Teorema

Il classico numero di Ramsey R(3,3,3) è maggiore di 16, ossia esiste un modo per colorare tutti i lati di K_{16} senza generare un triangolo monocromatico.

Dimostrazione

Siano V ed L rispettivamente l'insieme dei vertici e dei lati del grafo completo K_{16} :

$V = \{0,1,2,....,15\}$
$L = \{(x,y) \mid x,y \in V \text{ e } x < y\} = \{(x,y) \mid (x,y) \in (VxV) \text{ e } x < y\}$

Siano adesso :

$O = \{0\}$
$X = \{1,2,3,4,5\}$
$Y = \{6,7,8,9,10\}$
$Z = \{11,12,13,14,15\}$

L'insieme V può essere riscritto in questo modo:

$V = O \cup X \cup Y \cup Z$

Dati adesso due insiemi non vuoti $U,W \subseteq V$ indichiamo con $L_{U,W}$ l'insieme di tutti i lati aventi un vertice in U e l'altro in W :

$L_{U,W} = \{(x,y) \mid x \in U \text{ e } y \in W \text{ e } x < y\}$

Sfruttando tale definizione possiamo riscrivere l'insieme L nel seguente modo:

$L = L_{O,X} \cup L_{O,Y} \cup L_{O,Z} \cup L_{X,X} \cup L_{X,Y} \cup L_{X,Z} \cup L_{Y,Y} \cup L_{Y,Z} \cup L_{Z,Z}$

Andiamo adesso a colorare l'insieme L con 3 colori in modo tale che L sia privo di triangoli monocromatici (aventi cioè i tre lati di uno stesso colore).
Per poter fare questo dobbiamo però premettere qualche definizione.
Siano allora r,g,b i tre colori utilizzati e $\mu : V\backslash\{0\} \rightarrow \{0,1,2,3,4\}$ l'applicazione che associa ad ogni $i \in V\backslash\{0\}$ il resto della divisione di i per 5.
Inoltre per ogni lato $(x,y) \in L$ (con x diverso da 0) e m numeri interi non negativi $d_1, d_2 \ .... \ ,d_m$ definiamo:

$\delta(x,y) = |\mu(x) - \mu(y)|$

$\Delta_{\{d1,d2,..dm\}} = \{(x,y) \in L \mid \delta(x,y) \in \{d_1, d_2 \ .... \ ,d_m\}\}$

Coloriamo adesso l'insieme L in modo tale che :

1) Detto R l'insieme di tutti i lati $(x,y) \in L$ colorati col colore r sia :
   $R = L_{O,Z} \cup (L_{X,X} \cap \Delta_{\{2,3\}}) \cup (L_{Y,Y} \cap \Delta_{\{1,4\}}) \cup (L_{Z,Z} \cap \Delta_{\{0\}}) \cup (L_{X,Y} \cap \Delta_{\{0\}}) \cup (L_{X,Z} \cap \Delta_{\{2,3\}}) \cup (L_{Y,Z} \cap \Delta_{\{1,4\}})$
2) Detto G l'insieme di tutti i lati $(x,y) \in L$ colorati col colore g sia :
   $G = L_{O,Y} \cup (L_{X,X} \cap \Delta_{\{1,4\}}) \cup (L_{Y,Y} \cap \Delta_{\{0\}}) \cup (L_{Z,Z} \cap \Delta_{\{2,3\}}) \cup (L_{X,Y} \cap \Delta_{\{1,4\}}) \cup (L_{X,Z} \cap \Delta_{\{0\}}) \cup$

$(L_{Y,Z} \cap \Delta_{\{2,3\}})$

3) Detto B l'insieme di tutti i lati $(x,y) \in L$ colorati col colore b sia :
$B = L_{O,X} \cup (L_{X,X} \cap \Delta_{\{0\}}) \cup (L_{Y,Y} \cap \Delta_{\{2,3\}}) \cup (L_{Z,Z} \cap \Delta_{\{1,4\}}) \cup (L_{X,Y} \cap \Delta_{\{2,3\}}) \cup (L_{X,Z} \cap \Delta_{\{1,4\}}) \cup (L_{Y,Z} \cap \Delta_{\{0\}})$

Si osservi innanzitutto che l'unione dei tre precedenti insiemi coincide con l'insieme L mentre la loro intersezione restituisce l'insieme vuoto:

