Smectic films with elastic anisotropy

Félix Bunel and Patrick Oswald

June 24, 2019

1 Introduction

On souhaite étudier numériquement le comportement d'un film de smectic-C sous application d'un gradient transverse G. Les équations gouvernant ce système sont les suivantes :

Equation des couples

$$-K\Delta\phi + \gamma_1 \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2}(u_{,y} - v_{,x})\right] + \nu G = 0 \tag{1}$$

Equation des contraintes

$$\begin{aligned}\beta\Delta u + \alpha\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2}(u_{,y} - v_{,x})\right)\right] \\ + G\mu\left(\cos(2\phi)\frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin(2\phi)\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - K\frac{\partial \phi}{\partial x}\Delta\phi = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x}\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\beta\Delta v + \alpha\left[-\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2}(u_{,y} - v_{,x})\right)\right] \\ + G\mu\left(\sin(2\phi)\frac{\partial \phi}{\partial x} - \cos(2\phi)\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - K\frac{\partial \phi}{\partial y}\Delta\phi = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}\end{aligned} \tag{3}$$

Equation d'incompressibilité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

Ces équations ont été écrite ici en faisant l'approximation de constante unique par soucis de simplification, mais les calculs qui suivent sont réalisées avec une anisotropie élastique.

Pour résoudre ce problème complexe, on résoudra de manière indépendante ces deux équations, et on espère qu'en itérant plusieurs fois ces résolutions couplés, il est possible de tendre vers une solution du problème complet.

En procédant ainsi, l'équation sur la vitesse est linéaire et donc facilement résolvable. Celle sur ϕ est plus compliqué à cause des termes anisotrope fortement non linéaires. Pour résoudre cette équation, on souhaite donc utiliser une méthode de minimisation résolu par algorythme de région de confiance qui assure une convergence globale. Pour cela, il est nécessaire de réécrire l'équation **??** comme un problème de minimisation, c'est à dire en trouvant une énergie F telle que $\frac{\delta F}{\delta \phi} = 0$.

2 Adimensionnement

On commence par adimensionner ces équation. On définit déjà quelques constantes :

$$K = \frac{K_3 + K_1}{2}, \qquad A = \frac{K_3 - K_1}{K_3 + K_1}, \qquad a = \frac{2\beta}{\gamma_1} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad D = \frac{K}{\gamma_1}, \qquad X = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{et} \quad \phi_{\text{lin}} = 2\pi n = -\frac{\nu G R^2}{4K}$$

Et on adimensionne les variables du problème en posant les variables adimensionnées:

$$\bar{\phi} = \frac{\phi}{\phi_{\text{lin}}}, \qquad \bar{x} = \frac{x}{R}, \qquad \bar{v} = \frac{v}{v^\star}, \qquad \bar{t} = \frac{t}{\tau} \quad \text{et} \quad \bar{\tilde{P}} = \frac{\tilde{P}}{P_0}$$

où on a posé :

$$v^\star = \frac{1}{a}\frac{D}{R} \qquad \tau = \frac{R^2}{D} \quad \text{et} \quad P_0 = \alpha \frac{D}{R^2}$$

Pour l'équation des contraintes, on regroupe également tous les termes indépendants de u, v et P dans une fonction :

$$F_x = -\phi_{\text{lin}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} + 8\phi_{\text{lin}}^2 X \left(\cos(2\phi_{\text{lin}}\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin(2\phi_{\text{lin}}\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + 2\phi_{\text{lin}}^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta\phi \tag{5}$$

$$F_y = \phi_{\text{lin}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + 8\phi_{\text{lin}}^2 X \left(\sin(2\phi_{\text{lin}}\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \cos(2\phi_{\text{lin}}\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + 2\phi_{\text{lin}}^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta\phi \tag{6}$$

Avec ces notations, nos équations se réecrivent :

