leia o livro do Eli Maor, "e, A História de um Número"
   ii. Dê a sua definição favorita do número e e diga porquê você escolheu essa. Existem outras???
   iii. Prove que $\sqrt{p}$, onde p é primo, é irracional
   iv. Prove que $\sqrt[n]{p}$ é irracional
   v. Tente usar esse argumento para o número e. Por que você não consegue trabalhar com ele?
   vi. Vamos então provar que o e é irracional de outra forma:
   defina $e = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}$ e dê uma estimativa decimal para ele
   vii. Mostre que $0 < R_n < 2/(n+1)!$, onde $Rn = e - e_n$ e $e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.
   viii. Suponha que $e = p/q$, com p e q inteiros positivos.
   Mostre que, então, para n inteiro com $n \geq q$, temos $n!R_n$ inteiro positivo.

[2] Karl Friedrich Gauß: Braunschweig 30/04/1777 - Göttingen 23/02/1855.
[3] Laurent Schwartz: Paris 05/03/1915 - Paris 04/07/2002.
[4] Harald August Bohr: Gentofte 22/04/1887 - Kopenhagen 22/01/1951
[5] Johannes Mollerup: Nyborg 3/12/1872 - Nyborg 27/06/1937.

ix. Conclua que e é irracional.

8. (π é irracional ou "O segundo número que permeia toda a matemática")
Vamos dar uma demonstração elementar[6], porém bem indireta de que π é irracional.

i. Para começar, defina as funções $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$. Repare que $0 < f(x) < 1/n!$, para $0 < x < 1$.

ii. Escreva $f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$, onde os c_i são inteiros e mostre que:
$f_n^{(n)}(0) = c_n$, $f_n^{(n+1)}(0) = (n+1)c_{n+1}$ e que $f_n^{(2n)}(0) = 2n(2n-1)\dots(n+1)c_{2n}$.

iii. Mostre tambem que $f_n^{(k)}(0) = 0$, se $k < n$ ou $k > 2n$

iv. Prove que $f_n(x) = f_n(1-x)$ e, portanto, $f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x)$.

v. Conclua que $f_n^{(k)}(0)$ e $f_n^{(k)}(1)$ são inteiros, $\forall k$.

vi. Prove que, dado $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ então $\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$, para n suficientemente grande.

vii. Vamos então começar a demonstração. Na verdade, provaremos que π^2 é irracional. Para isso, vamos supor que $\pi^2 = a/b$. Porque isso é o suficiente para concluir que π é irracional?

viii. Defina $G(x) = b^n(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x))$.
Prove que $G(0)$ e $G(1)$ são inteiros e que $G''(x) + \pi^2 G(x) = b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = \pi^2 a^n f_n(x)$.

ix. Defina $H(x) = G'(x)\sin(\pi x) - \pi G(x)\cos(\pi x)$. Prove que $H'(x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x)$.

x. Use o Teorema Fundamental do Cálculo e conclua que $\pi^2 \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx = \pi(G(1)+G(0))$.
Conclua também que $\pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx$ é inteiro.

xi. Note que $0 < \pi a^n f_n(x)\sin(\pi x) < \pi a^n/n!$, para $0 < x < 1$ e, portanto,
$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx < \pi a^n/n! < 1$, se n é suficientemente grande.

xii. Chegue a uma contradição. Quais propriedades de π você usou na demonstração acima? Note que não demos uma definição do número π. Então como provamos que π é irracional sem dar uma definição? Reflita sobre isso e diga o que realmente provamos acima!

9. (*Zeta de Riemann* ou "O grande mistério da matemática" ou "identidades aleatórias")

Sejam a *Gamma de Euler*($\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx, \forall s > 0$) e a *Zeta de Riemann*($\zeta(s) = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{n^s}$)

i. Mostre que, para $n > 0$, vale $\frac{1}{n^s}\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}dx$

ii. Mostre que, para $s > 1$, $\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}dx$

iii. Como você justificaria $\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty x^{s-1}e^{-nx}\right)dx$?

iv. Mostre que, resolvido [iii.], temos $\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$

Curiosidade: A *Zeta de Riemann* é a função C^∞ mais complicada da matemática. Ela se relaciona de forma MUITO especial com outras funções importantes como você acabou de ver com a *Gamma de Euler* e também com os *Polinômios de Bernoulli.* Tais identidades são muitos úteis em certas áreas, em especial em *Teoria Analítica dos Números*, onde queremos relacionar $\zeta(s)$ com a distribuição dos números primos ao longo de todos os naturais.

[6]Elementar, em matemática, não é o mesmo que simples e fácil, mas sim que não usa técnicas sofisticadas nem idéias comtemporâneas.

10. (*Serie de Taylor*[7] ou “A Ferramenta preferida dos Físicos”) Vamos deduzir a Série de Taylor

i. Sejam $f : [0,a] \to \mathbb{R} \in C^0$, $x \in [0,a]$. Mostre que

$$\int_0^x (\int_0^{x_1} \dots (\int_0^{x_n} f(t)\ dt)\ dx_n \dots)\ dx_1 = \frac{1}{n!}\int_0^x f(t)(x-t)^n\ dt.$$

ii. Suponha que $f^{(n+1)} \in C^0$ em $[a, a+x]$. Faça $f(a+x) = f(a) + \int_0^x f'(a+t)dt$

iii. De forma recursiva, veja que isso é igual a

$$f(a)+\int_0^x (f'(a)+\int_0^{x_1} f''(a+t)dt)dx_1 = f(a)+f'(a)x+\int_0^x (\int_0^{x_1} (f''(a)+\int_0^{x_2} f'''(a+t)dt)dx_2)dx_1 =$$

$$= \dots = f(a)+f'(a)x+\frac{f''(a)}{2}x^2+\frac{f'''(a)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n+\int_0^x (\int_0^{x_1} \dots (\int_0^{x_n} f^{(n+1)}(t)\ dt)\ dx_n \dots)\ dx_1.$$

iv. Use o resultado do item [i.] para concluir que

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$\text{onde } R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\ dt.$$

v. Suponha que $|f^{(n+1)}(t)| \leq M \forall t \in [0,x]$. Mostre que $|R_n(x)| \leq M\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

vi. Tal $R_n(x)$ é conhecido como Resto Integral. Existem outras representações para o resto? Qual a diferença entre elas e para que elas servem?

vii. Mostre que, para todo x em $\mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1},\ \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k},\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

viii. Usando as expressões obtidas no item anterior, prove que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

ix. Conclua que $e^{i\pi} + 1 = 0$

Curiosidade: Essa equação é considerada muito bonita pois envolve as cinco constantes mais importantes das matemática: o número imaginário, o *Número de Euler*, o elemento neutro da adição, o elemento neutro da multiplicação e π. Foi deduzida por Leonard Euler[8] por volta de 1740

[7]Brook Taylor - Middlesex 18/08/1685 - London 29/12/1731
[8]Leonhard Euler - Basel 15/04/1707 - Sankt Petersburg 18/09/1783