Trattasi di decidere

Questa è la sintesi, ad oggi, dei risultati raggiunti e delle questioni irrisolte concernenti il problema, da tutti ritenuto difficile e che alla fine si è rivelato ancor più complesso di quanto ci aspettassimo. Sull'onda dell'entusiasmo iniziale, l'attacco è stato portato su diversi fronti, non tutti rispondenti appieno alle condizioni, esplicitamente od implicitamente, contenute nel testo.

Alcuni hanno provato a progettare una macchina concreta atta a svolgere le medesime funzioni di quelle che, nei due rami del parlamento, forniscono in tempo reale i risultati delle votazioni.
I dispositivi analogici proposti hanno subìto motivate contestazioni, riguardanti la scarsa attendibilità dei risultati, proprio nella zona critica, costituita dagli esiti prossimi al 50% dei votanti.
In questa situazione, le imprecisioni tollerate nei componenti e, ancor di più, la presenza di perturbazioni elettromagnetiche non eliminabili, portano l'errore stimato ad essere ben superiore al singolo voto che ne costituisce, ovviamente, la necessaria limitazione superiore.
La notizia, appresa in quei giorni, delle ingenti spese affrontate alla Camera dei Deputati, solo per impedire il voto in conto terzi, ha chiuso questa parte della discussione.

Altri hanno proposto l'uso di deviatori, sostituibili con coppie di interruttori che agiscono in maniera opposta: gli uni '***NO***' sono normalmente aperti e vengono chiusi alla pressione del tasto esterno, gli altri '***NC***' sono, viceversa, normalmente chiusi e vengono aperti dal voto.
Queste macchine che abbiamo chiamato semaforizzate, utilizzano l'apertura degli ***NC*** per impedire ai corrispondenti ***NO*** di essere collegati in serie fra loro. Hanno una semplice costruzione a rete (Fig. 1) e funzionano con pochi interruttori.
Se v è il numero dei votanti ed n quello dei voti necessari per l'approvazione; la macchina corrispondente $<v,n>$ si può realizzare con soli $n(v-n+1)$ ***NO*** e $(n-1)(v-n)$ ***NC***.
Queste quantità di interruttori sono sicuramente sufficiente, ma siamo riusciti a dimostrarne la necessità solo per quanto riguarda il numero di ***NO***.

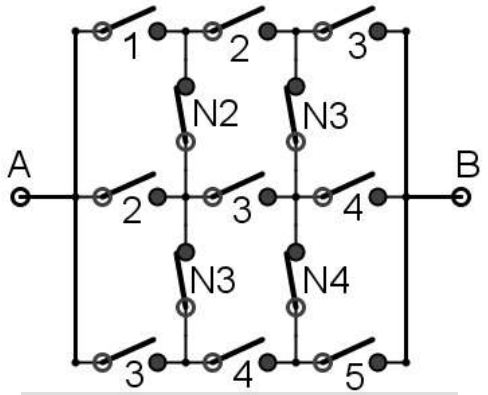

Figura 1 <5,3> semaforizzata

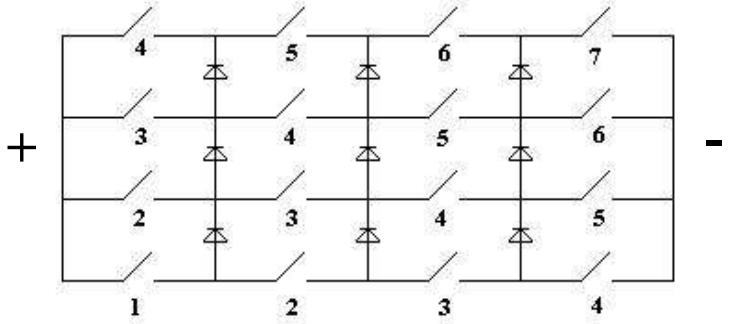

Figura 2 <7,4> con sensi unici

E' stata proposta anche una variante di queste macchine (Fig. 2), chiamata 'con sensi unici', in cui gli interruttori ***NC*** sono stati sostituiti con diodi.