Equation des couples adimensionnée

$$-\Delta\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{a}\left[u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2\phi_{\text{lin}}}(u_{,y} - v_{,x}) \right] - 4 = 0 \tag{7}$$

Equation des contraintes adimensionnée

$$\Delta u + \frac{\phi_{\text{lin}}}{a}\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2\phi_{\text{lin}}}(u_{,y} - v_{,x}) \right) - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} = F_x \tag{8}$$

$$\Delta v - \frac{\phi_{\text{lin}}}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2\phi_{\text{lin}}}(u_{,y} - v_{,x}) \right) - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = F_y \tag{9}$$

Equation d'incompressibilité adimensionnée

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

3 Résolution de l'équation des contraintes

Comme il s'agit d'une équation linéaire en l'inconnue v, on peut la résoudre directement par méthode des éléments finis. Le problème de Stokes s'écrit dans notre cas :

$$\begin{pmatrix} \Delta u + \frac{\phi_{\text{lin}}}{a}\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2\phi_{\text{lin}}}(u_{,y} - v_{,x})\right) - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} \\ \Delta v - \frac{\phi_{\text{lin}}}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2\phi_{\text{lin}}}(u_{,y} - v_{,x})\right) - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Comme d'habitude en élément finit, on multiplie par une fonction test par la gauche et intègre par partie sur le domaine d'étude. Notre fonction test est noté :

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_u \\ \xi_v \\ \xi_p \end{pmatrix} \tag{12}$$

Et on obtient donc :

$$\begin{aligned} &\int \xi_u \Delta u + \int \xi_u \frac{\phi_{\text{lin}}}{a}\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2\phi_{\text{lin}}}(u_{,y} - v_{,x})\right) - \int \xi_u \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} \\ &+ \int \xi_v \Delta v - \int \xi_v \frac{\phi_{\text{lin}}}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2\phi_{\text{lin}}}(u_{,y} - v_{,x})\right) - \int \xi_v \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v} \\ &+ \int \xi_p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ &\qquad\qquad = \int \xi_u F_x + \int \xi_v F_v \end{aligned} \tag{13}$$

On peut intégrer par partie la plupart de ces termes :

$$\begin{aligned} &-\int \nabla \xi_u \nabla u - \int \frac{\partial \xi_u}{\partial y}\frac{\phi_{\text{lin}}}{a}\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2\phi_{\text{lin}}}(u_{,y} - v_{,x})\right) + \int \frac{\partial \xi_u}{\partial x}\tilde{P} \\ &-\int \nabla \xi_v \nabla v + \int \frac{\partial \xi_v}{\partial x}\frac{\phi_{\text{lin}}}{a}\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2\phi_{\text{lin}}}(u_{,y} - v_{,x})\right) + \int \frac{\partial \xi_v}{\partial y}\tilde{P} \\ &+ \int \xi_p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ &\qquad\qquad = \int \xi_u F_x + \int \xi_v F_v \end{aligned} \tag{14}$$

soit en ré-organisant un peu :

$$\begin{aligned} &-\int \nabla \xi_u \nabla u + \nabla \xi_v \nabla v \\ &+ \int \frac{\phi_{\text{lin}}}{a}\left(\frac{\partial \xi_v}{\partial x} - \frac{\partial \xi_u}{\partial y}\right)\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2\phi_{\text{lin}}}(u_{,y} - v_{,x})\right) \\ &+ \int \left(\frac{\partial \xi_u}{\partial x} + \frac{\partial \xi_v}{\partial y}\right)\tilde{P} \\ &+ \int \xi_p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ &\qquad\qquad = \int \xi_u F_x + \int \xi_v F_v \end{aligned} \tag{15}$$

On vérifie bien la formulation faible du problème de stokes en l'absence des termes spécifiques aux cristaux liquides :

$$-\int \nabla \xi_{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \int \tilde{P} \nabla \cdot \xi_{\mathbf{v}} + \int \xi_p \nabla \cdot \mathbf{v} = \int \xi_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F} \tag{16}$$