$L = R \cup G \cup B$
$R \cap G = R \cap B = G \cap B = \emptyset$

Ovviamente qualunque triangolo monocromatico esista in L deve necessariamente appartenere ad uno dei tre insiemi in cui l'insieme L è stato suddiviso.
Dimostriamo ora che in R non vi sono triangoli.
Per assurdo : siano α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ i tre vertici del nostro triangolo ed $(\alpha, \beta),(\alpha, \gamma), (\beta, \gamma) \in R$ i suoi lati.
Si danno allora i seguenti casi (e solo questi):

1) $\alpha \in O$ e $\beta, \gamma \in Z$
Ciò significa che $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in L_{O,Z}$ e $(\beta, \gamma) \in (L_{Z,Z} \cap \Delta_{\{0\}})$.
Ma :
$(L_{Z,Z} \cap \Delta_{\{0\}}) = \emptyset$
e pertanto possiamo dire che in R non vi sono triangoli aventi un vertice in 0 e due vertici in Z.
2) $\alpha \in X$, $\beta \in Y$, $\gamma \in Z$
Ciò significa che :
$(\alpha, \beta) \in (L_{X,Y} \cap \Delta_{\{0\}})$, $(\alpha, \gamma) \in (L_{X,Z} \cap \Delta_{\{2,3\}})$, $(\beta, \gamma) \in (L_{Y,Z} \cap \Delta_{\{1,4\}})$
e dunque:
$\delta(\alpha, \beta) = 0$, $\delta(\alpha, \gamma) \in \{2,3\}$, $\delta(\beta, \gamma) \in \{1,4\}$
Ma :
$\delta(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow \delta(\alpha, \gamma) = \delta(\beta, \gamma)$
il che è assurdo per le precedenti relazioni; ne consegue che in R non vi sono triangoli aventi esattamente un vertice in ciascuno dei tre insiemi X,Y,Z
3) $\alpha, \beta, \gamma \in X$ o $\alpha, \beta, \gamma \in Y$ o $\alpha, \beta, \gamma \in Z$
Ciò significa che :
$(\alpha, \beta),(\alpha, \gamma), (\beta, \gamma) \in (L_{X,X} \cap \Delta_{\{2,3\}})$ o $(\alpha, \beta),(\alpha, \gamma), (\beta, \gamma) \in (L_{Y,Y} \cap \Delta_{\{1,4\}})$ o $(\alpha, \beta),(\alpha, \gamma), (\beta, \gamma) \in (L_{Z,Z} \cap \Delta_{\{0\}})$
Dimostriamo solo l'assurdo della prima relazione. Le altre si dimostrano in modo analogo (l'ultima in realtà si può dimostrare che è assurda anche sfruttando il fatto che $(L_{Z,Z} \cap \Delta_{\{0\}}) = \emptyset$).
Se supponiamo allora che :
$(\alpha, \beta),(\alpha, \gamma), (\beta, \gamma) \in (L_{X,X} \cap \Delta_{\{2,3\}})$
ne consegue che :
$\delta(\alpha, \beta),\delta(\alpha, \gamma),\delta(\beta, \gamma) \in \{2,3\}$
il che è assurdo in quanto il sistema :

$$|\mu(\alpha)-\mu(\beta)| \in \{2,3\}$$
$$|\mu(\alpha)-\mu(\gamma)| \in \{2,3\}$$
$$|\mu(\beta)-\mu(\gamma)| \in \{2,3\}$$

non ammette soluzioni.
Ne consegue che in R non vi sono triangoli aventi tutti i vertici in X o tutti i vertici in Y o tutti i vertici in Z.

4) $\alpha, \beta \in X$ e $\gamma \in Z$
Ciò significa che :
$(\alpha, \beta) \in (L_{X,X} \cap \Delta_{\{2,3\}})$ e $(\alpha, \gamma), (\beta, \gamma) \in (L_{X,Z} \cap \Delta_{\{2,3\}})$
Si ricade pertanto nello stesso caso discusso al punto 3).
Ne consegue che in R non vi sono triangoli aventi due vertici in X ed un vertice in Z.
5) $\alpha, \beta \in Y$ e $\gamma \in Z$
Ciò significa che :
$(\alpha, \beta) \in (L_{Y,Y} \cap \Delta_{\{1,4\}})$ e $(\alpha, \gamma), (\beta, \gamma) \in (L_{Y,Z} \cap \Delta_{\{1,4\}})$
Anche questa volta si ricade nel caso 3) (dove questa volta abbiamo però {1,4} al posto di {2,3}. Ne consegue che in R non vi sono triangoli aventi due vertici in Y ed un vertice in Z.

Gli stessi ragionamenti si possono applicare, con le dovute modifiche, anche agli insiemi G e B.
Si conclude pertanto che l'insieme L, con la precedente scelta di colori, non contiene triangoli monocromatici.

C.V.D.