

外気（マイナス何度）とできた氷の最深部（0度）までの距離を l とします。また、そこには ΔT の温度差があり、温度は距離に対して一次関数の様に分布します。温度の勾配は $\frac{\Delta T}{l}$ であり、これに比例して熱伝導率 κ 倍の冷熱流が流れます。熱量は面積に比例しますから、輸送される冷熱は結局、 $\kappa \frac{\Delta T}{l} S$ となります。

一方、水温 0 度、体積 V の水が凍る時の潜熱を q とします。単位時間当たりに凍る体積は時間 t として $q \frac{dV}{dt} = q \frac{dl}{dt} S$ となります。

よって、方程式は

$$q \frac{dl}{dt} S = \kappa \frac{\Delta T}{l} S \quad (1)$$

となります。これは、変数分離系であり、この式より、

$$\begin{aligned} ql \frac{dl}{dt} &= \kappa \Delta T \\ \frac{1}{2} q l^2 &= \kappa \Delta T t \\ l^2 &= 2 \frac{\kappa \Delta T}{q} t \\ l &= \sqrt{2 \frac{\kappa \Delta T}{q} t} \end{aligned} \quad (2)$$

以上が僕の考えた答えです。by クロメル