On décompose maintenant notre système sur les fonctions de formes :

$$\psi_i = \begin{pmatrix} \psi_u^i \\ \psi_v^i \\ \psi_p^i \end{pmatrix} \tag{17}$$

Notre problème se réécrit donc comme un système linéaire à inverser :

$$A^{i,j}\psi^j = G^i \tag{18}$$

avec :

$$\begin{aligned} A^{i,j} = &- \int \nabla\psi_u^i \nabla\psi_u^j + \nabla\psi_v^i \nabla\psi_v^j \\ &+ \int \frac{\phi_{\text{lin}}}{a} \left(\frac{\partial \psi_v^i}{\partial x} - \frac{\partial \psi_u^i}{\partial y} \right) \left(\psi_u^j \frac{\partial \phi}{\partial x} + \psi_v^j \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2\phi_{\text{lin}}} \left(\frac{\partial \psi_u^j}{\partial y} - \frac{\partial \psi_v^j}{\partial x} \right) \right) \\ &+ \int \left(\frac{\partial \psi_u^i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_v^i}{\partial y} \right) \tilde{\psi}_p^j \\ &+ \int \psi_p^i \left(\frac{\partial \psi_u^j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_v^j}{\partial y} \right) \end{aligned} \tag{19}$$

et :

$$G^i = \int \psi_u^i F_x + \int \psi_v^i F_v \tag{20}$$

Comme on peut le voir sur l'équation 11, le sytème peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Avec A, une matrice qui n'est pas symétrique à cause du terme spécifique aux cristaux liquides. Plutôt que de résoudre ce système compliqué, on résout à la place :

$$\begin{pmatrix} A + \gamma B^T W^{-1} B & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

avec γ un paramètre et W une matrice inversible. $B^T W^{-1} B$ est appelé Lagrangien augmenté. Et on note $\tilde{A} = A + \gamma B^T W^{-1} B$. Si on note maintenant notre matrice G et le terme source b, notre système se réecrit :

$$Gx = b \tag{23}$$

ou avec un préconditionneur à gauche :

$$GP^{-1}y = b \qquad \text{avec} \qquad x = P^{-1}y \tag{24}$$

Comme préconditioneur P, on utilise le préconditionneur de Schur pour la matrice $\tilde{A}$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & B^T \\ 0 & \tilde{S} \end{pmatrix} \tag{25}$$

ou $\tilde{S}$ est le complément de Schur : $\tilde{S} = B^T \tilde{A}^{-1} B$ Un bon choix pour W est de prendre $W = M_p$ avec M_p la matrice de masse de la pression. La matrice $\tilde{S}^{-1}$ peut alors être approximé par :

$$\tilde{S}^{-1} \simeq -(\nu + \gamma) M_p^{-1} \tag{26}$$

Et on décompose alors P^{-1} sous la forme :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -B^T \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{S}^{-1} \end{pmatrix} \tag{27}$$

4 Résolution de l'équation des couples

4.1 Expression de l'énergie du problème

Le terme élastique présent en équation 7 dérive directement de l'énergie élastique de Frank qui s'écrit :

Energie élastique isotrope

$$E(\phi) = \iint \left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right)\right] dS \tag{28}$$

Le terme anisotrope qui n'est pas écrit dans l'équation 7 dérive de l'énergie suivante :

Energie élastique anisotrope

$$A(\phi) = \iint \left[\frac{1}{2} A\left(\cos(2\phi_{\text{lin}}\phi)\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right) + 2\sin(2\phi_{\text{lin}}\phi)\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right] dS \tag{29}$$

Passons maintenant au terme faisant apparaître la dérivée temporelle. Il doit bien entendu être discrétisé en temps et la résolution des deux équations couplés devra être réalisé pour chaque pas de temps.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi_{t+dt} - \phi_t}{dt} \tag{30}$$