La maggior parte delle nostre energie è stata spesa per ragionare sulle macchine costruite con soli interruttori ***NO*** (d'ora in poi, non essendoci possibilità di confusione, verranno chiamati ***I***) opportunamente collegati fra di loro.
Per queste è stata ideata una tecnica costruttiva, relativamente semplice, modulare, che permette di ottenere macchine per qualunque numero di votanti.
Divisi i v votanti in due gruppi distinti $v1$ e $v2$, di consistenza arbitraria con $v1+v2=v$, la macchina $<v,n>$ può essere costruita unendo in parallelo tutte quelle ottenute ponendo in serie $<v1,i>$ e $<v2,j>$ con $0 \le i \le v1, \quad 0 \le j \le v2, \quad i+j=n.$

Le macchine **<v,0>** sono virtuali, con i terminali coincidenti.
Abbiamo subito osservato che il numero di ***I*** necessari è minimo quando il numero di persone nei due gruppi differisce il meno possibile (Figg. 3 e 5)

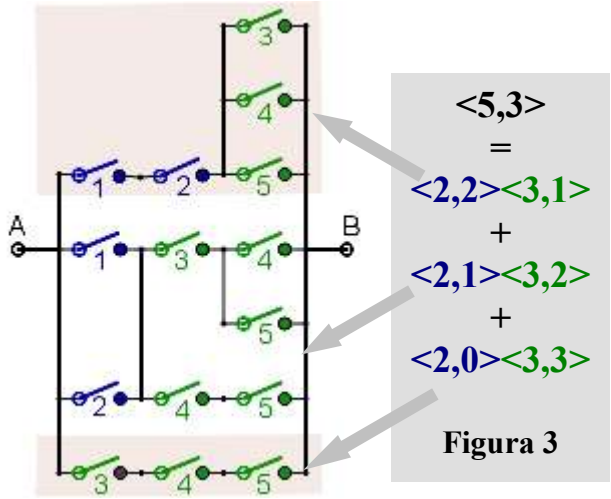

Figura 3

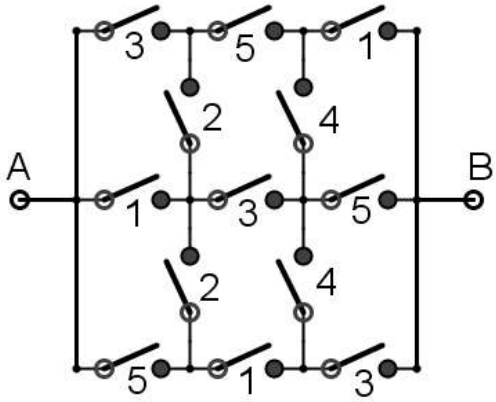

Figura 4 <5,3> "rude sarchiapone"

La tecnica costruttiva di queste macchine permette di calcolare immediatamente il numero di ***I*** necessari attraverso relazioni ricorsive. Se ***Q(v,n)*** è il numero di ***I*** della **<v,n>** avremo:

$$Q(v,n)=\sum_{i=b}^{a}\left(Q\left(\left\lfloor\frac{v}{2}\right\rfloor,i\right)+Q\left(v-\left\lfloor\frac{v}{2}\right\rfloor,n-i\right)\right)\ \text{con}\ b=Max\left(0,v-\left\lfloor\frac{v}{2}\right\rfloor-n\right),\ a=min\left(\left\lfloor\frac{v}{2}\right\rfloor,n\right).$$

Queste relazioni si possono semplificare e, dimostrata la simmetria ***Q(v,n) = Q(v,v – n + 1)***, permettono di ottenere, anche senza utilizzare supporti informatici, tabelle come la seguente dove il calcolo di una cella coinvolge, al più, i valori di altre tre.

n =	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
***v* = 1**	1									
2	2	2								
3	3	5	3							
4	4	8	8	4						
5	5	12	15	12	5					
6	6	16	22	22	16	6				
7	7	20	31	35	31	20	7			
8	8	24	40	48	48	40	24	8		
9	9	29	**52**	68	73	68	52	29	9	
10	10	34	64	**88**	98	98	88	64	34	10

Es. Q(v,n). La parte ombreggiata è quella effettivamente calcolata, gli altri valori sono stati ottenuti utilizzando la simmetria e Q(v,1) = v. I colori evidenziano due esempi delle celle valutate in un calcolo.