A partir de maintenant, on notera $\theta = \phi_t$ et $\phi = \phi_{t+dt}$. La fonction θ est connue de la résolution du pas d'avant et ϕ est l'inconnue que l'on souhaite résoudre par minimisation de l'énergie. On remarque qu'il est possible d'écrire ce terme comme dérivant de l'énergie de relaxation :

Energie de relaxation

$$T(\phi) = \iint \left[\frac{1}{2dt}(\phi - \theta)^2\right] dS \tag{31}$$

Passons maintenant aux termes provenant des écoulements. u et v sont ici des fonctions de x et y mais indépendantes de ϕ. Le terme $\frac{1}{2}(u_{,y} - v_{,x})$ est donc un terme constant qui peut se dériver à partir de l'énergie :

Energie associée au terme en vitesse

$$O(\phi) = \iint \left[\frac{1}{2\phi_{\text{lin}} a}(u_{,y} - v_{,x})\phi\right] dS \tag{32}$$

L'autre terme $u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y}$ est plus compliqué car il dépend de ϕ et ne dérive pas directement d'une énergie. Pour palier à ce problème, on utilise une méthode explicite qui conciste à ne pas utiliser ϕ directement, mais une approximation connue de ce dernier. Une possibilité est d'utiliser θ, mais une meilleur idée est d'utiliser l'update ϕ_k correspondant au dernier pas de la descente en énergie. Ainsi calculé, ces termes advectifs deviennent des fonctions indépendantes de ϕ et peuvent être calculer simplement à partir de l'énergie :

Energie associée au terme advectif

$$V(\phi) = \iint \left[\frac{1}{a}\left(u\frac{\partial \phi_k}{\partial x} + v\frac{\partial \phi_k}{\partial y}\right)\phi\right] dS \tag{33}$$

Finalement, la force de Leslie est directement un terme constant et contribue à l'énergie avec :

Energie associée au couple de Leslie

$$L(\phi) = \iint [-4\phi] dS \tag{34}$$

L'énergie totale s'écrit donc:

Energie du système

$$F(\phi) = E(\phi) + A(\phi) + T(\phi) + V(\phi) + O(\phi) + L(\phi) \tag{35}$$

et il n'y a pas besoin de rajouter de contrainte de Lagrange comme $\overrightarrow{n}^2 = 1$ est déjà respecté car on utilise directement ϕ comme variable.

On peut vérifier directement que $\frac{\delta F}{\delta \phi} = 0$ permet de retrouver l'équation 7.

4.2 Développement de l'énergie

4.2.1 Termes de Leslie

L'énergie du terme de Leslie s'écrit à l'ordre 2 en δ (en séparant les différents termes) :

$$L^{(0)} = \iint [-4\Phi] dS \tag{36}$$

$$L^{(1)} = \iint [-4\delta] dS \tag{37}$$

$$L^{(2)} = 0 \tag{38}$$

On developpe la fonction δ sur les fonctions test $\delta = \delta_i \psi_i$, ce qui donne donc l'énergie :

$$L = L^{(0)} + G_L^i \cdot \delta_i \tag{39}$$

En posant :

$$G_L^i = \iint \left[-4\psi_i\right] dS \tag{40}$$

4.2.2 Terme en vitesse

L'énergie du terme de Leslie s'écrit à l'ordre 2 en δ (en séparant les différents termes) :

$$O^{(0)} = \iint \left[\frac{1}{2\phi_{\text{lin}} a}(u_{,y} - v_{,x})\Phi\right] dS \tag{41}$$

$$O^{(1)} = \iint \left[\frac{1}{2\phi_{\text{lin}} a}(u_{,y} - v_{,x})\delta\right] dS \tag{42}$$

$$O^{(2)} = 0 \tag{43}$$

On developpe la fonction δ sur les fonctions test $\delta = \delta_i \psi_i$, ce qui donne donc l'énergie :

$$O = O^{(0)} + G_O^i \cdot \delta_i \tag{44}$$

En posant :

$$G_O^i = \iint \left[\frac{1}{2\phi_{\text{lin}} a}(u_{,y} - v_{,x})\psi_i\right] dS \tag{45}$$

4.2.3 Terme advectif

L'énergie du terme advectif s'écrit à l'ordre 2 en δ (en séparant les différents termes) :

$$V^{(0)} = \iint \left[\frac{1}{a} \Big(u \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + v \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \Big) \Phi \right] dS \tag{46}$$

$$V^{(1)} = \iint \left[\frac{1}{a} \Big(u \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + v \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \Big) \delta \right] dS \tag{47}$$

$$V^{(2)} = 0 \tag{48}$$

On developpe la fonction δ sur les fonctions test $\delta = \delta_i \psi_i$, ce qui donne donc l'énergie :

$$V = V^{(0)} + G_V^i \cdot \delta_i \tag{49}$$

En posant :

$$G_V^i = \iint \left[\frac{1}{a} \Big(u \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + v \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \Big) \psi_i \right] dS \tag{50}$$

4.2.4 Terme temporel

L'énergie du terme temporel s'écrit à l'ordre 2 en δ (en séparant les différents termes) :

$$T^{(0)} = \iint \left[\frac{1}{2dt} (\Phi - \theta)^2 \right] dS \tag{51}$$

$$T^{(1)} = \iint \left[\frac{1}{dt} (\Phi - \theta) \delta \right] dS \tag{52}$$

$$T^{(2)} = \iint \left[\frac{1}{2dt} \delta^2 \right] dS \tag{53}$$

On developpe la fonction δ sur les fonctions test $\delta = \delta_i \psi_i$, ce qui donne donc l'énergie :

$$T = T^{(0)} + G_T^i \cdot \delta_i + \frac{1}{2} A_T^{i,j} \cdot \delta_i \delta_j \tag{54}$$

En posant :

$$G_T^i = \iint \left[\frac{1}{dt} (\Phi - \phi_t) \psi_i \right] dS \tag{55}$$

et :

$$A_T^{i,j} = \iint \left[\frac{1}{dt} \psi_i \psi_j \right] dS \tag{56}$$

4.2.5 Termes isotropes

Dans le cas isotrope, l'énergie élastique à l'ordre 2 en δ s'écrit (en séparant les différents termes) :

$$E^{(0)} = \iint \left[\frac{1}{2} \left(\Big(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big)^2 \right) \right] dS \tag{57}$$

$$E^{(1)} = \iint \left[\left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] dS \tag{58}$$

$$E^{(2)} = \iint \left[\frac{1}{2} \left(\Big(\frac{\partial \delta}{\partial x} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial \delta}{\partial y} \Big)^2 \right) \right] dS \tag{59}$$

On developpe la fonction δ sur les fonctions test $\delta = \delta_i \psi_i$, ce qui donne donc l'énergie :

$$E = E^{(0)} + G_E^i \cdot \delta_i + \frac{1}{2} A_E^{i,j} \cdot \delta_i \delta_j \tag{60}$$

En posant :

$$G_E^i = \iint \left[\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] dS \tag{61}$$

et :

$$A_E^{i,j} = \iint \left[\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \right] dS \tag{62}$$

4.2.6 Développement de l'énergie

Dans le cas anisotrope, il faut calculer des termes supplémentaires.