Naturalmente la nostra attenzione era rivolta specialmente ai casi di maggioranza semplice, cioè quando ***n*** supera appena ***v – n***. Per il calcolo del numero Q_v di ***I*** utilizzati in queste macchine, sono state dimostrate queste relazioni ricorsive, che costituiscono il più interessante risultato ottenuto:

$$\begin{aligned} Q_{2k-1} &= T_{k-1}+T_k \\ Q_{2k} &= 2\cdot T_k \end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_1 &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} T_{2k} &= 2(k+1)\cdot T_k \\ T_{2k+1} &= (k+2)\cdot T_k+(k+1)\cdot T_{k+1} \end{aligned} \quad \forall k>0$$

Da cui si è potuto rapidamente implementare algoritmi efficienti per il calcolo delle Q_v e ricavare la seguente approssimazione asintotica:

$$Q_v \approx v^{\frac{\log_2 v - 1}{2}} \cdot 4 \cdot exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \frac{1}{2^j - 1} \right) = 9.537... \cdot v^{\frac{\log_2 v - 1}{2}}$$

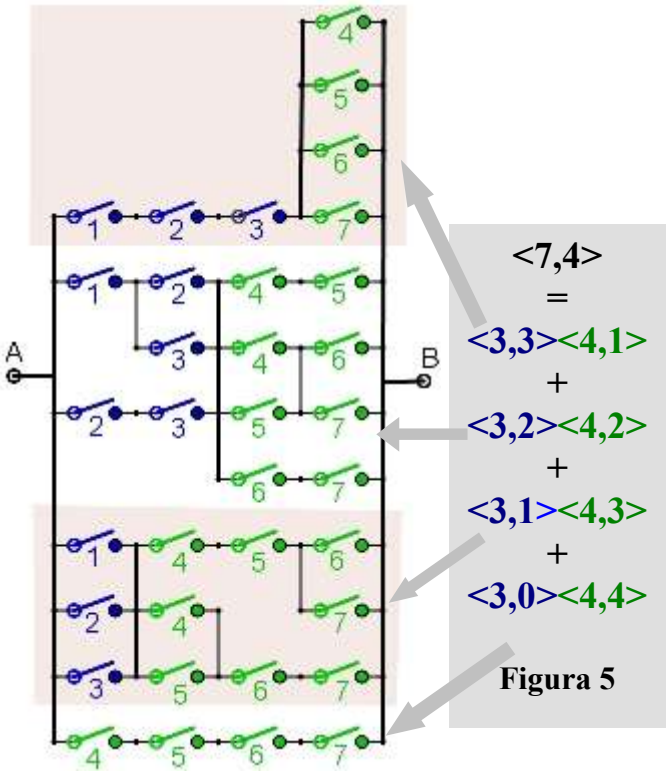

Figura 5

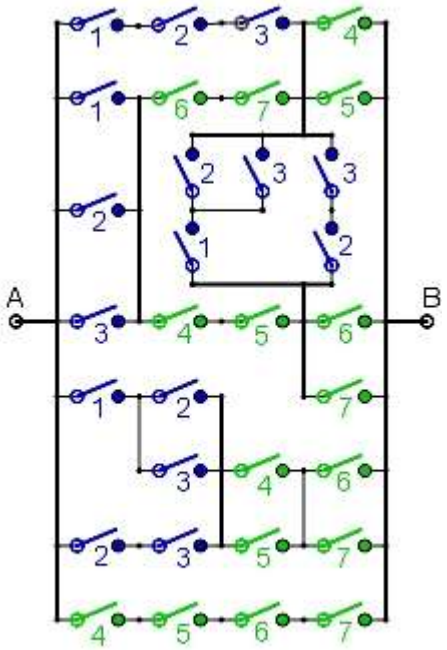

Figura 6 <7,4> ridotta

Tutto a posto? Solutori soddisfatti a festeggiare? Non proprio! Sapevamo fin dall'inizio che queste macchine funzionano egregiamente, sono di facile verifica, usano un elevato numero di ***I*** e… questo non è il minimo possibile!
La <5,3> richiede 15 ***I*** (Fig.3) e quella che è unanimemente ritenuta la più bella macchina pensata: il "rude sarchiapone" (Fig. 4), una sorta di trait d'union con le macchine ad ***NC***, ne usa solo 13.
La <7,4> richiede 35 ***I*** (Fig.5), ma si può modificare in modo che ne bastino 32 (Fig.6).
Non abbiamo alcuna certezza che questi siano i migliori risultati possibili e, se anche lo fossero, sappiamo solo in parte come operare le riduzioni quando il numero dei votanti è più grande.
Un risparmio maggiore del 10% parrebbe ragionevolmente ipotizzabile. Un risultato decisamente vago per un problema dalla formulazione così semplice!

Il numero di versione che tiene compagnia a quello di pagina vuole sottolineare la convinzione che questo documento sia un punto di partenza e la speranza che proprio in questo blog possa subire numerose modifiche.

07/05/2009

Allanon, Cid, Fabrizio, Franco57, GinoPieri, Gnugnu, Millenium Bug,Trekker