$$A^{(0)} = \iint \left[\frac{1}{2} A \left(\cos(2\phi_{\text{lin}}\Phi) \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right) + 2\sin(2\phi_{\text{lin}}\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] dS \tag{63}$$

$$\begin{aligned} A^{(1)} = \iint \Bigg[A \Bigg(&\cos(2\phi_{\text{lin}}\Phi) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \delta}{\partial y} + 2\phi_{\text{lin}} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta \right) \\ &+ \sin(2\phi_{\text{lin}}\Phi) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \delta}{\partial y} - \phi_{\text{lin}}\delta \Big((\frac{\partial \Phi}{\partial x})^2 - (\frac{\partial \Phi}{\partial y})^2 \Big) \right) \Bigg) \Bigg] dS \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} A^{(2)} = \iint \Bigg[A \Bigg(&\sin(2\phi_{\text{lin}}\Phi) \left(\frac{\partial \delta}{\partial x}\frac{\partial \delta}{\partial y} - 2\phi_{\text{lin}}\delta \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \delta}{\partial y} \Big) - 2\phi_{\text{lin}}^2 \delta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{1}{2}\cos(2\phi_{\text{lin}}\Phi) \left(4\phi_{\text{lin}}\delta \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \delta}{\partial y} \Big) + \Big(\frac{\partial \delta}{\partial x} \Big)^2 - \Big(\frac{\partial \delta}{\partial y} \Big)^2 - 2\phi_{\text{lin}}^2 \delta^2 \Big((\frac{\partial \Phi}{\partial x})^2 - (\frac{\partial \Phi}{\partial y})^2 \Big) \right) \Bigg) \Bigg] dS \end{aligned} \tag{65}$$

On developpe la fonction δ sur les fonctions test $\delta = \delta_i \psi_i$, ce qui donne donc l'énergie :

$$A = A^{(0)} + G_A^i \cdot \delta_i + \frac{1}{2} A_A^{i,j} \cdot \delta_i \delta_j \tag{66}$$

Attention, ici il est important de développer de manière symmétrique. En posant :

$$\begin{aligned} G_A^i = \iint \Bigg[A \Bigg(&\cos(2\phi_{\text{lin}}\Phi) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \psi_i}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \psi_i}{\partial y} + 2\phi_{\text{lin}} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \psi_i \right) \\ &+ \sin(2\phi_{\text{lin}}\Phi) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \psi_i}{\partial y} - \phi_{\text{lin}}\psi_i \Big((\frac{\partial \Phi}{\partial x})^2 - (\frac{\partial \Phi}{\partial y})^2 \Big) \right) \Bigg) \Bigg] dS \end{aligned} \tag{67}$$

et :

$$\begin{aligned} A_A^{i,j} = \iint \Bigg[A \Bigg(&\sin(2\phi_{\text{lin}}\Phi) \Bigg(\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\frac{\partial \psi_j}{\partial y} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \\ &\qquad - 2\phi_{\text{lin}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big(\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \Big) + 2\phi_{\text{lin}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big(\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + \psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \Big) \\ &\qquad - 2\phi_{\text{lin}}^2 \psi_i \psi_j \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Bigg) \\ &+ \cos(2\phi_{\text{lin}}\Phi) \Bigg(\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} - \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\ &\qquad + 2\phi_{\text{lin}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big(\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + \psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \Big) + 2\phi_{\text{lin}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big(\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \Big) \\ &\qquad - 2\phi_{\text{lin}}^2 \psi_i \psi_j \Big((\frac{\partial \Phi}{\partial x})^2 - (\frac{\partial \Phi}{\partial y})^2 \Big) \Bigg) \Bigg) \Bigg] dS \end{aligned} \tag{68}$$

4.3 Expression du système

A l'ordre 2 en l'énergie et développé sur les fonctions de formes, l'énergie s'écrit donc :

$$F(\phi) = F(\phi) + (G_E^i + G_A^i + G_T^i + G_V^i + G_O^i + G_L^i) \cdot \delta_i + \frac{1}{2}(A_T^{i,j} + A_E^{i,j} + A_A^{i,j}) \cdot \delta_i \delta_j \tag{69}$$

De cette forme, on peut déduire l'update de la solution en résolvant :

$$(A_T^{i,j} + A_E^{i,j} + A_A^{i,j})\delta_j = -(G_E^i + G_A^i + G_T^i + G_V^i + G_O^i + G_L^i) \tag{70}$$